

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ и НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Саровский физико-технический институт-филиал НИЯУ МИФИ

Физико-технический факультет

Кафедра теоретической и экспериментальной механики

Речкин В.Н., Вяткин Ю.А.

Теория пластичности и ползучести

Лекции для студентов
по направлению подготовки 15.04.03 «Прикладная механика»

УТВЕРЖДЕНО
на Заседании кафедры ТиЭМ
Зав. кафедрой ТиЭМ

_____ А.Л. Михайлов

Научно-методическим советом СарФТИ,
д. ф.-м. н.

_____ А.П. Скрыпник

Саров
2016 г

Речкин В.Н., Вяткин Ю.А. Теория пластичности и ползучести. Лекции для студентов. СарФТИ НИЯУ МИФИ, 2016. – 26 с.

Учебное пособие содержит лекционные материалы по курсу «Теория пластичности и ползучести» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 15.04.03 «Прикладная механика». Представленные материалы являются продолжением изложения курса «Основы теории пластичности и ползучести» и раскрывают основные положения теории пластичности и предельного состояния материалов для условий циклического нагружения конструкций. Приводится краткое описание численных алгоритмов и особенностей технологии математического моделирования упругопластического деформирования материалов в отечественном пакете программ ЛОГОС на основе метода конечных элементов.

Документ может быть также полезен студентам при изучении дисциплины «Вычислительная механика», а также аспирантам и инженерам, занимающимся расчетами прочности конструкций.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ И НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ	4
Упругопластические свойства материалов при многократном нагружении в условиях одноосного НДС	4
Методы расчетной оценки малоциклового усталостной долговечности материалов	7
Пределное состояние материалов при циклическом упругопластическом деформировании	10
Особенности расчетного анализа циклической пластичности материалов в условиях сложного напряженного состояния	12
МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ В ПП ЛОГОС	13
Постановка задач	13
Общая формулировка модели деформируемого материала с физической нелинейностью	14
Особенности моделирования упругопластического деформирования	16
Учет эффектов ползучести материалов	18
Алгоритмы реализации основных физических соотношений	20
Метод Ньютона-Рафсона решения системы нелинейных уравнений	21
Адаптивный метод пошагового нагружения для обеспечения сходимости итерационного процесса	23
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	25

Лекция №1

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ И НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Уравнения, законы и теории для описания нелинейного деформирования материалов, изученные в курсе “Основы теории пластичности и ползучести”, справедливы для расчета элементов конструкций, работающих в упругопластической области *при статическом однократном нагружении*. Но достаточно часто внешние силы прикладываются к элементам конструкций многократно (циклически), в том числе с изменением знака. При таких условиях нагружения для анализа прочности конструкций применяются специальные расчетные методы и учитывается изменение свойств материалов.

Упругопластические свойства материалов при многократном нагружении в условиях одноосного НДС

При работе конструкций в условиях многократного нагружения происходит изменение механических свойств материалов в зависимости от числа циклов нагружения. В качестве примера на рис. 1 показано изменение предела пропорциональности в зависимости от числа циклов нагружения k (1-алюминиевый сплав Д16Т, 2 – сталь 30ХГСА) при циклическом изменении напряжений с амплитудой, равной пределу текучести [1]. Следовательно, для разработки методов расчета элементов конструкций, работающих в условиях многократных нагружений, необходимо в первую очередь знать законы изменения механических характеристик их материалов. **Наиболее важной характеристикой являются диаграммы циклического деформирования (петли гистерезиса).** Такие диаграммы, полученные после нескольких десятков циклов нагружения образцов из теплоустойчивой стали при $\Delta\sigma = \text{const}$ (мягкое нагружение), показаны на рис. 2, а при $\Delta\varepsilon = \text{const}$ (жесткое нагружение) – на рис. 3 [1]. Диаграммы циклического деформирования при мягком нагружении позволяют получить кинетику деформаций для определения деформационных свойств материала при циклическом нагружении, а при жестком – кинетику напряжений.

По характеру изменения свойств при многократном упругопластическом нагружении материалы разделяются на три основных типа: циклически стабильные, циклически упрочняющиеся и циклически разупрочняющиеся. Циклически стабильными называются материалы, у которых сопротивление многократному упругопластическому деформированию не зависит от числа циклов нагружения. Для таких материалов модуль упругости, предел пропорциональности и предел текучести не зависят от количества циклов нагружения. У циклически упрочняющихся материалов сопротивление упругопластическому деформированию возрастает с ростом числа циклов нагружения, а у циклически разупрочняющихся – уменьшается. Однако,

циклическая стабильность, упрочнение и разупрочнение скорее являются этапами деформирования, а не характеристиками материала в целом.

На характер процесса циклического деформирования существенное влияние оказывает состояние материала, скорость деформаций, температура, форма цикла и др. факторы.

Рассмотрим диаграмму деформирования при реверсивном нагружении (рис. 4) [1]. Диаграмма исходного деформирования – ОАС. После достижения в исходном нагружении деформации ϵ^0 выполняется разгрузка и реверсивное нагружение QDL. Разгрузка из состояния L приводит к незамкнутой петле гистерезиса. В соответствии с эффектом Баушингера происходит уменьшение предела пропорциональности.

