

Алгоритмы определения внешнетраекторных параметров и аэродинамических характеристик движения тела вращения: пособие для студентов вузов
С.И. Герасимов И.И. Каныгин В.И. Костин Н.П. Менде

Для студентов и аспирантов физических, ракетно-артиллерийских специальностей вузов и технических университетов. Может быть полезна инженерам и научным работникам, специализирующимся в области проектирования летательных аппаратов, измерений в аэробаллистическом эксперименте, специальном приборостроении.

Аннотация.....

Основные обозначения.....

I. Аналитический фотограмметрический метод изучения кинематических параметров движения....

1. Внешнетраекторные данные.....

2. Метод наземных стереофотографических измерений.....

2.1 Геометрическая схема и системы координат метода стереофотограмметрических измерений.....

2.2. Математические зависимости метода стереофотограмметрических измерений...

2.3 Фотограмметрическая обработка снимков.....

3 Методика математической обработки результатов стереофотограмметрических измерений...

3.1 Первичная математическая обработка результатов фотограмметрических измерений....

3.2 Показатели точности определения параметров пространственного положения ЛА.....

II. Алгоритм оценки динамических параметров.....

1. Общие соображения.....

2. Уравнения свободного плоского движения осесимметричного объекта в газовой среде.....

3. О построении алгоритма оценивания аэродинамических коэффициентов.....

4. Целевая функция.....

5. Уравнения чувствительности.....

6. Система нормальных уравнений МНК и оценка параметров.....

7. Оценка значимости параметров разложений аэродинамических коэффициентов.....

Литература.....

АННОТАЦИЯ

При отработке летательных аппаратов (ЛА) наблюдается тенденция широкого использования модельно-экспериментальных исследований по максимально возможному числу параметров. Важное место в этом процессе занимает баллистический модельно-экспериментальный метод. В его основе лежит принцип создания необходимых условий взаимодействия с аэросредой летательного аппарата, свободно брошенного на измерительный участок аэробаллистической трассы. [1, 2].

На баллистической трассе расположена система оптических стереопостов, выполняющих измерения положения ЛА в пространстве в земной системе координат. [3].

В процессе динамической фотограмметрической съемки, т. е. синхронной съемки с базиса двумя фотокамерами, движущийся объект во всех последовательных положениях фиксируется на двух неподвижных снимках. Координаты специальных марок на поверхности объекта известны до съемки. Кроме того, на каждом снимке вместе с изображениями объекта фотографируются наземные опорные точки геодезического обоснования. Координаты точек изображений являются основной исходной информацией для определения как кинематических параметров объекта (его мгновенных положений в пространстве), так и элементов внутреннего и внешнего ориентирования снимков.

Параметры движения ЛА определяются из решения обратной задачи динамики движения с использованием данных внешнетраекторной регистрации $X_i(t_i), Y_i(t_i), Z_i(t_i), V_{x_i}(t_i), V_{y_i}(t_i), V_{z_i}(t_i), \vartheta_i(t_i), \psi_i(t_i), \gamma_i(t_i)$.

Сформулирована математическая модель движения осесимметричного аэродинамического объекта с учетом слабой массовой асимметрии, обусловленной технологическими погрешностями изготовления. Рассматривается плоское движение объекта с колебаниями по углу атаки без вращения объекта вокруг его продольной оси.

Для идентификации аэродинамических характеристик объекта и начальных условий движения путем анализа дискретных траекторных данных объекта выбран метод нелинейного оценивания параметров динамических систем. Метод предполагает дифференцирование исходных дифференциальных уравнений движения по неизвестным параметрам аналитических представлений зависимостей аэродинамических коэффициентов от условий движения (угла атаки, угловой скорости колебаний по тангажу, числа Маха) и по неизвестным начальным условиям движения.

Разработанный алгоритм оценивания искомых параметров предполагает представление упомянутых зависимостей аэродинамических коэффициентов отрезками кратных рядов Тейлора, а в случае больших интервалов изменения аргументов или при задании исходных приближений искомых функций в виде табличных зависимостей - путем сплайновой аппроксимации.

Особенностью алгоритма является декомпозиция системы динамических уравнений Эйлера, позволяющая построить итерационный процесс, в ходе которого три дифференциальных уравнения движения по тангажу и двум координатам центра масс рассматриваются последовательно независимо, что почти вдвое уменьшает размеры информационных и дисперсионных матриц решаемых систем уравнений и положительно сказывается на устойчивости и сходимости процесса идентификации (особенно это важно на этапе подбора исходных приближений искомых параметров).

Разработанный алгоритм оценивания аэродинамических коэффициентов по траекторным данным объекта включает приемы статистического оценивания значимости искомых параметров и доверительных интервалов зависимостей аэродинамических коэффициентов от угла атаки и числа Маха.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

C_m, C_x, C_y - коэффициенты аэродинамического момента, сопротивления и подъемной силы (в скоростной системе координат)

C_t, C_n - коэффициенты тангенциальной и нормальной составляющих аэродинамической силы (связанная система координат)

C_m^α, C_y^α - производные аэродинамических коэффициентов по углу атаки (определяются делением соответствующих коэффициентов на угол атаки)

$C_m^{\overline{\omega}}$ - коэффициент демпфирующего момента

C_j - коэффициенты разложения полного аэродинамического момента в степенной ряд по углу атаки и числу Маха

g - ускорения силы тяжести

l - длина объекта

m - масса объекта

M - число Маха

r - поперечный радиус инерции объекта

S - площадь миделя объекта

t - время

V - модуль вектора скорости объекта

u, v - составляющие вектора скорости вдоль земных осей координат x и y

X - сила сопротивления

Y - подъемная сила

x, y - земные оси координат, ось x горизонтальна, y вертикальна

α - угол атаки

θ - угол наклона траектории к оси x

\mathcal{G} - угол тангажа

ρ - плотность газа

$\overline{\omega}$ - безразмерная угловая скорость объекта относительно поперечной оси

МНК – метод наименьших квадратов

Верхними штрихами над переменными отмечены производные по координате x , Производные по времени и частные производные по параметрам даны в полной записи. Прочие обозначения поясняются при их введении.

І АНАЛИТИЧЕСКИЙ ФОТОГРАММЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ИЗУЧЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ

Для изучения быстро движущихся объектов находит применение фотограмметрический метод [4]. Он заключается в многократном синхронном фотографировании движущегося объекта на два неподвижных снимка, что делает возможным определение кинематических параметров движения (КПД), характеризующих пространственные координаты последовательных положений объекта и углы ориентировки. В данном случае необходимо осуществлять вычислительную обработку измерительной фотограмметрической информации.

Применение для этой цели традиционной методики наземной съемки, основанной на различных способах прямой фотограмметрической засечки, не может быть признано эффективным. Во-первых, для решения фотограмметрической засечки требуется точное знание элементов внутреннего и внешнего ориентирования снимков, что в большинстве практических случаев невыполнимо как из-за существующего несоответствия технических возможностей современного съемочного оборудования (применяются переоборудованные аэрофотоаппараты и т. п.), так и вследствие трудоемкости процесса калибровки, и в особенности фотокамер, перефокусированных для съемок с близких отстояний; во-вторых, методика позволяет определить только мгновенные значения пространственных координат движущегося объекта как материальной точки [5] и непригодна для получения углов ориентировки. Для устранения указанных недостатков применен метод аналитической фотограмметрии, в котором определение элементов ориентирования (внутренних и внешних) снимков и КПД объекта осуществляется совместным уравниванием по способу наименьших квадратов. В основе метода лежат обобщенные уравнения обратной двойной и прямой фотограмметрических засечек

1. ВНЕШНЕТРАЕКТОРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ

К внешнетраекторным параметрам движения ЛА, измеряемым в аэробаллистическом эксперименте, относятся мгновенные значения текущих параметров пространственного положения ЛА в наземной системе опорных геодезических координат испытательного комплекса /6/:

- три линейные координаты $X_{T_i}, Y_{T_i}, Z_{T_i}$, определяющие положение центра масс ЛА в наземной системе координат;
- три угловые координаты: угол тангажа \mathcal{G}_i , угол рыскания Ψ_i и угол собственного вращения γ_i , определяющие ориентацию осей ЛА относительно наземной системы координат.

Исходя из длины волны колебаний ЛА l (м), на участке свободного полета, на периоде колебаний регистрируется от 4 до 8 положений ЛА с интервалом $0,4 l - 0,8 l$.

Получаемая в аэродинамических экспериментах оптическая информация в виде фотоснимков проходит дальнейшую фотограмметрическую и математическую обработку, которая состоит в измерении координат фотоснимков и в пересчете измеряемых величин по заданному алгоритму обработки в искомые значения линейных и угловых координат ЛА.

Формы ЛА: коническая, составная коническая, цилиндрикоконическая и др.

Скорость движения в свободном полете: от 100 до 4000 м/с;

2 МЕТОД НАЗЕМНЫХ СТЕРЕОФОТОГРАММЕТРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Для определения параметров пространственного положения ЛА, катапультируемых в свободный полет, применяется метод наземных стереофотограмметрических измерений, в котором задача определения пространственных координат ЛА на траектории решается по результатам измерений стереопар-снимков с изображением ЛА, получаемых в процессе стереофоторегистрации траектории полета ЛА.

Стереофоторегистрация траектории полета ЛА выполняется с использованием специальных измерительных фотокамер и осуществляется посредством импульсной стробоскопической фотосъемки, позволяющей получать на стереопаре снимков мгновенные фотограмметрические изображения ЛА с заданной дискретностью, а решение задачи

восстановления пространственных координат ЛА основано на математическом аппарате и практических приемах метода аналитической фотограмметрии, с использованием МНК для вычислительной обработки результатов измерений стереопар-снимков.

2.1 Геометрическая схема и системы координат метода стереофотограмметрических измерений

Принципиальная геометрическая схема метода стереофотограмметрических измерений приведена на рис. 1.

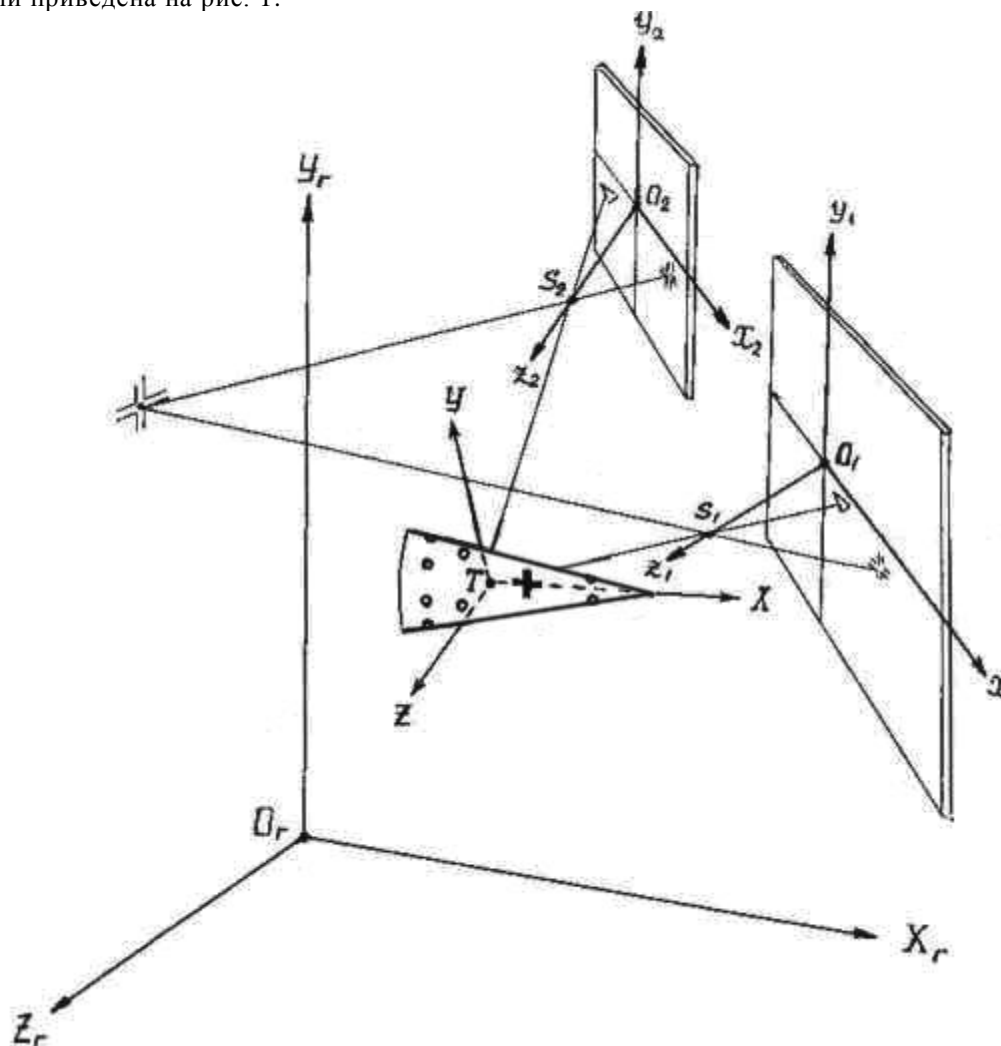


Рисунок 1 – Геометрическая схема определения координат ЛА стереофотограмметрическим методом

В соответствии с данной схемой для определения параметров пространственного положения ЛА его фотографируют точными измерительными фотокамерами с двух точек пространства (с концов базиса фотографирования S_1 и S_2) на два неподвижных фотоснимка. Получаемая пара перекрывающихся фотоснимков (стереопара) обладает рядом неизменных геометрических свойств, называемых проективными [4], что с учетом геометрической обратимости фотографического процесса позволяет по измеренным величинам на снимках определять шесть параметров, характеризующих пространственное положение ЛА на траектории полета (рис. 2):

- три линейные координаты X_T, Y_T, Z_T центра масс ЛА;
- три угловые координаты ϑ, ψ, γ ориентации осей ЛА.

Для определения и представления означенных внешнетраекторных параметров ЛА используются следующие системы пространственных прямоугольных координат (см. рис. 1):

1) Наземная система опорных геодезических координат $O_r X_r Y_r Z_r$. Ось $O_r Y_r$ этой системы вертикальна, ось $O_r X_r$ лежит в горизонтальной плоскости и ориентирована вдоль оси полета ЛА, а ось $O_r Z_r$ – вправо от плоскости $O_r X_r Y_r$, образуя с первыми двумя осями правую систему координат.

Основное назначение данной системы – использование в качестве единой системы координат для представления внешнетраекторных параметров ЛА, путем точного пересчета координат в эту систему из односторонних с ней фотограмметрических систем координат измерительных средств.

Начало наземной системы координат размещается в окрестности точки катапультирования ЛА.

2) Система связанных координат $TXYZ$ с корпусом ЛА. Ось TX этой системы направлена по его продольной оси (к носку), являющейся осью симметрии, ось TU перпендикулярна TX и находится в вертикальной плоскости стабилизации ЛА, ось TZ перпендикулярна плоскости TXY и образует правую систему координат. Начало этой системы – точка T , совпадает с центром масс ЛА.

Связанная система координат $TXYZ$ определяется реперными точками, замаркированными на корпусе ЛА по отношению к центру масс. Это дает возможность задавать как положение центра масс ЛА координатами X_T, Y_T, Z_T так и ориентацию связанной системы углами ϑ, ψ, γ , относительно наземной системы координат.

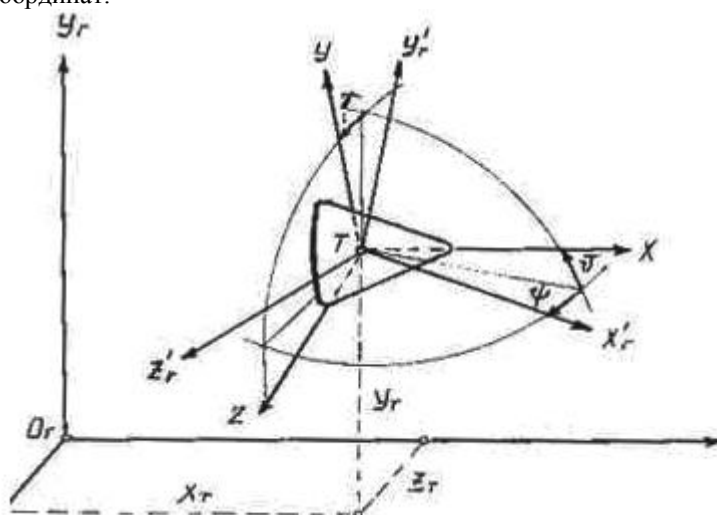


Рисунок 2 – Параметры пространственного положения ЛА в наземной системе координат

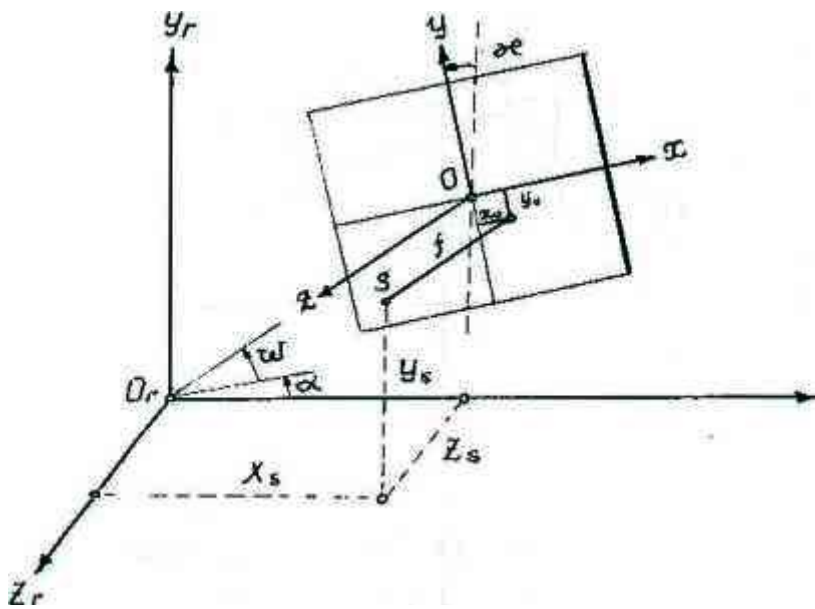


Рисунок 3 – Фотограмметрическая система координат и элементы ориентирования фотокамеры (снимка)

Система фотограмметрических координат $Oxyz$, которая связана с каждой фотокамерой или, что одно и то же – с фотоснимком, получаемым этой фотокамерой, исходя из положения о том, что снимок занимает определенное место в фотокамере на расстоянии f от центра проектирования S объектива фотокамеры (рис. 3)¹.

Фотограмметрическая система координат определяется рядами дискретных перекрестий в плоскости выравнивающего стекла фотокамеры, которые впечатываются на фотоснимок в момент экспонирования. Начало системы – точка O , расположено в центре снимка и совпадает с центральным перекрестием, ось Ox направлена по группе горизонтально расположенных перекрестий, в направлении движения ЛА, а ось Oy перпендикулярна к оси Ox и направлена по группе вертикально расположенных перекрестий. Ось Oz перпендикулярна к плоскости фотоснимка Oxy и направлена через центр проектирования S в сторону объекта съемки, образуя с первыми двумя осями правую систему координат.

2.2. Математические зависимости метода стереофотограмметрических измерений

Решение задачи определения параметров пространственного положения ЛА основано на проективных соотношениях метода аналитической фотограмметрии [4, 5] между координатами x, y изображений соответствующих точек стереопары (опорных геодезических точек или точек на корпусе ЛА), измеряемых в плоской прямоугольной системе фотограмметрических координат Oxy каждого фотоснимка и координатами этих точек в наземной системе опорных геодезических координат. Эти соотношения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{f \cdot X_{\phi} - x_0 \cdot Z_{\phi}}{Z_{\phi} - f} \\ y &= \frac{f \cdot Y_{\phi} - y_0 \cdot Z_{\phi}}{Z_{\phi} - f} \end{aligned} \right\} (1)$$

Здесь $X_{\phi}, Y_{\phi}, Z_{\phi}$ – координаты опорных геодезических точек или точек ЛА, получаемых в результате матричных преобразований координат этих точек из наземной системы в фотограмметрическую систему координат, непосредственно связанную с каждой фотокамерой (фотоснимком), т.е.:

¹ Употребление в дальнейшем названия фотограмметрической системы координат, относящегося к фотокамере или к фотоснимку, в данном случае равнозначно.

- для опорных геодезических точек;

$$\begin{pmatrix} X_\phi \\ Y_\phi \\ Z_\phi \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} X_r - X_0 \\ Y_r - Y_0 \\ Z_r - Z_0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

- для точек на корпусе ЛА:

$$\begin{pmatrix} X_\phi \\ Y_\phi \\ Z_\phi \end{pmatrix} = B \cdot \left(\begin{pmatrix} X_r - X_0 \\ Y_r - Y_0 \\ Z_r - Z_0 \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \right), \quad (3)$$

где B – матрица направляющих косинусов углового ориентирования фотоснимков (ω, α, χ , см. рис. 3) относительно наземной системы координат;

X_r, Y_r, Z_r – координаты опорных геодезических точек (контрольных марок) в наземной системе координат;

X_0, Y_0, Z_0 – координаты начала фотограмметрической системы координат в наземной системе;

A – матрица направляющих косинусов углового ориентирования ЛА (ϑ, ψ, γ , см. рис. 3) относительно наземной системы координат;

X_T, Y_T, Z_T – координаты центра масс ЛА в наземной системе координат;

X, Y, Z – координаты реперных точек на корпусе ЛА в связанной системе координат $WXYZ$.