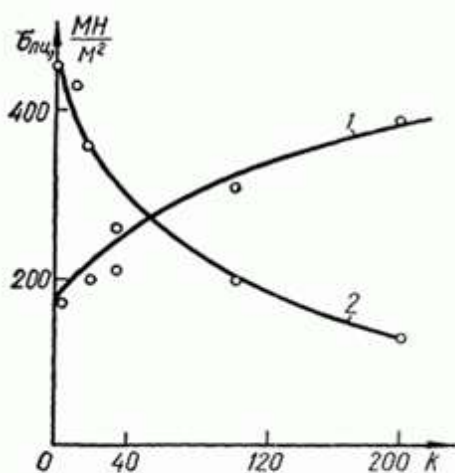


Рис. 1

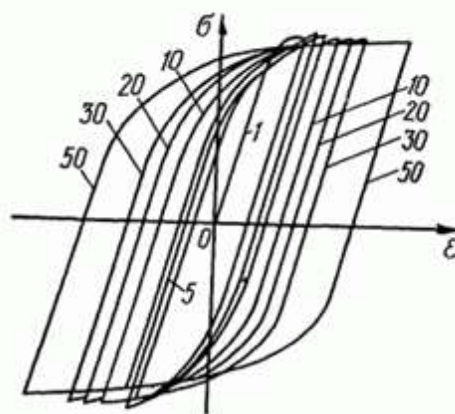


Рис. 2

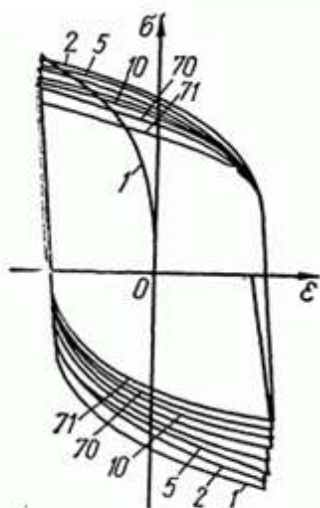


Рис. 3

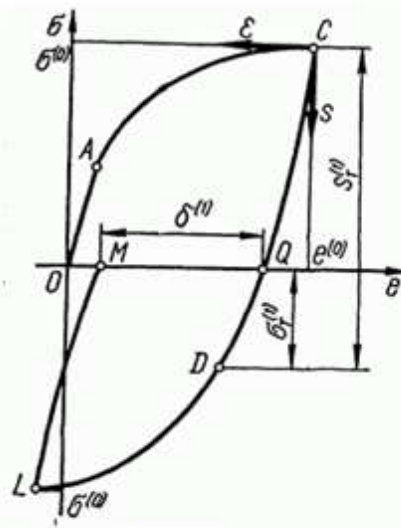


Рис. 4

Таким образом, мы видим, что с увеличением числа циклов нагружения будет происходить изменение формы и размеров петли гистерезиса. Схемы возможных изменений деформаций в процессе циклического нагружения в зависимости от числа циклов показаны на рис. 5 [1]. Схема, показанная на рис. 5а, характерна для циклически упрочняющихся материалов, когда ширина петли с ростом числа циклов уменьшается. В

этом случае деформация стремится к некоторой предельной величине, которая остается постоянной вплоть до образования усталостных трещин. Схема на рис. 5б характерна для циклически стабильных материалов, когда ширина петли в каждом цикле остается неизменной. Если в четном и нечетном полуциклах ширина петель различается, то наблюдается непрерывное одностороннее накопление деформаций и интенсивность процесса перед разрушением возрастает. Схема, приведенная на рис. 5в, характерна для циклически разупрочняющихся материалов, когда ширина петли с ростом числа циклов увеличивается и возрастает полная деформация, причем накопление деформаций может происходить по обоим направлениям действия нагрузки.

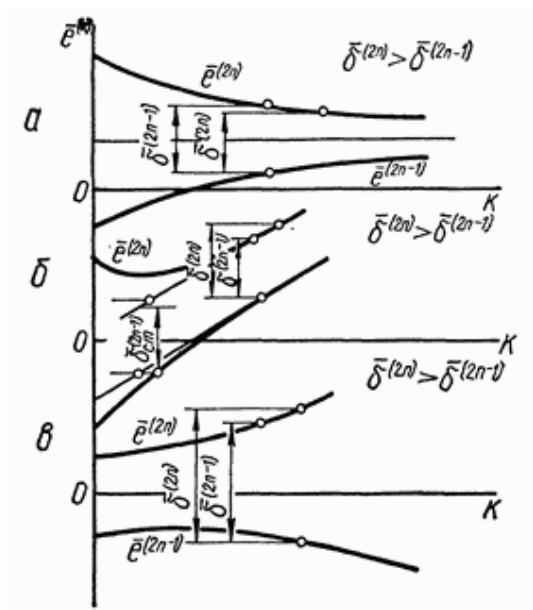


Рис. 5

При исследовании взаимосвязи между шириной петли гистерезиса и числом симметричных полуциклов при заданной амплитуде напряжений была установлена следующая зависимость [1]:

$$\delta^{(k)} = \varepsilon_p^{(k)} - \varepsilon_p^{(k-1)} = \frac{A}{(k-1)^\alpha} (\varepsilon^{(1)} - \varepsilon_r), \quad (1)$$

где k – номер полуцикла;

$\varepsilon^{(1)}$ – деформация при 1-м нагружении;

A, α – постоянные материала.