Для определения параметров пространственного положения ЛА по его изображениям на стереопаре снимков необходимо знать положение каждого фотоснимка в момент фотографирования ЛА. Величины, характеризующие это положение – элементы ориентирования снимка, разделяются на две группы (рис. 3):

- элементы внутреннего ориентирования, определяющие положение снимка относительно центра проектирования и служащие для восстановления связей проектирующих лучей, существовавших при стереофоторегистрации. К ним относятся координаты главной точки x_0, y_0 и фокусное расстояние f ;

- элементы внешнего ориентирования, определяющие положение связей проектирующих лучей относительно наземной системы геодезических координат; для каждого фотоснимка задаются шестью величинами:

X_S, Y_S, Z_S – координатами центра проектирования S в наземной системе координат;

ω, α, χ – углами ориентации фотограмметрической системы координат $Oxyz$ относительно наземной системы, где ω – угол наклона оптической оси фотокамеры, α – угол ориентации оптической оси фотокамеры в горизонтальной плоскости, χ – угол крена фотокамеры.

Уравнения (1), составленные для точек стереопары-снимков, вместе с общими уравнениями преобразования пространственных координат (2 и 3), содержат все необходимые параметры, которые определяют математическую модель стереофотограмметрического метода измерений для определения параметров пространственного положения ЛА в полете.

Определение элементов ориентирования фотоснимков осуществляется аналитически с использованием выражений (2) по совокупности данных, получаемых из измерений координат фотоизображений опорных геодезических точек, а определение параметров пространственного положения ЛА с использованием выражений (3) по совокупности данных, получаемых из измерений фотокоординат реперных точек, замаркированных на корпусе ЛА.

Теоретически, для определения элементов внутреннего и внешнего ориентирования стереопары-снимков и параметров пространственного положения ЛА, требуется следующий минимум измеряемых точек: пять опорных геодезических точек и три точки, расположенные определенным образом на корпусе ЛА. Практически всегда используется избыточное количество тех и других точек, что позволяет исключать ошибочные точки и в то же время остается достаточное число точек для математической обработки (уравнивания) результатов измерений по методу наименьших квадратов с оценкой точности определяемых параметров (изложение методики математической обработки результатов фотограмметрических измерений приведено в п.5).

Маркировка боковой поверхности объекта испытаний должна отвечать требованиям получения при экспонировании на фотоснимках удовлетворительного фотографического и измерительного качества изображения. Для этого в процессе подготовки ЛА к аэродинамическому эксперименту производится покраска наружной боковой поверхности (корпуса) ЛА в беломатовый цвет и нанесение (маркировка) реперных и опознавательных знаков черного цвета.

На рисунке 4 приведена типовая схема маркировки ЛА, задающая связанную систему координат объекта для определения его положения в пространстве наземной системы координат.

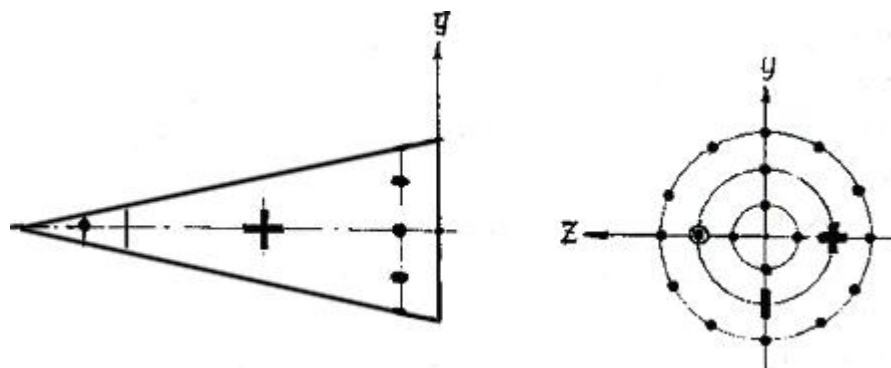


Рисунок 4

Разметка точек выполняется по поясам, для различных сечений ЛА, симметрично относительно его продольной оси.

2.3 Фотограмметрическая обработка снимков

Фотограмметрическая обработка полученных при фоторегистрации стереопар-снимков заключается в точном измерении плоских координат (x , y) изображений точек ЛА и контрольных марок на снимках. Измерения выполняются на автоматизированном стереокомпараторе специально обученным техническим персоналом.

В измерительном устройстве оператор наблюдает увеличенную часть снимка и неподвижную визирную марку, относительно которой с помощью штурвала электропривода перемещается каретка со снимком. При совмещении визирной марки с наблюдаемой точкой производится регистрация координат в системе шкал прибора. Регистрация результатов измерений осуществляется автоматически с выводом координат на экран дисплея и в память ПЭВМ.

При измерениях соблюдается определенная последовательность операций:

- измеряются координаты контрольных перекрестий, задающих плоскую систему фотограмметрических координат снимка Oxy (см. п. 3.1);
- измеряются координаты контрольных марок наземной системы;

- измеряются координаты точек на корпусе ЛА.

Стереоскопический тип СКА-30 позволяет выполнять измерения с погрешностью ± 5 мкм. Однако степень получаемой точности измерения координат ЛА по фотоснимкам ограничивается во многом качеством самих фотоснимков, т.к. на них всегда присутствует определенное смазывание ЛА и нерезкость изображения, обусловленные конечной продолжительностью действия импульсного источника света и другими ограничивающими факторами [3]. Поэтому предельная погрешность определения координат изображений точек ОИ по фотоснимкам характеризуется случайной величиной равной $\pm 0,025$ мм.

3 МЕТОДИКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ СТЕРЕОФОТОГРАММЕТРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Математическая обработка стереофотограмметрических измерений выполняется на ПЭВМ. Производимые при этом расчеты включают следующие основные этапы статистической обработки по МНК:

- этап первичной математической обработки результатов фотограмметрических измерений координат фотоснимков;
- вычисление параметров пространственного положения ЛА с оценкой точности. На данном этапе вычислений производится уточнение элементов внутреннего и внешнего ориентирования фотокамер, которое предшествует определению внешнетраекторных параметров ЛА.

3.1 Первичная математическая обработка результатов фотограмметрических измерений

В процессе первичной математической обработки результатов измерений координат фотоснимков производятся следующие расчеты:

1. Определение элементов преобразования фотоснимка:

координат $X_0^n Y_0^n$ начала плоской фотограмметрической системы координат снимка в приборной системе стереоскопического СКА-30 (рис. 5); угла ориентации снимка γ_c в приборной системе координат; угла неперпендикулярности β осей прибора $O^I X^I, O^I Y^I$ и коэффициентов линейной деформации пленки K_x и K_y вдоль осей OX и OY снимка, используя измеренные на снимке значения $X^{ПК}, Y^{ПК}$ координат перекрестий контрольной сетки в формулах преобразования:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{X}^K &= K_x \times \left[(X^{ПК} - X_0^I) \times \cos \gamma_c + (Y^{ПК} - Y_0^I) \times \sin(\gamma_c + \beta) \right] \\ \tilde{Y}^K &= K_y \times \left[(Y^{ПК} - Y_0^I) \times \cos(\gamma_c + \beta) + (X^{ПК} - X_0^I) \times \sin \gamma_c \right] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где \tilde{X}^K, \tilde{Y}^K - вычисленные значения координат перекрестий.

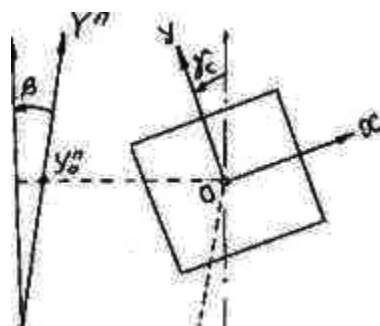


Рисунок 5

При избыточном количестве измерений (более трех перекрестий) элементы преобразования вычисляются по методу наименьших квадратов под условием минимума суммы:

$$\Phi = \left[(\Delta x^k)^2 + (\Delta y^k)^2 \right], \quad (5)$$

где $\Delta x^k, \Delta y^k$ – невязки между вычисленными по формулам (5) и истинными значениями координат перекрестий (паспортными данными).

2. Исправление измеренных приборных значений плоских координат X^T, Y^T фотоизображений опорных-контрольных марок и точек на корпусе ЛА по формулам преобразования (5), используя полученные значения элементов преобразования снимка. В результате, вычисляются координаты x, y означенных точек, приведенные к началу в центральном перекрестии снимка и исправленные за влияние систематических ошибок, вызванных приближенной ориентацией снимка в приборе СКА-30, неперпендикулярность осей прибора и деформацией фотопленки.

Вычисление параметров пространственного положения ЛА.

Последующая математическая обработка внешнетраекторной фотограмметрической информации состоит в вычислении параметров пространственного положения ЛА:

- координат центра масс $X_{T_i}, Y_{T_i}, Z_{T_i}$ и
- угловой ориентации $\mathcal{G}_i, \omega_i, z_i$

для фиксированных моментов времени экспозиций t_i , используя исправленные (см. п. 5.1) результаты измерений координат точек ЛА на стереопаре-снимков, а также предварительно уточненные на данном этапе обработки элементы внутреннего и внешнего ориентирования фотокамер. Для уточнения элементов ориентирования фотокамер используются результаты измерений координат опорных контрольных марок.

Сущность математической обработки фотограмметрических измерений при этом заключается в уравнивательных вычислениях, и является общим как для процесса уточнения элементов ориентирования фотокамер, так и для процесса вычисления параметров пространственного положения ЛА. Ниже приводится алгоритм расчета параметров пространственного положений ЛА, в котором элементы ориентирования, в результате проведенных уточнений, считаются безошибочными.

Используя исходные соотношения (1 – 3), представляющие собой уравнения связи между измеряемыми величинами и определяемыми параметрами (неизвестными), определяются расчетные значения координат изображений точек ЛА на фотоснимках. Различия ("невязки") $\Delta x_i, \Delta y_i$ между измеренными (действительными) $\Delta x_i^{изм}, \Delta y_i^{изм}$ и расчетными $\Delta x_i^p, \Delta y_i^p$ значениями координат обусловлены отклонением предварительных оценок параметров пространственного положения ЛА от их истинных значений.

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_i &= x_i^{изм} - x_i^p \\ \Delta y_i &= y_i^{изм} - y_i^p \end{aligned} \right\} (6)$$

В качестве предварительных оценок принимаются данные приближенных вычислений этих параметров.