$\alpha > 0$ для циклически упрочняющихся материалов,

$\alpha < 0$ для циклически разупрочняющихся материалов.

Сопротивление материалов многократному циклическому деформированию изменяется и с увеличением температуры. Изменение ширины петли гистерезиса в зависимости от числа циклов при разных температурах показано на рис. 6 (1-20°, 2-350°, 3-550°, 4-20°, 5-250°, 6-500°, 7-700°C) [1]. Из рис. видно, что аустенитная сталь 1X18H9T упрочняется (4-7), а теплоустойчивая сталь разупрочняется (1-3).

При любом полуцикле ширину петли можно вычислить, например, по формулам [1]:

для стали 1X18H9T

$$\delta^{(k)} = A \left[f \left(\frac{s}{2} \right) - \frac{s_r^{(1)}}{2} \right] \frac{1}{k^\alpha} \quad (2)$$

для

теплоустойчивой
стали

$$\delta^{(k)} = A \left[f \left(\frac{s}{2} \right) - \frac{s_r^{(1)}}{2} \right] \exp [\beta (k-1)] \quad (3)$$

где k – число полуциклов,

$A, \alpha, \beta, S_r^{(1)}$ – параметры обобщенной диаграммы циклического деформирования.

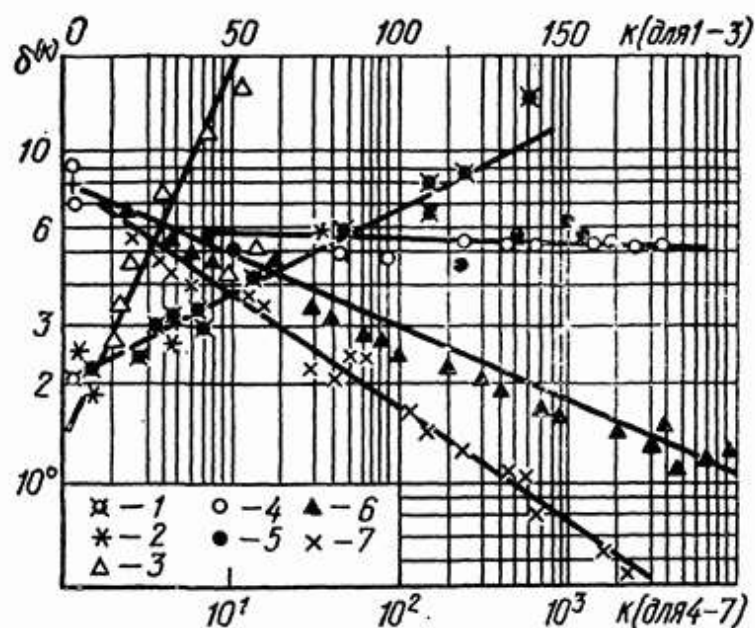


Рис. 6

При температурах до 400°C указанные параметры не изменяются. При более высоких температурах происходит возрастание параметров α , β . Они зависят от степени исходного деформирования и определяются по формулам

$$\alpha = B \left(\frac{s}{2} - \frac{s_r^{(1)}}{2} \right);$$

$$\beta = C \left[f \left(\frac{s}{2} \right) - \frac{s_r^{(1)}}{2} \right], \quad (4)$$

где B и C – коэффициенты, определяемые экспериментально.

Лекция №2

Методы расчетной оценки малоциклового усталостной долговечности материалов

Расчетную оценку малоциклового (менее 10^4 циклов) усталостной долговечности изделий в условиях упругопластического деформирования можно с приемлемой точностью выполнить на основе различных уравнений. При этом для материала(ов) исследуемого изделия необходимо располагать достаточным количеством констант и материальных функций, определяемых в основном экспериментально.

Из научно-технической литературы [2-8] видно, что в прикладных расчетах используется более десяти различных уравнений для оценки долговечности деталей при циклическом неизотермическом упругопластическом деформировании. Классифицируя критерии и уравнения малоциклового усталости по характеру используемых в них параметров повреждения и физико-механических характеристик материала, принято разделять их на силовые, деформационные и энергетические. Однако, в последнее

время многие исследователи отдают предпочтение второй группе уравнений и критериев, связанной с учётом изменения полных упругопластических или только пластических деформаций в наиболее нагруженных зонах деталей. Среди наиболее распространенных зависимостей такого типа можно отметить уравнения Коффина, Мэнсона, Лэнджера, Стоуэла, Конвея и др., которые разработаны в основном для случаев знакопеременного упругопластического деформирования и связывают число циклов до образования макроскопических трещин с величинами пластической и упругой деформации за цикл, а также с некоторыми механическими характеристиками материала.