Уменьшение уровня различий (6) достигается путем определения уточняющих поправок к приближенным значениям с помощью МНК. Такое решение задачи обработки стереофотограмметрических измерений обеспечивает наилучшее согласование всей совокупности расчетных значений фотокоординат ЛА с их измеренными значениями. Задача решается методом последовательных приближений под условием минимума суммы квадратов остаточных невязок:

$$\Phi(a_m^j) = \sum_{j=1}^k W \times \sum_{i=1}^{n_j} \left[\left(\Delta x_i^j \right)^2 + \left(\Delta y_i^j \right)^2 \right] = \min, \quad (7)$$

где $a_m = (X_{T_i}, Y_{T_i}, Z_{T_i}, \nu_i, \psi_i, \gamma_i)$ – оптимизируемые параметры пространственного положения ЛА;

$$W = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_x^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_y^2} \end{pmatrix} - \text{матрица весов измеренных координат точек фотоснимков, которые}$$

принимаются независимыми и с одинаковым весом, где σ_x, σ_y - ср.кв. погрешности определения координат точек ЛА по фотоснимкам;

k - количество фотокамер (фотоснимков), по которым решается данная задача ($2 \leq k \leq 4$);

n_j - количество зарегистрированных на j -м снимке точек ЛА;

n - номер приближения.

Система исходных уравнений (1), составленная для каждой измеренной точки ЛА на K фотоснимках, нелинейна и практически всегда имеется избыточное число таких измерений. Поэтому, после линеаризации данной системы относительно поправок $\Delta a_m = (\Delta X_{T_i}, \Delta Y_{T_i}, \Delta Z_{T_i}, \Delta \vartheta_i, \Delta \psi_i, \Delta \gamma_i)$ к определяемым параметрам a_m , составляется и решается система так называемых нормальных уравнений, которая в матричном виде будет:

$$(D^v)^T \times W \times D^v \times \Delta a_m^v + (D^v)^T \times W \times l^v = 0, \quad (8)$$

где D - матрица (6×6) частных производных по определяемым параметрам a_m ;

Δa_m - матрица-столбец (1×6) из неизвестных поправок к параметрам пространственного положения СИ;

l - матрица-столбец (1 6) из отклонений (6);

T - индекс транспонирования.

Из решения системы (8) находятся поправки Δa_m :

$$a_m^{v+1} = a_m^v + \Delta a_m^v. \quad (9)$$

Если уточненные параметры еще не удовлетворяют условию (5.5)

при заданном допуске $|\Phi^v - \Phi^{v-1}| \leq 10^{-5}$, то итеративный процесс продолжается; с использованием вычисленных по формуле (6) значений определяемых параметров вычисляют новые значения $x_i^p, y_i^p, \Delta x_i, \Delta y_i, D, \Delta a_m^{v+2}, \Delta a_m^{v+3}, \dots$ и т.д. и определяют новые поправки.

Обращение матрицы нормальных уравнений позволяет оценить точность стереофотограмметрического определения внешнетракторных параметров ЛА, т.к. диагональные

элементы этой матрицы являются дисперсиями случайных величин σa_m , значения которых зависят от характеристик случайных погрешностей измерений координат фотоснимков и от объема используемой при расчетах измерительной информации.

Таким образом, после уравнивания стереофотограмметрических измерений находятся средн. квадрат. погрешности вычисленных параметров a_m :

$$\sigma a_m = \sigma_x \times \sqrt{(G_{mm}^v)^{-1}} \quad (10)$$

Здесь $\sigma_x = \sqrt{\frac{\Phi^v}{N-m}}$ - ошибка единицы веса, где Φ - значение функционала (5.4) после конечного приближения; N - общее число измерений; m - число определяемых параметров пространственного положения ЛА;

$G^{-1} = (D^T \times W \times D)^{-1}$ - корреляционная матрица, обратная матрице нормальных уравнений.

3.2 Показатели точности определения параметров пространственного положения ЛА

Из апостериорной оценки точности уравнивания стереофотограмметрических измерений получают величины ср. кв. погрешностей параметров пространственного положения ЛА (10):

Ошибка единицы веса u_x зависит, в первую очередь, от величины свободных членов (б) уравнений связи между измеренными величинами и неизвестными параметрами. В силу этого она выражает влияние погрешностей измерений координат фотоснимков. Кроме того, в случаях, когда исходные данные содержат погрешности, соизмеримые с погрешностями измерений координат снимков, а число исходных данных и их распределение таково, что они влияют на величину свободных членов уравнений, ошибка единицы веса u_x включает в себя и влияние ошибок исходных данных.

Элементы обратной матрицы коэффициентов нормальных уравнений G_{mm}^{-1} зависят от величины коэффициентов уравнений связи между измеренными величинами и неизвестными a_m от количества этих уравнений. Вследствие этого они отражают влияние геометрических параметров схемы метода стереофотограмметрических измерений и числа измерений.

Итак, погрешность функции уравненных параметров (a_m) пространственного положения ЛА зависит от:

- погрешностей измерений координат снимков;
- погрешностей исходных данных;
- параметров геометрической схемы метода стереофотограмметрических измерений;
- количества измерений.

При стереофотограмметрических измерениях по данной методике используется фотоаппаратура АФА-41/10, а для измерений снимков стереокомпаратор СКА-30, обеспечивающие заданную точность определения координат фотоснимков. В связи с этим погрешности измерений считаются известными величинами. Однако, существует некоторая зависимость между точностью измерений координат фотоснимков и динамическими условиями выполнения фоторегистрации ЛА, которая приводит к снижению точности этих измерений. Такими динамическими факторами являются: смаз изображения, снижение контрастности, ухудшение разрешающей способности, от которых, в конечном итоге, зависит резкость наблюдаемых точек ЛА.

По данным статистического анализа материалов внешнетраекторных фотограмметрических измерений точность определения координат фотоснимков характеризуется случайной погрешностью

$$\sigma_{x,y} = \pm 0,025 \text{ мм с вероятностью } P = 0,95.$$

Погрешности исходных данных (погрешности элементов ориентирования фотокамер, дисторсии объектива и деформации пленки) носят, как правило, систематический характер и не сказываются на величине свободных членов уравнений, а следовательно не выявляются при апостериорной оценке. Поэтому методика обработки стереофотограмметрических измерений разработана таким образом, чтобы максимально исключить систематические погрешности исходных данных, сведя их к пренебрежимо малым величинам по сравнению со случайными погрешностями измерений. Традиционным способом учета систематических погрешностей элементов ориентирования фотокамер является их уточнение по опорным контрольным маркам. Погрешности геодезического определения координат контрольных марок в этом случае соответствуют принятым допускам /5/ для обеспечения заданной точности.

В процессе уточнения элементов ориентирования фотокамер по точкам геодезической опоры компенсируется также систематическая составляющая дисторсии оптической системы камеры АФА-41/10.

Влияние систематической деформации пленки исключается в процессе первичной математической обработки (см. п. 4.1) по результатам измерений координат перекрестий контрольной сетки на снимках.

Влияние геометрических параметров схемы наземной стереофотограмметрической съемки заключается в оптимальном взаимном расположении фотокамер АФА-41/10 относительно траектории полета ЛА.

Избыточное количество измерений позволяет исключить ошибочные измерения и уменьшить влияние погрешностей измерений, если эти погрешности носят преимущественно случайный характер. Тем самым увеличение количества измерений способствует повышению точности стереофотограмметрических измерений.

Точность стереофотограмметрических измерений зависит также от ряда меняющихся от эксперимента к эксперименту факторов, таких как режим испытаний и условия фоторегистрации ЛА, состояние маркировки боковой поверхности и размеры ЛА, и др.

II. Алгоритм оценки динамических параметров

1. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ

Алгоритм (методика) совместной обработки группы опытов с одинаковыми объектами испытаний (ЛА) при различных начальных условиях движения (линейные и угловые скорости, углы атаки, метеосостояния и т.п.) содержит уравнения движения, которые должны описывать полет осесимметричного объекта с учетом малых массовых асимметрий, обусловленных технологией изготовления. Движение объекта осуществляется в одной плоскости с колебаниями по углу атаки, вращение относительно продольной оси отсутствует. Алгоритм идентификации должен позволять использовать различные виды разложения АДХ.

Возможны три подхода в зависимости от того, какой информацией располагает экспериментатор о характере малой массовой асимметрии объекта.

1. Средства статического и динамического контроля инерционных характеристик объекта (положения центра масс, плоскости его смещения с оси симметрии формы, и величин радиусов инерции) полностью отсутствуют. «Учет» слабой массовой асимметрии объектов, носящей случайный характер, может быть осуществлен только путем осреднения результатов (рандомизация) группы опытов, обрабатываемых совместно. В данном случае целесообразно использовать алгоритмы обработки траектории осесимметричного объекта, включив в математическую модель постоянный коэффициент, соответствующий неизвестному аэродинамическому моменту при нулевом угле атаки. Поскольку асимметрия формы объекта отсутствует, выражения для сопротивления и подъемной силы не требуют включения дополнительных членов и остаются четной и нечетной функциями угла атаки, соответственно.

При такой постановке вопроса найденный в среднем аэродинамический момент при нулевом угле атаки не будет иметь никакого практического значения, он окажется индивидуальным для каждого из опытов, то есть фиктивным. В принципе, его можно и не включать в рассмотрение, поскольку он будет полезен только в том случае, когда плоскость, содержащая центр масс и геометрическую ось объекта, случайно окажется близкой к плоскости колебаний. С другой стороны, если упомянутые плоскости не совпадают, движение не останется строго плоским, а будет, лишь его некоторым приближением (рассмотрение такого случая в рамках модели плоского движения возможно лишь приближенно).

2. Экспериментатор имеет возможность определить только плоскость, проходящую через геометрическую ось объекта, в которой расположен центр масс, смещенный с оси. Это можно сделать, балансируя объект на строго горизонтальной полированной плоскости. Однако при этом необходимо использовать метатель, в стволе которого имеются прямолинейные нарезки, параллельные оси канала. В гладком стволе поддон с заключенной в нем моделью практически всегда получает осевое вращение из-за несимметрии сил трения. При наличии ствола с прямолинейными нарезками объект устанавливают в ствол так, чтобы плоскость отклонения центра масс от оси симметрии совпадала с предполагаемой плоскостью колебаний (предполагается, что колебания развиваются не случайным образом, а в результате задания начального угла атаки или начального импульса). В рассматриваемом случае в уравнении колебаний объекта восстанавливающий аэродинамический момент может быть выражен не

через его постоянную составляющую C_m ($b = 0$) и производную C_m^α , а через коэффициенты

нормальной и тангенциальной сил, умноженные на соответствующие плечи - расстояние между осевыми координатами центра давления и центра масс для нормальной силы и величину смещения центра масс с оси тела для тангенциальной силы. Упомянутые плечи действия сил полагаются неизвестными и должны быть определены при обработке колебаний, в то время как составляющие полной аэродинамической силы могут быть найдены из уравнений движения центра масс.