Соотношение между долговечностью и пластической деформацией за цикл для случая термической усталости в области малых долговечностей впервые предложено Мэнсоном [2] в виде

$$\Delta \varepsilon_{пл} = M(N_p)^z, \quad (5)$$

где $\Delta \varepsilon_{пл}$, N_p - размах пластических деформаций и количество циклов до образования усталостных трещин;

M , z - константы материала, определяемые экспериментально.

Это соотношение подтверждено Коффином не только для термической усталости, но и для случая **жесткого нагружения** материала механической нагрузкой и записано в виде

$$\Delta \varepsilon_{пл} = \frac{1}{4} \ln \frac{1}{1-\psi} N^{-m}. \quad (6)$$

Соотношение (6), известное, как уравнение Коффина-Мэнсона, удовлетворительно описывает взаимосвязь долговечности и циклической пластической деформации только в условиях знакопеременного деформирования **при жестком нагружении** в области малых чисел циклов, когда разрушение определяет пластическая составляющая деформации ($N_p < 10^3$). При малоцикловой долговечности более 10^4 циклов упругая составляющая деформации играет важную роль, и поэтому уравнение (6) может использоваться, если его запись выполнена в размахах полной деформации.

Для полной деформации используется зависимость

$$\Delta \varepsilon = \frac{1}{4} \ln \frac{1}{1-\psi} N^{-m} + \frac{\sigma_{-1}}{E} N_0^\mu N^{-\mu}. \quad (7)$$

где 2-е слагаемое соответствует упругой составляющей деформации, вызывающей повреждение от усталости;

σ_{-1} – предел усталости при базовом числе циклов N_0 ;

ψ – относительное поперечное сужение при разрыве;

m и μ – постоянные, обычно $m = 0,5$ и $\mu = 0,1 - 0,15$.

В некоторых случаях целесообразно использовать упрощенное описание закономерностей усталостного и квазистатического разрушения соответственно при жестком и мягком нагружениях.

(7) для условий жесткого нагружения можно записать в виде

$$\Delta \varepsilon = \frac{1}{4} \ln \frac{1}{1-\psi} N^{-m} + \frac{\sigma_{-1}}{E}. \quad (8)$$

а для условий мягкого нагружения

$$\Delta \varepsilon_0 = \frac{1}{4} \ln \frac{1}{1-\psi_B} N^{-m_1} + \frac{\sigma_{-1}}{E}, \quad (9)$$

где $\Delta \varepsilon_0$ - деформация нулевого полуцикла,

ψ_B – относительное поперечное сужение, соответствующее достижению предела прочности;

m_1 – показатель степени, зависящий от отношения $\sigma_{0,2}/\sigma_B$.

(9) описывает как квазистатическое, так и усталостное разрушение **при мягком нагружении**.

Для случая асимметричного цикла (9) преобразуется к виду

$$\Delta \varepsilon_0 = \frac{1}{4} \ln \frac{1}{1-\psi_B} \frac{1-r}{2} N^{-m_2} + \frac{\sigma_{-1}}{E} \frac{1}{1-\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B} \frac{1+r}{1-r}}. \quad (10)$$

где $r = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$ – коэффициент асимметрии,

$$m_2 = m_1 \frac{1-r}{2}.$$

Мэнсон также разработал расчётную зависимость, которая описывает взаимосвязь между амплитудой полной деформации и циклической долговечностью с учетом влияния упругой и пластической составляющих деформаций [6]. Предложенный им подход предполагает, что наклон, так называемых, упругой и пластической линий в двойных логарифмических координатах

$$\lg \frac{\Delta \varepsilon_y * E}{\sigma_e} - \lg N_p, \quad \lg \frac{\Delta \varepsilon_{nl}}{\left(\ln \frac{1}{1-\psi} \right)^{0.6}} - \lg N_p$$

одинаков для всех материалов и равен соответственно для упругой и пластической линий - 0.12 и - 0.6. Этот вывод подтвержден экспериментально на 29 металлах и сплавах. Основываясь на этом факте, он разработал метод универсальных наклонов, в соответствии с которым уравнение для расчёта малоциклового долговечности с учётом полной деформации за цикл имеет вид

$$\varepsilon_a = 1,75 \cdot \frac{\sigma_s}{E} \cdot N_p^{-0.12} + \frac{1}{2} \cdot \left[\ln \left(\frac{1}{1-\psi} \right) \right]^{0.6} \cdot N_p^{-0.6} \quad (11)$$

При асимметричных циклах нагружения, в том числе и пульсирующих, уравнение (11) принимает вид

$$\varepsilon_a = 1,75 \cdot \frac{\sigma_s - \sigma_m}{E} \cdot N_p^{-0.12} + \frac{1}{2} \cdot \left[\ln \left(\frac{1}{1-\psi} \right) \right]^{0.6} \cdot N_p^{-0.6}, \quad (12)$$

где ε_a – амплитуда полной деформации за цикл;

σ_m – среднее напряжение цикла;

σ_s – предел прочности материала при статическом растяжении;

E – модуль упругости;

ψ – относительное сужение площади поперечного сечения образца при растяжении.

Недостатком данного уравнения является то, что при очень больших долговечностях напряжения, соответствующие пределу усталости, приближаются к нулю, а это для материалов, имеющих физический предел усталости, не соответствует действительности. В работе [6] отмечается, что в диапазоне нормальных температур уравнение (12) дает хорошее соответствие с экспериментом. Проверка применимости данного уравнения для циклического нагружения по отнулевым циклам при повышенных температурах показала, что в области малоциклового усталости наблюдается небольшое расхождение между экспериментом и расчетом в связи с влиянием реверсивной ползучести.

Лекция №3

Предельное состояние материалов при циклическом упругопластическом деформировании

Рассмотренные выше методы расчетной оценки усталостной долговечности применяются обычно только для **жесткого** циклического нагружения материалов и реже для мягкого нагружения циклически упрочняющихся и циклически стабильных материалов. При жёстком нагружении разрушение материалов может быть только усталостным с образованием трещин.

Как отмечалось выше, циклическое деформирование при мягком нагружении характеризуется в общем случае только изменением ширины петли упругопластического гистерезиса и односторонним накоплением пластической деформации; при жестком нагружении – контролируются напряжения, т.к. они изменяются от цикла к циклу. Таким образом, при анализе предельного состояния

материалов необходимо учитывать влияние кинетики напряжения и деформации в зависимости от условий нагружения.

При мягком циклическом нагружении материалов могут реализоваться два типа разрушения, наблюдаемые экспериментально при растяжении-сжатии в упругопластической области: усталостное и квазистатическое разрушение. Разрушение от усталости, связанное с накоплением усталостных повреждений, сопровождается образованием трещин усталости и характеризуется малой пластической деформацией. Квазистатическое разрушение обусловлено накоплением пластической деформации до уровня, соответствующего разрушению при однократном статическом нагружении. Такое разрушение происходит только у материалов, циклически разупрочняющихся и циклически стабильных, склонных к накоплению пластических деформаций.

Осуществление того или иного вида разрушения в связи с циклическими свойствами материала, уровнем напряжений, асимметрией цикла и другими факторами зависит от соотношения интенсивностей процессов накопления усталостных повреждений и роста деформации [9]. С ростом максимальных напряжений интенсивность накопления (если она имеет место) резко возрастает, и деформация может достичь предельных значений за весьма малое число циклов. Для развития трещины усталости с последующим разрушением даже на уровне напряжений, близких к пределу текучести, требуется достаточно большое число циклов, поэтому, как правило, усталостное разрушение соответствует большей долговечности и квазистатическое разрушение предшествует усталостному.

При затухающем характере накопления пластической деформации возможно осуществить только усталостное разрушение.

В общем случае процессы накопления усталостных повреждений и пластических деформаций протекают одновременно, поэтому возможно также образование промежуточных форм разрушения (предельного состояния), когда трещины усталости образуются на фоне развитых пластических деформаций. При программном нагружении или при непрерывном изменении амплитуды деформаций усталостное повреждение для случая малоциклового разрушения может быть описано на основе гипотезы линейного суммирования повреждений. Тогда текущее значение усталостного повреждения [9]

$$d_{уст} = \left(\frac{2}{\ln \frac{1}{1-\psi}} \right)^{1/m} \int_0^N e_{апл}^{1/m} dN. \quad (13)$$

Квазистатическое повреждение определяют из выражения

$$d_{ст} = \frac{1}{\ln \frac{1}{1-\psi}} \int_0^N (e_{пл2}^{(k)} - e_{пл1}^{(k)}) dN, \quad (14)$$

где индексами 1 и 2 обозначены деформации в нечетных и четных полуциклах нагружения.

В области, где превалирует усталость, условие разрушения может быть выражено следующим образом: $d_{уст} = 1$.

Аналогично, в области преобладания квазистатического разрушения $d_{ст} = 1$.

В переходной области смешанного разрушения взаимное влияние квазистатического и усталостного повреждений может быть выражено интерполяционной зависимостью

$$d_{уст}^q + d_{ст}^p = d = 1.$$

причем, как было показано Н.А. Махутовым, простейшая линейная зависимость

$$d_{уст} + d_{ст} = 1$$

дает вполне удовлетворительные результаты.

Особенности расчетного анализа циклической пластичности материалов в условиях сложного напряженного состояния

Отмеченные в предыдущих лекциях основные свойства упругопластического деформирования материалов при циклическом нагружении указывают на большое их разнообразие. Учесть это разнообразие при построении и решении уравнений теории циклической пластичности в условиях сложного напряженного состояния невозможно. Поэтому для упрощения аналитических расчетов НДС материалов конструкций в условиях циклического упругопластического деформирования принято несколько гипотез, справедливых для любого цикла многократного нагружения [1]:

- если материал детали конструкции нагружен за пределами упругости (текучести), то его разгрузка и последующее повторное нагружение происходит по линейному закону;
- принятая прямая разгрузки и последующего повторного нагружения параллельна соответствующей прямой упругого нагружения;
- при повторном нагружении за предел упругости нагружение происходит так же, как и в отсутствие разгрузки, т.е. по кривой деформирования для исходного состояния;

Перечисленные гипотезы позволяют в рамках деформационной теории пластичности построить систему уравнений для описания состояния материала при циклическом упругопластическом нагружении в условиях сложного напряженного состояния. Однако очевидно, что в общем случае решение полной нелинейной системы таких уравнений аналитическими методами представляет большие математические трудности, поэтому в настоящее время решение таких задач эффективно проводят на основе численных методов решения.