3. Экспериментатор располагает средствами статического и динамического контроля инерционных характеристик каждого образца модели объекта, то есть, положение центра масс и радиусы инерции каждой модели известны. Если при этом центр масс модели смещен с оси симметрии формы существенно, аэродинамический момент утрачивает свойства функции нечетной по углу атаки и должен быть описан функцией общего вида, если он представлен через производную коэффициента момента по углу атаки. Однако проще описать плоские колебания объекта, используя нормальную и тангенциальную составляющие аэродинамической силы, найденные из анализа движения центра масс, умноженные на неизвестное плечо нормальной силы и известное плечо тангенциальной составляющей. В этом случае из уравнения колебаний предстоит найти плечо нормальной силы (как функции угла атаки и числа Маха) и демпфирующий момент. Вопрос приведения моментных характеристик к расчетному (проектному) положению центра масс обсуждается отдельно.

Продемонстрируем на конкретном примере справедливость утверждения, что при малых отклонениях от осевой массовой симметрии вполне приемлемо использовать проектные значения моментов инерции. Рассмотрим стандартный объект, использованный в опыте. Масса модели 0.316 кг, длина 0.214 м, диаметр мидаля 0.06 м, поперечный главный центральный момент инерции $1,32 \cdot 10^{-4}$ кг·м² или в

других единицах $1,29 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. При равномерном распределении массы по объему цилиндра с теми же габаритами плотность материала окажется равной $0,52 \text{ г/см}^3$, для монолитного острого конуса она составит $1,56 \text{ г/см}^3$. Модель полая и по форме ближе к конусу. Примем среднюю плотность равной $1,5 \text{ г/см}^3$

Выделим внутри тела цилиндрический объем диаметром $0,01 \text{ м}$, длиной $0,1 \text{ м}$, с осью, параллельной оси тела и отстоящей от оси тела на $0,005 \text{ м}$. Контур объема показан на рис. 1 пунктирной линией ниже оси конуса. Масса такого объема при средней плотности $1,5 \text{ г/см}^3$ составит $0,012 \text{ кг}$.

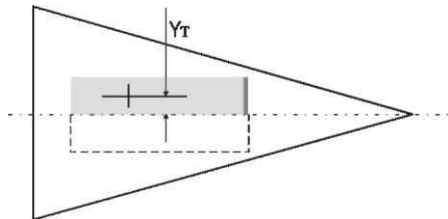


Рис. 1.

Переместим этот выделенный объем зеркально в положение выше оси конуса (затушеванный прямоугольник). Таким образом, на исходном месте объема окажется полость, а на месте его нового положения - объем вдвое большей массы. Масса всего тела в результате, естественно, не изменится, момент инерции относительно поперечной оси, проходящей через исходное положение центра масс на оси симметрии формы тоже останется прежним. Найдем новое положение центра масс. Очевидно, статический момент неизменившейся общей массы нового тела относительно оси симметрии формы равен удвоенному статическому моменту массы рассматриваемого цилиндрического объема относительно той же оси, то есть, $y_T M = 2mr$, где y_T - координата центра масс измененного тела относительно оси симметрии формы, M - масса тела, m - масса цилиндрического объема с исходной плотностью, r - радиус цилиндрического объема. Отсюда имеем $y_T = 0,4 \text{ мм}$.

Такое плечо вызовет момент тангенциальной силы рассматриваемого тела при нулевом угле атаки примерно равный аэродинамическому моменту того же тела с симметричным распределением массы при угле атаки около $0,2$ градуса (для оценки были взяты реальная производная коэффициента момента по углу атаки, равная $-0,1$, и коэффициент сопротивления $0,2$). С другой стороны, трудно ошибиться при изготовлении модели, чтобы 4% ее массы сместить на $1/6$ ее диаметра (на 1 см при диаметре 6 см). Приведенная оценка показывает, что при вполне обычной точности токарных и фрезерных работ ошибки изготовления не приведут к возникновению балансировочного угла, выходящего за пределы погрешности измерения углов тангажа и рысканья.

Оценим, как изменится поперечный момент инерции относительно нового центра масс по сравнению с исходным. По теореме Штейнера имеем

$$I_{y, \text{ (нов)}} = I_{y, \text{ (исх)}} - M \cdot y_T^2 = 1,29 \cdot 10^{-3} - 0,316 \cdot 1,6 \cdot 10^{-7} = (1,29 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 10^{-8}) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Отсюда ясно, что при отклонениях от симметрии распределения массы, вызванных ошибками изготовления, можно пользоваться расчетными (проектными) моментами инерции: в данном примере погрешность оказалась на уровне тысячных долей процента.

Из рассмотренного примера можно сделать следующие выводы. Погрешности изготовления, которые несомненно существуют, не приведут к заметным искажениям аэродинамических характеристик, найденных из анализа траекторных данных, и могут быть осреднены путем совместной обработки группы опытов с однотипной моделью (подход 1, см выше). Тем не менее, построение алгоритма обработки траекторий объектов с массовой асимметрией имеет самостоятельное значение для случаев, когда (а) при балансировке модели на полированной строго горизонтальной плоскости удастся определить ее преимущественную ориентацию (подход 2), или (б) когда асимметрия массы задана намеренно с целью управления движением объекта при осуществлении маневра (рикошет от плотных слоев атмосферы или увод объекта в азимутальном направлении). В случае (а) предстоит проверить значимость величины смещения центра масс с оси симметрии формы на фоне погрешностей регистрации траектории, в случае (б) расчетное (проектное) положение центра масс и радиусы инерции объекта известны, и для обработки траекторий следует использовать подход 3.

По названным причинам рассмотрение алгоритмов совместной обработки группы опытов начнем со случая отсутствия массовой асимметрии, а затем обобщим его на два других случая. Будем использовать скоростную систему координат, а в качестве независимой переменной выберем не время, а расстояние вдоль траектории, как это сделано в [6], следуя [7]. И первый и второй выбор системы координат и независимой переменной не имеют принципиального значения с точки зрения построения алгоритма, предпочтение может быть отдано тому или другому при написании прикладных программ в зависимости

от того, какая система координат используется в баллистических расчетах движения реального объекта (чтоб исключить пересчет).

2. УРАВНЕНИЯ СВОБОДНОГО ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ОБЪЕКТА В ГАЗОВОЙ СРЕДЕ

Запишем уравнения движения в скалярной форме, воспроизведя их из работы [7]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(C_x \cdot \cos \theta + C_y \cdot \sin \theta \right) \cdot \frac{\rho S}{2m} \cdot v^2 \quad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left(C_y \cdot \cos \theta - C_x \cdot \sin \theta \right) \cdot \frac{\rho S}{2m} \cdot v^2 - g \quad (2)$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = C_m \cdot \frac{\rho S}{2m} \cdot r^{-2} \cdot l \cdot v^2 \quad (3)$$

$$\vartheta = \alpha + \theta = \alpha + \operatorname{arctg} \left(\frac{dy}{dx} \right) \quad (4)$$

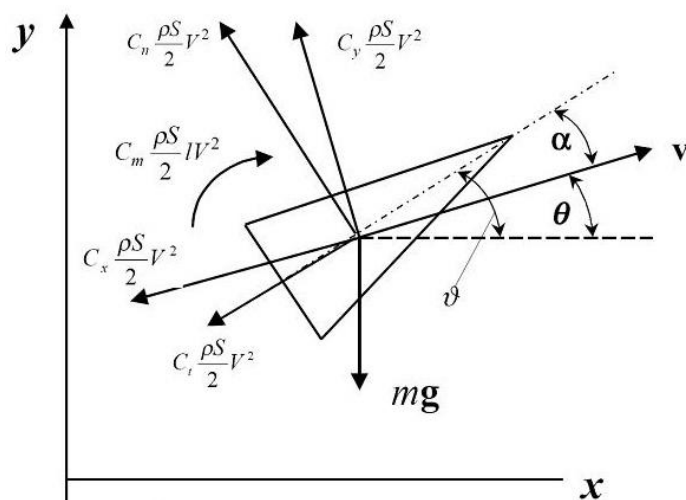


Рис. 2. Система координат, составляющие силы и момент.

Уравнения (1), (2) и (3) описывают соответственно движение центра масс и колебания модели, их дополняет кинематическое соотношение (4).

Система координат, действующие силы и момент, а также кинематическое соотношение (4) поясняются на рис.2. Обозначения приведены в начале текста отчета.

Переходя к производным по продольной координате x [7], приведем уравнения (1)-(3) к виду

$$t'' = k \cdot t' \left(C_x + C_y \cdot y' \right) \cdot \left[1 + (y')^2 \right]^{1/2} \quad (1)$$

$$y'' = k \cdot C_y \left[1 + (y')^2 \right]^{3/2} - (t')^2 \cdot g \quad (2)$$

$$\vartheta'' = k \cdot \left(C_x + C_y \cdot y' \right) \left[1 + (y')^2 \right]^{1/2} \cdot \vartheta' + k \cdot r^{-2} l C_m \cdot \left[1 + (y')^2 \right] \quad (3)$$

Здесь $k = \frac{\rho S}{2m}$; штрихами отмечены производные по продольной координате x .

Отметим, что при выводе уравнений не накладывалось ограничений на зависимости аэродинамических коэффициентов C_x , C_y и C_m от условий движения. Для дальнейшего, однако, существенно, что тело

движется почти горизонтально, то есть, угол $\alpha = \vartheta - \arctg\left(\frac{dy}{dx}\right)$ (между вектором скорости и осью x) -

мал (отсюда термин "продольная координата" - почти вдоль направления движения).

Аэродинамические коэффициенты C_x , C_y и C_m будем считать функциями угла

атаки α , угловой скорости ϑ' и числа Маха M . Зависимостью от числа Рейнольдса, меняющегося пропорционально скорости в одиночном эксперименте, на коротком участке траектории будем пока пренебрегать. Подъемную силу и момент представим в виде суммы статической и динамической составляющих:

$$C_x = C_x(\alpha, M) \quad (5)$$

$$C_y = C_y(\alpha, M) + C_y^{\varpi}(\alpha, M) \cdot \frac{\ell}{V} \cdot \frac{d\vartheta'}{dt} = C_y^{\alpha}(\alpha, M) \cdot \alpha + C_y^{\varpi}(\alpha, M) \cdot \left[1 + (y')^2\right]^{-1/2} \cdot \ell \cdot \vartheta' \quad (6)$$

$$C_m = C_m(\alpha, M) + C_m^{\varpi}(\alpha, M) \cdot \frac{\ell}{V} \cdot \frac{d\vartheta'}{dt} = C_m^{\alpha}(\alpha, M) \cdot \alpha + C_m^{\varpi}(\alpha, M) \cdot \left[1 + (y')^2\right]^{-1/2} \cdot \ell \cdot \vartheta' \quad (7)$$

$$\text{где } \varpi = \frac{d\vartheta'}{dt} \cdot \frac{\ell}{V} = \left[1 + (y')^2\right]^{-1/2} \cdot \vartheta' \cdot \ell$$

В выражении для коэффициента момента (7) мы не учли демпфирующий член, пропорциональный скорости изменения угла атаки, и ограничились зависимостью демпфирования от угловой скорости. Дело в том, что величины углов тангажа и атаки в движении на баллистической трассе отличаются на

малую величину (см.(4)), вследствие чего разделить влияние $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$ и $\omega = \frac{d\vartheta'}{dt}$ не представляется

возможным из-за вырождения модели - соответствующие члены условных и нормальных уравнений метода наименьших квадратов окажутся практически линейно зависимыми. Поэтому в выражении (7) коэффициент C_m учитывает обе вращательных производных - по угловой скорости и по скорости изменения угла атаки.

Перейдем к выбору аппроксимирующих зависимостей на примере коэффициентов момента. Учитывая четность демпфирующего момента и нечетность статического момента как функций угла атаки, представим приближенно их коэффициенты отрезками кратных рядов Тейлора в окрестности нулевого угла атаки и среднего по траектории значения числа Маха, сгруппировав члены следующим образом:

$$C_m^{\varpi}(\alpha, M) = a_1 \cdot (M - M_{cp}) + a_2 \cdot (M - M_{cp})^2 + \sum_{i=1}^L b_i \cdot \alpha^{2i-2} \quad (8)$$

$$C_m^{\alpha} \cdot \alpha = c_1 \cdot (M - M_{cp}) + c_2 \cdot (M - M_{cp})^2 \cdot \alpha + \sum_{i=1}^S d_i \cdot \alpha^{2i-1} \quad (9)$$

Первые слагаемые в (8) и (9) учитывают лишь параболическую зависимость коэффициентов момента от числа Маха; члены, содержащие смешанные произведения степеней угла атаки и числа Маха мы не учитываем, поскольку, как правило, для совместной обработки данных выбираются эксперименты на близких режимах по скорости движения; что же касается изменения числа Маха в каждом из экспериментов, то на относительно коротком участке траектории оно мало. Поэтому квадратичной зависимости от числа Маха окажется вполне достаточно. В записи (9) фактически учитывается зависимость от числа Маха только первых членов b_i и d_i под знаками сумм.

Аналогичный подход мы используем для разложений коэффициентов сопротивления и подъемной силы. Все предыдущее рассмотрение уравнений движения относилось к плоскому движению осесимметричного объекта. Для случая отсутствия массовой симметрии, как уже говорилось в

предыдущем разделе, представление статической составляющей аэродинамического момента следует изменить, выразив ее через моменты составляющих аэродинамической силы следующим образом

$$C_m(\alpha, M) \cdot \ell = -C_n(\alpha, M) \cdot [x_p(\alpha, M) - x_{c.d.}] - C_t(\alpha, M) \cdot y_{c.d.} \quad (10)$$

или ввести постоянную составляющую коэффициента момента (см. (7))

$$C_m(\alpha, M) = C_m(0, M) + C_m^\alpha(\alpha, M) \cdot \alpha \quad (10^*)$$

Оба приема совершенно эквивалентны друг другу.

В выражении (10) C_n и C_t суть коэффициенты нормальной и тангенциальной составляющих аэродинамической силы, $x_p(\alpha, M)$ и $x_{c.d.}$ - осевые координаты центра давления и центра масс,

соответственно, $y_{c.d.}$ - смещение центра масс с оси симметрии формы объекта. Сами коэффициенты нормальной и тангенциальной составляющих аэродинамической силы выражаются через коэффициенты сопротивления и подъемной силы следующим образом

$$C_n = C_x(\alpha, M) \cdot \sin \alpha + C_y(\alpha, M) \cdot \cos \alpha = C_x(\alpha, M) \cdot \sin \alpha + C_y^\alpha(\alpha, M) \cdot \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$C_t = C_x(\alpha, M) \cdot \cos \alpha - C_y(\alpha, M) \cdot \sin \alpha = C_x(\alpha, M) \cdot \cos \alpha - C_y^\alpha(\alpha, M) \cdot \alpha \cdot \sin \alpha \quad (11)$$

В результате уравнение колебаний (3) примет следующий вид

$$\begin{aligned} \mathcal{G}'' = k \cdot [C_x(\alpha, M) + C_y(\alpha, M) \cdot y'] \cdot [1 + (y')^2]^{1/2} \cdot \mathcal{G}' + k \cdot r^{-2} \cdot \ell^2 \cdot [1 + (y')^2]^{1/2} \cdot C_m^\omega \cdot \mathcal{G}' - \\ - k \cdot r^2 \cdot [1 + (y')^2] \cdot \left\{ C_n(\alpha, M) \cdot [x_p(\alpha, M) - x_{c.d.}] + C_t(\alpha, M) \cdot y_{c.d.} \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

Координата центра давления $x_p(\alpha, M)$ является четной функцией угла атаки и по

анalogии с (8) может быть представлена отрезком кратного ряда Тейлора в следующем виде

$$x_p(\alpha, M) = f_1 \cdot (M - M_{cp}) + f_2 \cdot (M - M_{cp})^2 + \sum_{i=1} g_i \cdot \alpha^{2i-2} \quad (13)$$

Уточнив конкретный вид зависимостей аэродинамических коэффициентов от условия движения, $\mathcal{G}'' + f(\alpha, C_m, C_x, C_y) \cdot \mathcal{G}' + h(\alpha, C_m, C_x, C_y) = 0 \quad (14)$

дополнив его кинематическим соотношением

$$\mathcal{G} = \alpha + \psi(\alpha, C_x, C_y) \quad (15)$$

В выражениях (14) и (15) аэродинамические коэффициенты представлены в виде векторов, компонентами которых являются коэффициенты разложений в (8) и (9), поэтому, в соответствии с принятым ранее соглашением, для их обозначений использованы прямые полужирные символы.

Величина $\psi(\alpha, C_x, C_y) = \arctg(y')$ определяется движением центра масс, поэтому

зависимость от \sin выражается здесь неявно через β .

3. О ПОСТРОЕНИИ АЛГОРИТМА ОЦЕНИВАНИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Анализируя взаимосвязь уравнений (1)- (3), убеждаемся, что члены в выражении (3), порождаемые движением центра масс, оказывают слабое влияние на колебания объекта по сравнению с действием аэродинамического момента. Действительно, величина y имеет порядок 0,01, множитель k , как правило, но превосходит $0,01 \text{ м}^{-1}$, в то время как величина $kr^{-2}l$ может иметь порядок $0,1 \text{ м}^{-2}$.

По-этому авторы [2] рассматривали уравнение колебаний изолированно. Что касается уравнений, то каждое из них в первом приближении можно рассматривать самостоятельно, если перед этим были

оценены параметры уравнения (3'), позволяющие описать изменение угла атаки вдоль траектории, и учесть таким образом зависимости $C_x(\bar{b})$ и $C_y(\bar{b})$.

Приведенные соображения позволяют предложить следующий алгоритм оценивания аэродинамических коэффициентов.

1. Задаваясь приближенными осредненными значениями $C_x = \text{const}$, $C'' = \text{const}$ и начальных условий, проводим оценивание первых коэффициентов разложения демпфирующего и статического моментов по аргументам \bar{b} и M . В качестве приближенных значений $C_x = \text{const}$ и $C_y^\alpha = \text{const}$ достаточно выбрать величины из области их возможных реальных значений - такая априорная информация всегда доступна.

(Приемлемое в качестве очередного приближения значение первого члена разложения C_m^α по углу атаки будет найдено, даже если положить $C_y^\alpha = 0$ и $C_x = 0$ - гораздо важнее оценить длину волны

колебаний, чтобы по ней вычислить первое приближение C_m^α).

Величину $y'(x)$ во всех уравнениях (1) - (3), а также величину $t'(x)$ в уравнении (2') находим из решения уравнений (1') и (2') при принятых первых приближениях значений коэффициентов.

Выбор начального приближения $C_m^\alpha = \text{const}$ достаточно осуществить путем определения длины волны колебания по графику $\mathcal{A}(x)$. В качестве $\mathcal{A}(0)$ принимается измеренное значение \mathcal{A} в первой точке регистрации траектории; $\mathcal{A}'(0)$ может быть найдена графически или путем аппроксимации производной конечными разностями, если расстояния между соседними точками регистрации достаточно мало, чтобы верно определить хотя бы знак производной. Аналогичными приемами находим начальные условия для уравнений (1') и (2'). Более подробно о технике построения модели будет сказано ниже.

2. Имея в распоряжении полученную грубую модель движения по тангажу, оцениваем первые коэффициенты выражения, аппроксимирующего подъемную силу, оперируя теперь уравнением (2') и используя решения уравнений (1),(3) как вспомогательные для вычисления текущих значений α, \mathcal{A}, t' . Угол атаки \bar{b} , входящий в выражение подъемной силы, находим интегрированием уравнения (3')

с привлечением соотношения $\alpha = \mathcal{A} - \text{arctg}\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

3. Используя результаты п.1 и 2, оцениваем коэффициент сопротивления с помощью уравнения (1); два других уравнения служат для вычисления текущих значений \bar{b} и y' .

4. Получив оценки коэффициентов подъемной силы и сопротивления, возвращаемся к пункту 1 и находим следующее приближение коэффициентов момента.

Действуя по изложенному алгоритму постепенно наращиваем математическую модель (увеличиваем число членов разложений аэродинамических коэффициентов) до достижения адекватности, о чем более подробно будет сказано ниже.

Такой подход позволяет, применяя на каждом шаге процедуру оценивания лишь к одному из трех уравнений, снизить размерность задачи примерно втрое за счет пренебрежения производными рассматриваемой функции отклика (t, y, \mathcal{A}) по параметрам двух других уравнений. Это обстоятельство положительно сказывается на устойчивости и скорости сходимости решений.

4. ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ

Структурное уравнение рассматриваемой динамической модели может быть представлено в виде:

$$\mathfrak{G}(\eta(x), \frac{d\eta}{dx}, \frac{d^2\eta}{dx^2}, C_m, C_x, C_y) = 0 \quad (16)$$

$$\eta(0) = \eta_0, \quad \dot{\eta}(0) = \dot{\eta}_0 \quad (17)$$

где приняты следующие обозначения:

$\mathfrak{g} = (g_1, g_2, g_3)^T$ — вектор функций - динамические уравнения Эйлера, верхний индекс T - символ транспонирования;

x - независимая переменная - продольная координата центра масс объекта в земной системе координат;

$\eta = (t, y, \vartheta)^T$ - вектор наблюдений (функция отклика) - полетное время, поперечная координата центра масс в земной системе и угол тангажа объекта;

$\mathbf{C}_m = (C_1, C_2, \dots, C_m)^T$, $\mathbf{C}_x = (C_{x1}, C_{x2}, \dots, C_{xm})^T$, $\mathbf{C}_y = (C_{y1}, C_{y2}, \dots, C_{yp})^T$ -- векторы неизвестных параметров разложений аэродинамических коэффициентов.