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ В ПП ЛОГОС

С 2009г. в РФЯЦ-ВНИИЭФ разрабатывается отечественный пакет программ ЛОГОС [10,11] для численного решения широкого круга задач газодинамики и механики деформируемого твёрдого тела на многопроцессорных вычислительных ресурсах. Данный пакет программ постепенно внедряется в расчетную практику различных подразделений РФЯЦ-ВНИИЭФ, а также ряда других предприятий. Одним из направлений развития пакета программ является разработка программных средств для решения задач по определению напряженно-деформированного состояния конструкций в условиях квазистатического термосилового нагружения с учетом возможных нелинейных эффектов, в том числе и физической нелинейности материалов. Рассмотрим кратко основные методические основы численного решения задач такого класса в ПП ЛОГОС.

Постановка задач

В общем случае рассматривается конструкция, выполненная из одного или нескольких изотропных материалов и находящаяся под действием заданного температурного поля $T = T(x_i, t)$, объемных сил $F_i = F_i(x_i, t)$, определенных в объеме V , поверхностных сил $P_i = P_i(x_i, t)$, действующих на части поверхности $\sum_1$, а также перемещений $u_i = u_i(x_i, t)$, заданных на части поверхности $\sum_2$. Все типы нагрузок предполагаются квазистатическими.

В начальный момент времени $t=t_0$ состояние конструкции характеризуется исходной конфигурацией $x_i^0 = x_i(t_0)$, полями начальных деформаций $e_{ij}^0 = e_{ij}^0(x_i^0, t_0)$, напряжений $\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^0(x_i^0, t_0)$, а также набором параметров, характеризующих предшествующую историю деформирования материалов. В большинстве случаев требуется определить для заданной последовательности моментов времени t_k текущую конфигурацию тела $x_i = x_i(x_i^0, t_k)$, поля его перемещений $u_i = u_i(x_i^0, t_k)$, деформаций $e_{ij} = e_{ij}(x_i^0, t_k)$ и напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_i^0, t_k)$. Кроме этого, в задачах такого типа инженеров часто интересует выполнение некоторых критериальных условий, характеризующих прочность или несущую способность исследуемого объекта [12].

Приведенная выше постановка задач сформулирована для общего случая квазистационарного термосилового нагружения. Нагрузки, действующие на конструкцию, могут меняться произвольным образом, как по координатам, так и во времени. В таких случаях при моделировании упругопластического деформирования конструкций необходимо отслеживать изменение их напряженно-деформированного

состояния (НДС), разбивая весь процесс нагружения на ряд этапов таким образом, чтобы в пределах каждого этапа можно было с приемлемой точностью считать изменение нагрузок линейным.

Общая формулировка модели деформируемого материала с физической нелинейностью

В математических моделях, описывающих деформирование материалов конструкций в ПП ЛОГОС, все эффекты, связанные с возникновением и развитием обратимых и необратимых деформаций, рассматриваются как отдельные проявления единого эволюционного процесса деградации свойств материала. Сам процесс представляется в виде последовательности элементарных актов изменения внешних воздействий, сопровождающихся соответствующими изменениями пластических деформаций материалов и деформаций ползучести. Для его описания в общем случае используется составная иерархическая модель материала [11-13], устанавливающая связь между изменениями напряжений и деформаций на интервалах изменения внешних воздействий с учетом текущего состояния материала. Формально независимые элементарные акты могут быть описаны соответствующими частными матмоделями пластичности и ползучести. Учет взаимодействия таких элементарных актов в составной модели обеспечивается последовательной инициализацией частных моделей и корректировкой входящих в них параметров.

Такой подход позволяет, с одной стороны, представить сложный процесс развития нелинейного деформирования в виде совокупности более простых несвязанных процессов, а с другой – использовать для описания этих процессов широкий набор имеющихся и разрабатываемых альтернативных частных моделей без изменения формулировки общей модели.

Конкретные уравнения составной модели материала, устанавливающей связь между изменениями напряжений $\Delta\sigma_{ij}$ и деформаций Δe_{ij} на элементарном шаге изменения внешних воздействий, могут быть записаны в виде [12,13]:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{ij} &= 2G(\Delta e_{ij} - \Delta d_{ij}) + \delta_{ij}(K - \frac{2}{3}G)(\Delta e_{ii} - \Delta d_{ii}); \\ \Delta d_{ij} &= \Delta e_{ij}^p - \frac{\Delta G \sigma_{ij}^*}{2GG^*} + \delta_{ij}(\Delta(\alpha T) - \frac{\Delta K \sigma}{3K K^*}); \\ \Delta K &= K - K^*; \Delta G = G - G^*; \Delta(\alpha T) = \alpha T - \alpha^* T^*; \end{aligned} \quad (15)$$

где $K^* = K(T^*)$, $K = K(T)$, $G^* = G(T^*)$, $G = G(T)$ модули объемной и сдвиговой деформации материала, отнесенные к уровню температур в исходном (в начале шага) и текущем (в конце шага) состояниях; $\alpha^* = \alpha(T^*)$, $\alpha = \alpha(T)$, – соответствующие значения

коэффициентов температурного расширения, σ_{ij}^* , σ – значения девиаторной и шаровой составляющих тензора эффективных напряжений в исходном состоянии.