В силу нелинейности системы уравнений (16) получить приведенную модель движения, то есть явное выражение $\eta = f(x, \mathbf{C}_m, \mathbf{C}_x, \mathbf{C}_y)$ не представляется возможным.

Дальнейшее рассмотрение в общем виде проведем для одной функции - угла тангажа в соответствии с алгоритмом, предложенным в предыдущем разделе, поскольку оценивание параметров придется начинать с уравнения моментов. Необходимые соотношения для двух других функций - полетного времени и поперечной координаты центра масс - могут быть получены аналогично. Выражения для конкретных математических моделей для всех трех уравнений будут получены позже.

Следуя работе [2], оценивание параметров уравнений движения будем проводить минимизируя целевую функцию - сумму квадратов отклонений (в дальнейшем - остатков или невязок) измеренных значений функции отклика от рассчитанных по выбранной математической модели движения. Воспользуемся методом наименьших квадратов (МНК) без взвешивания измерений, поскольку целевая функция при выбранном алгоритме содержит результаты равноточных измерений величин одной размерности:

$$\phi(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^N (\mathcal{G}_{эксн}(x_i) - \mathcal{G}_{мод}(x_i))^2 \quad (18)$$

Здесь $\Phi(\mathbf{c})$ — целевая функция, \mathbf{c} - вектор оцениваемых параметров, включающий теперь (см. п.2) только параметры одного из уравнений - в данном случае - коэффициенты разложений аэродинамического момента; $\mathcal{G}_{эксн}(x_i)$ - результаты измерений

угла тангажа в точках x_i ; $\mathcal{G}_{мод}(x_i)$ - значения угла тангажа, вычисленные по принятой математической модели в тех же точках.

Функция $\mathcal{G}_{мод}(x)$ не может быть получена в явном виде, однако значения $\mathcal{G}_{мод}(x_i)$

можно найти численным интегрированием уравнения (14) с учетом (12) при принятом приближении параметров. В связи с этим введем следующие векторные обозначения.

$\mathcal{G} = (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_N)^T$ - вектор измерений в одном опыте; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ - вектор значений координаты x ;

$\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = (\mathcal{G}_1(x_1, \mathbf{c}), \mathcal{G}_2(x_2, \mathbf{c}), \dots, \mathcal{G}_N(x_N, \mathbf{c}))^T$ - вектор вычисленных значений функции отклика в

точках x_i при выбранном приближении вектора коэффициентов \mathbf{c} . Тогда можно записать

$$\mathcal{G} = \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) + \boldsymbol{\xi} \quad (19)$$

где $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)^T$ - вектор остатков.

Для адекватной математической модели нормальное распределение остатков имеет вид $\boldsymbol{\xi} \sim N(0, \sigma_g^2 \cdot \mathbf{I})$ с нулевым математическим ожиданием и однородной

дисперсией σ_g^2 в точках измерения, \mathbf{I} - единичная матрица (дисперсионная матрица $\sigma_g^2 \cdot \mathbf{I}$ является диагональной при независимых некоррелированных измерениях).

Теперь целевая функция запишется в виде

$$\phi(\mathbf{c}) = \boldsymbol{\xi}^T \cdot \boldsymbol{\xi}, \quad (20)$$

а оценки параметров \mathbf{c} находят из условия локального минимума целевой функции

$$\hat{\mathbf{c}} = \arg \min_{\mathbf{c}} (\boldsymbol{\xi}^T \cdot \boldsymbol{\xi}) = \arg \min_{\mathbf{c}} \left[(\mathcal{G} - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{c}))^T \cdot (\mathcal{G} - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{c})) \right]$$

Между скобками, заключающими сомножители, в отличие от скобок, которые выражают функциональную зависимость, будем ставить знак произведения - точку.

Отметим, что значения независимой переменной мы предполагаем известными точно. Для относительно медленно меняющихся функций \mathcal{G} и y это допущение не требует никаких дополнительных шагов. Что касается времени полета, то это приведет к тому, что на оценку дисперсии остатков будут влиять как дисперсия измерения времени, так и дисперсия координаты x . К этому вопросу мы вернемся при обсуждении адекватности модели и значимости параметров.

Как и в [7], для минимизации нелинейной по параметрам целевой функции (20) применим метод Гаусса-Ньютона, использующий линеаризацию функции отклика в виде

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_0) + \mathbf{p} \cdot \Delta \mathbf{c} \quad (21)$$

Здесь $\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ - вектор значений функции отклика, $\Delta \mathbf{c} = (\Delta c_1, \Delta c_2, \dots, \Delta c_m)^T$,

$\Delta c_j = c_j - c_{0j}$, $j = 1, 2, \dots, m$ c_{0j} - начальное приближение параметра, \mathbf{P} - матрица

первых производных функции отклика по искомым параметрам во всех точках плана эксперимента

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial \mathcal{G}(x_1, \mathbf{c})}{\partial c_1} \right|_{c_0} & \left. \frac{\partial \mathcal{G}(x_1, \mathbf{c})}{\partial c_2} \right|_{c_0} & \dots & \left. \frac{\partial \mathcal{G}(x_1, \mathbf{c})}{\partial c_m} \right|_{c_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left. \frac{\partial \mathcal{G}(x_N, \mathbf{c})}{\partial c_1} \right|_{c_0} & \left. \frac{\partial \mathcal{G}(x_N, \mathbf{c})}{\partial c_2} \right|_{c_0} & \dots & \left. \frac{\partial \mathcal{G}(x_N, \mathbf{c})}{\partial c_m} \right|_{c_0} \end{pmatrix} \quad (22)$$

В выражениях (21) и (22) нижний индекс 0 отмечает начальные приближения искомых параметров, Δc_j - поправки к начальным значениям параметров, обеспечивающие лучшие приближения; частные производные, являющиеся элементами матрицы (22), вычисляются при начальных приближениях искомых параметров.

Теперь можем переписать (18) и (20) в виде

$$\phi(\mathbf{c}) = \left(\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_0) - \mathbf{p} \cdot \Delta \mathbf{c} \right)^T \cdot \left(\tilde{\mathcal{G}} - \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_0) - \mathbf{p} \cdot \Delta \mathbf{c} \right), \quad (23)$$

Выражение (23) подобно остаточной сумме квадратов для линейной регрессии: роль матрицы значений независимых переменных (матрицы плана) выполняет матрица частных производных \mathbf{P} (пока неизвестных), а роль измеренных значений функции отклика играют величины остатков $\tilde{\mathcal{G}} - \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_0)$,

вычисленных в точке \mathbf{c}_0 .

Разложением (21) задача сведена к линейной, однако, в силу приближенности (21) нахождение оценок

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_0 + \Delta \mathbf{c} \quad (24)$$

не позволяет найти минимум выражения (23) за один шаг, как это имеет место при оценке параметров линейной регрессии. Тем не менее, то обстоятельство, что итерационный алгоритм Гаусса-Ньютона представляет собой последовательность линейных регрессионных задач [8], будет использовано в дальнейшем при оценке доверительных интервалов искомых параметров. Однако, прежде необходимо найти неизвестную матрицу \mathbf{P} .

5. УРАВНЕНИЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Элементы матрицы частных производных (22) могут быть найдены из так называемых уравнений чувствительности, получающихся при дифференцировании исходного уравнения движения (в данном случае (14)) по искомым параметрам.

Введем дополнительные одноиндексные обозначения. Столбцы матрицы \mathbf{P} , содержащие производные по j -ому искомому параметру во всех точках x_i , обозначим через

$$\mathbf{p}_j(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = \left(p_j(x_1, \mathbf{c}), p_j(x_2, \mathbf{c}), \dots, p_j(x_N, \mathbf{c}) \right)^T \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{G}(x_1, \mathbf{c})}{\partial c_j}, \frac{\partial \mathcal{G}(x_2, \mathbf{c})}{\partial c_j}, \dots, \frac{\partial \mathcal{G}(x_N, \mathbf{c})}{\partial c_j} \right)^T \equiv \frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{c})}{\partial c_j}$$

(25)

К числу оцениваемых параметров следует отнести и начальные условия вида (17), для которых по аналогии с (25) запишем

$$\mathbf{p}_{g_0}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = \frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{c})}{\partial g_0}, \quad \mathbf{p}_{g'_0}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = \frac{\partial \mathcal{G}'(\mathbf{x}, \mathbf{c})}{\partial g'_0} \quad (26)$$

Кроме того, в соответствии с алгоритмом, изложенным в разделе 3, будем считать, что

$$\frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{c})}{\partial c_{xj}} \equiv \frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{c})}{\partial c_{yj}} \equiv 0 \quad (27)$$

И, наконец, примем допущение, что

$$\frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{c})}{\partial c_j} \equiv \frac{\partial \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{c})}{\partial c_j} \quad (28)$$

Выражение (28) получено из (4) при пренебрежении производными по искомым параметрам от величины y' , которая сама по себе мала по сравнению с a (вообще говоря, y' зависит от c_j через угол атаки, см.(19)).

Теперь, дифференцируя уравнение (14) по всем оцениваемым параметрам и учитывая, что

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial c_j} = p_j, \quad \frac{\partial \mathcal{G}'}{\partial c_j} = p'_j, \quad \frac{\partial \mathcal{G}''}{\partial c_j} = p''_j \quad (29)$$

можем записать уравнения чувствительности:

$$p''_j + f \cdot p'_j + \left(g' \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial h}{\partial \alpha} \right) \cdot p_j \equiv g' \cdot \frac{\partial f}{\partial c_j} + \frac{\partial h}{\partial c_j}, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (30)$$

$$p''_{g_0} + f \cdot p'_{g_0} + \left(g' \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial h}{\partial \alpha} \right) \cdot p_{g_0} = 0 \quad (31)$$

$$p''_{g'_0} + f \cdot p'_{g'_0} + \left(g' \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial h}{\partial \alpha} \right) \cdot p_{g'_0} = 0 \quad (32)$$

Функции f и h определены в (14). Начальные условия для уравнений чувствительности имеют вид:

$$p_j(0) = 0, \quad p'_j(0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$p_{g_0}(0) = 1, \quad p'_{g_0}(0) = 0, \quad (33)$$

$$p_{g'_0}(0) = 0, \quad p'_{g'_0}(0) = 1$$

Решая численно уравнения чувствительности совместно с уравнением (14), найдем компоненты векторов (25), (26) являющихся столбцами матрицы \mathbf{P} .