Фигурирующая в соотношениях (15) величина изменения пластических деформаций Δe_{ij}^p , описываемая соответствующими частными моделями, однозначно определяется уровнями эффективных напряжений σ_{ij} и температур T в исходном и текущем состояниях, а также наборами скалярных и тензорных параметров r_q^p ($q=1,2,..,l$), являющихся функционалами процесса и характеризующих историю деформирования:

$$\Delta e_{ij}^p = \Delta e_{ij}^p(\sigma_{ij}, T, r_q^p). \quad (16)$$

Необходимо отметить, что определяющие соотношения в простейших частных моделях записываются для неповрежденного материала и формально не включают в себя какой-либо зависимости от текущей поврежденности.

Существенным преимуществом данного подхода является простая с точки зрения программирования возможность добавления разнообразных частных моделей поведения материала в общую формулировку модели деформируемого материала. Необходимо отметить, что при выборе нескольких частных моделей для решения одной задачи они должны быть функционально совместимы между собой в рамках используемой составной модели.

При реализации составной модели материала предполагается, что влияние различных видов поврежденности на характеристики процесса деформирования осуществляется с помощью скалярной функции ω (меры поврежденности), представляющей собой меру уменьшения эффективных площадок действия напряжений по отношению к их начальному неповрежденному значению. Величина ω меняется от значения $\omega=0$ для неповрежденного материала до $\omega=1$ для полностью разрушенного материала. Непосредственное влияние поврежденности на процесс деформирования учитывается в системе уравнений равновесия путем введения зависимости характеристик материала от текущего значения меры поврежденности ω . В связи с этим при формулировке составной модели поврежденного материала в рассмотрение введены две характеристики напряжений: эффективные $\{\sigma'\}$, действующие на поврежденных площадках, и приведенные $\{\sigma^*\}$, отнесенные к неповрежденным площадкам. Эффективные напряжения используются во всех частных моделях, определяющих состояние материала в точке тела, тогда как приведенные используются на уровне описания конструкции при формулировке глобальной системы уравнений равновесия и статических граничных условий.

Лекция №5

Особенности моделирования упругопластического деформирования

Моделирование упругопластического деформирования конструкций в ПП ЛОГОС основано на использовании соотношений теории течения [16-19].

Основные положения теории пластического течения с учетом особенностей их программной реализации заключаются в следующем:

- приращение тензора деформаций (механических, за вычетом тепловой составляющей) при бесконечно малом приращении напряжений представляется в виде суммы приращений тензоров упругих и пластических деформаций

$$d\{\varepsilon\} = d\{\varepsilon^e\} + d\{\varepsilon^p\}; \quad (17)$$

- приращение упругих деформаций связано с приращением напряжений законом Гука

$$d\{\sigma\} = [D^e]d\{\varepsilon^e\}; \quad (18)$$

- начало пластического деформирования определяется критерием текучести

$$\Phi(\{\sigma\}, H) = 0, \quad (19)$$

где H – параметр упрочнения. Критерий текучести можно интерпретировать как уравнение поверхности текучести в пространстве напряжений, положение которой зависит от параметра упрочнения;

- закон пластического течения (ассоциированный закон) выражает связь пластических деформаций с поверхностью текучести (вектор пластических деформаций ортогонален поверхности текучести в пространстве напряжений):

$$d\{\varepsilon^p\} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}}, \quad (20)$$

где λ – скалярный коэффициент пропорциональности, требующий определения.

Соотношение (18) с учетом (19) и (20) может быть переписано в виде

$$d\{\varepsilon\} = [D^e]^{-1}d\{\sigma\} + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}}. \quad (21)$$

Из этого уравнения вытекает следующее выражение для приращений напряжений:

$$d\{\sigma\} = [D^e]d\{\varepsilon\} - [D^e] \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} \right\} \lambda. \quad (22)$$

Для определения λ вначале записывается равный нулю дифференциал функции Φ для критерия текучести:

$$d\Phi = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T d\{\sigma\} + \frac{\partial \Phi}{\partial H} dH = 0,$$

или

$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T d\{\sigma\} - A\lambda = 0, \quad (23)$$

где введено обозначение $A = -\frac{\partial \Phi}{\partial H} dH \frac{1}{\lambda}$.

Умножая (22) слева на $\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}}\right\}^T$ и учитывая (23), получается

$$A\lambda = \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}}\right\}^T [D^e] d\{\varepsilon\} - \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}}\right\}^T [D^e] \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}}\right\} \lambda,$$

откуда

$$\lambda = \frac{\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}}\right\}^T [D^e] d\{\varepsilon\}}{A + \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}}\right\}^T [D^e] \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}}\right\}}.$$

После подстановки выражения для λ в (22) получается соотношение, в явном виде определяющее изменения напряжений через изменения деформаций за пределами упругости:

$$d\{\sigma\} = [D^{ep}] d\{\varepsilon\}, \quad (24)$$

где $[D^{ep}]$ – матрица упругопластических постоянных, элементы которой зависят от достигнутого уровня НДС и определяют коэффициенты матрицы касательной жесткости на каждой итерации решения задачи:

$$[D^{ep}] = [D^e] - \frac{[D^e] \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}}\right\} \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}}\right\}^T [D^e]}{A + \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}}\right\}^T [D^e] \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}}\right\}}. \quad (25)$$

В упругой области, где $\lambda = 0$, $[D^{ep}] = [D^e]$.