6. СИСТЕМА НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МНК И ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ

Нормальные уравнения метода наименьших квадратов (МНК) составим, дифференцируя целевую функцию (14) по искомым параметрам и приравнивая полученные выражения нулю (условия локального минимума функции). Получающаяся система линейных алгебраических уравнений имеет вид:

$$\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{p} \cdot \Delta \mathbf{c} = \mathbf{p}^T \cdot (\tilde{\mathcal{G}} - \bar{\mathcal{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_0)) \quad (34)$$

В случае невырожденной матрицы \mathbf{P} система (34) имеет единственное решение

$$\Delta \mathbf{c} = (\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{p})^{-1} \cdot \mathbf{p}^T \cdot (\tilde{\mathcal{G}} - \bar{\mathcal{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_0)) \quad (35)$$

которое однозначно определяет вектор поправок $\Delta \mathbf{c}$, обеспечивающий лучшее соответствие модели результатам наблюдений по сравнению с исходным приближением неизвестных параметров \mathbf{c}_0 . Итерационный процесс отыскания минимума целевой функции строится следующим образом:

$$\mathbf{c}^{(t+1)} = \mathbf{c}^{(t)} + \left[\mathbf{p}(\mathbf{c}^{(t)})^T \cdot \mathbf{p}(\mathbf{c}^{(t)}) \right]^{-1} \cdot \mathbf{p}(\mathbf{c}^{(t)})^T \cdot (\tilde{\mathcal{F}} - \bar{\mathcal{F}}(x, \mathbf{c}^{(t)})) \quad (36)$$

где t - номер итерации, \mathbf{c} с верхним индексом в скобках - очередное приближение вектора искомых параметров.

Алгоритм (36) обладает максимальной скоростью сходимости. В большинстве случаев он хорошо работает, благодаря относительно слабым нелинейностям аэродинамических характеристик и достаточно надежной информации о начальном приближении параметров. Однако, большая скорость сходимости при сильной нелинейности (например, в случаях потери статической устойчивости объекта)

иногда приводит к расходимости итерационного процесса, поскольку вычисляемые поправки $\Delta \mathbf{c}^t$ могут давать новые значения $\Delta \mathbf{c}^{(t+1)}$ далеко выходящие за область справедливости линейного приближения (21). В этих случаях (при малом запасе статической устойчивости объекта), используем алгоритм Хартли:

$$\mathbf{c}^{(t+1)} = \mathbf{c}^{(t)} + \gamma \cdot \Delta \mathbf{c}^{(t)}, \quad (37)$$

где $\Delta \mathbf{c}^t$ решение уравнений (34), а γ - параметр, регулирующий длину шага ($0 < \gamma < 1$). Приемлемая величина γ выбирается оператором в интерактивном режиме при наблюдении за ходом вычислений.

7. ОЦЕНКА ЗНАЧИМОСТИ ПАРАМЕТРОВ РАЗЛОЖЕНИЙ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Исходное число параметров разложений аэродинамических коэффициентов -компонент вектора \mathbf{c} - выбирается на основании априорных сведений об объекте и, может быть, из интуитивных соображений. После получения первичных оценок параметров предстоит дать ответ на два вопроса:

- все ли найденные параметры оказались значимыми (т. е. значимо отличающимися от нуля);
- является ли принятая модель адекватной с точки зрения качества описания результатов измерений.

Поскольку адекватная модель может (без нарушения адекватности) содержать незначимые коэффициенты, вначале предстоит ответить на первый вопрос, а уж затем проверять адекватность.

Для проверки гипотезы о значимости найденных параметров необходимо оценить доверительный интервал рассматриваемого параметра и сопоставить его величину со значением параметра: если доверительный интервал включает нулевое значение параметра, параметр следует признать незначимым.

Наиболее общим приемом оценки доверительных интервалов для искомых параметров нелинейной модели является метод статистического моделирования (метод Монте-Карло, о его применении к рассматриваемой задаче будет сказано ниже). Однако он требует относительно много машинного времени и в этом смысле неудобен для оперативной оценки значимости в ходе построения математической модели. Для этой цели мы использовали то, уже упоминавшееся обстоятельство, что процедура оценивания Гаусса-Ньютона представляет собой последовательность линейных регрессионных задач. Отсюда следует, что приемы оценивания дисперсии параметров регрессии могут дать приемлемые оценки доверительных интервалов для искомых параметров как в ходе итерационного процесса, так и, в особенности, на его заключительных этапах, когда поправки к коэффициентам становятся пренебрежимо малыми и линейное приближение (21) справедливо в рассматриваемой малой окрестности решения. Правда, в отличие от линейной регрессии, в данном случае ищутся не сами параметры регрессии, а поправки к параметрам. Но что означает погрешность, с которой мы можем указать пренебрежимо малую поправку к параметру? Она отождествляется с погрешностью самого параметра.

Приведенные соображения, разумеется, не являются строгим доказательством правомерности дальнейших действий, однако их практическая значимость многократно проверена путем сопоставления с оценками, полученными методом Монте-Карло.

Итак, сохраняя терминологию, применяемую при оценивании дисперсии и значимости коэффициентов линейной регрессии, будем использовать для отыскания статистических характеристик оценок параметров модели дисперсионную матрицу, построенную по матрице частных производных

$$\mathbf{D} = (\mathbf{p}^\delta \cdot \mathbf{p})^{-1} \quad (38)$$

Тогда дисперсии оцениваемых параметров находятся с использованием диагональных элементов матрицы \mathbf{D} и оценки дисперсии функции отклика следующим образом:

$$S_{c_j}^2 \equiv S_{\Delta c_j}^2 = D_{jj} \cdot S_g^2 = \frac{(\tilde{g} - \bar{g}(\mathbf{x}, \mathbf{c}))^T \cdot (\tilde{g} - \bar{g}(\mathbf{x}, \mathbf{c}))}{N - M} \cdot D_{jj} \quad (39)$$

где S^2 - оценки дисперсий величин, отмеченных нижним индексом, причем дисперсия угла тангажа оценивается по остаточной сумме квадратов остатков; N - общее число измерений угла тангажа, M - число оцениваемых параметров.

Попутно рассмотрим оценки дисперсий зависимостей коэффициентов от угла атаки и числа Маха на примере коэффициента момента. Запишем выражение коэффициента полного аэродинамического момента, объединяя формулы (8) и (9), в векторном виде:

$$C_m = [\boldsymbol{\varphi}(M, \alpha) + \mathbf{f}(M, \alpha)]^T \cdot \mathbf{c} \quad (40)$$

где

$$\boldsymbol{\varphi}(M, \alpha) = \left[(M - M_{\bar{n}\delta}), (M - \dot{I}_{\bar{n}\delta})^2, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^L \right]^T,$$

$$\mathbf{f}(M, \alpha) = \left[(M - M_{\bar{n}\delta})\alpha, (\dot{I}_{\bar{n}\delta})^2 \alpha, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^S \right]^T,$$

$$\mathbf{c} = (a_1, a_2, b_1, b_2, \dots, b_L, c_1, c_2, d_1, d_2, \dots, d_s)^T$$

Тогда при известной дисперсионной матрице вектора \mathbf{c} из свойства линейного преобразования следует

$$S_{c_m}^2 = [\boldsymbol{\varphi}(M, \alpha) + \mathbf{f}(M, \alpha)]^T \cdot \mathbf{D} \cdot S_g^2 \cdot [\boldsymbol{\varphi}(M, \alpha) + \mathbf{f}(M, \alpha)] \quad (41)$$

Интересующие нас оценки дисперсий функций (8) и (9) в отдельности даются скалярными выражениями:

$$S_{c_m^{\bar{\omega}}}^2 = \sum_i \sum_j D_{ij} \cdot \alpha^{2i-2} \cdot \alpha^{2j-2} \cdot S_g^2 \quad (42)$$

$$S_{c_m^{\alpha}}^2 = \sum_k \sum_{\ell} D_{k\ell} \alpha^{2k-1} \cdot \alpha^{2\ell-1} \cdot S_g^2 \quad (43)$$

где суммирование ведется по индексам элементов дисперсионной матрицы, которые (индексы) соответствуют коэффициентам разложений (8) и (9).

Правомерность применения аппарата линейного оценивания в данном случае может быть проверена прямым вычислением дисперсий и ковариаций по элементам выборки, полученной статистическим моделированием, что мы и делали на заключительном этапе построения модели движения.

Предполагая, что не только результаты прямых измерений, но и компоненты вектора оцениваемых параметров распределены нормально (полученные при этом предположении результаты также могут быть проверены статистическим моделированием), проведем оценку доверительных интервалов параметров c_j , с помощью критерия Стьюдента. Величина

$$t = \frac{c_j - \bar{c}_j}{S_{c_j}} \quad (44)$$

где \bar{c}_j - неизвестное истинное значение коэффициента, c_j - его полученная оценка, а S_{c_j} - оценка среднеквадратичного отклонения (см.(41)) подчиняется распределению Стьюдента с $N - m$ степенями свободы. Для заданной доверительной вероятности $p = P\{|t| < t_{crit}\}$ (вероятность того, что модуль отклонения искомой величины меньше среднеквадратичного отклонения умноженного на квантиль статистического распределения с определенным уровнем значимости) с помощью таблицы распределения Стьюдента находим $t_{crit} = t_{crit}(p)$.

Литература

- 1 Костров А.В. Измерения и идентификация движения. М. Министерство обороны СССР, 1986.
- 2 Костров А.В., Шатило А.М. Модельно экспериментальные методы определения аэромеханических характеристик летательных аппаратов на баллистических трассах. М. Министерство обороны СССР, 1982.

- 3 Герасимов С.И., Файков Ю.И., Холин С.А. Кумулятивные источники света. Саров. РФЯЦ-ВНИИЭФ, изд.2, 2012
4. Лобанов А. Н., Бруевич П. Н. Наземная стереофотограмметрическая съемка. — «Итоги науки. Геодезия и аэросъемка». М., ВИНТИ АН СССР, 1975.
5. Мельников А. А. Фотограмметрический метод определения пространственных координат. — В сб.: «Приборы точной механики и технологии приборостроения», Вып. 2. М., 1972.
6. Менде Н.П. Об одном методе определения нелинейных аэродинамических сил и моментов. В сб: Физико-газодинамические баллистические исследования. Под ред. Г.И. Мишина –Л. «Наука», 1980, с.200-224
7. Chapman G.T., Kirk D.B. A method for extracting aerodynamic coefficients from free-flight data AAIA Journal, 4, 1970, pp/182-188
8. Менде Н.П. Обратная задача нелинейной баллистики. Плоское движение. Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе. Препринт 1326, 1989,