Выражения (20) – (25) являются основными дифференциальными соотношениями, определяющими зависимость приращений напряжений от приращений деформаций.

Отметим две ключевые проблемы решения вышеприведенных соотношений: 1- сложность удовлетворения получаемых приближенных напряжений условию нахождения на поверхности текучести. 2- сложность обеспечения высокой скорости сходимости итерационного процесса.

По 1-ой проблеме. Соотношение (24) справедливо лишь для бесконечно малых приращений деформации. Очевидно, что метод пошагового нагружения, предполагающий конечные значения приращений прикладываемой нагрузки и деформации, будет вносить вычислительную погрешность, поскольку конечные приращения напряжений, получаемые путем линеаризации определяющих соотношений, не будут точно лежать на поверхности текучести. Поэтому для предотвращения накопления численной ошибки метод расчета должен предполагать корректировку, осуществляющую «посадку» приближенного решения на поверхность текучести, тем самым удовлетворяя основным соотношениям теории течения. В ПП ЛОГОС-Прочность расчет приращений напряжений, удовлетворяющих условиям пластического течения, обеспечивается процедурой “радиального возврата на поверхность текучести”.

По 2-ой проблеме. Итерационный метод решения нелинейной задачи должен быть вычислительно эффективным и иметь по возможности максимальную скорость сходимости. Наиболее эффективным в вычислительной практике признан метод Ньютона-Рафсона с построением матрицы касательной жесткости $[K(U_n)]$, которая на каждой итерации строится по значениям перемещений и деформаций, соответствующим приближенному решению и обеспечивает квадратичную скорость сходимости. Коэффициенты глобальной матрицы жесткости $[K]$ системы определяются значениями коэффициентов матрицы материальных параметров $[D]$. В зоне упруголинейного деформирования матрица $[D]$ соответствует матрице упругих постоянных; в зоне пластического течения коэффициенты матрицы определяются значениями матрицы упругопластических постоянных $[D^{ep}]$.

Исходя из вышесказанного, процедура линеаризации матрицы $[D^{ep}]$, должна, во-первых, обеспечивать построение глобальной матрицы касательной жесткости $[K(U_n)]$ на каждой итерации цикла Ньютона-Рафсона, а, во-вторых, согласованность матрицы $[D^{ep}]$ с процедурой расчета характеристик упругопластического деформирования, т.е. приближенное значение приращения напряжений, полученное по формуле (24) с первым порядком точности, должно совпадать с приращением напряжений, полученным точным интегрированием уравнений пластического деформирования.

Метод построения касательной матрицы жесткости, согласованной с процедурой радиального возврата напряжений на поверхность текучести и обеспечивающей квадратичную скорость сходимости, представлен в [17-19].

Лекция №6

Учет эффектов ползучести материалов

В ПП ЛОГОС реализована модель высокотемпературной ползучести в рамках составной иерархической модели материала [12]. Иерархическая модель поврежденного материала и реализованные в ее рамках частные модели пластического деформирования и ползучести характеризуются обширным набором материальных функций, отражающих нелинейное поведение материалов в заданных диапазонах температур и нагрузок. Параметры материальных функций определяются экспериментально.

Для описания процессов ползучести в рамках общей составной модели материала реализован один из вариантов модели термоползучести, основанный **на теории упрочнения** с использованием гипотез существования поверхности ползучести и ортогональности к ней вектора скорости деформации ползучести $\{\dot{\varepsilon}^c\}$.

В этой модели скорость деформаций ползучести связана с эффективными напряжениями $\{\sigma'\}$ соотношением:

$$\{\dot{\varepsilon}^c\} = \{\sigma'\} L(T, \Theta) H(T, \tau, \Theta),$$

где $L(T, \Theta)$ - функция, характеризующая начальную скорость ползучести при уровне напряжений, определяемых нормированным параметром Θ :

$$\Theta = \frac{(\{\sigma'\}, \{\sigma'\}) - r_c^2}{r_c^2};$$

$r_c = r_c(T)$ - радиус поверхности ползучести, зависящей только от температуры;

$H(T, \tau, \Theta)$ - функция упрочнения, характеризующая изменение начальной скорости ползучести $\{\dot{\varepsilon}^c\}$ от параметров τ и Θ (при $\tau_0 = 0$ $H(T, \tau_0) = 1$). В качестве параметра τ может приниматься либо время выдержки при расчете ползучести $\tau = t$, либо длина траектории деформации ползучести $\tau = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}(\{\dot{\varepsilon}^c\}, \{\dot{\varepsilon}^c\})} dt$, либо энергия диссипации

при ползучести $\tau = \int_0^t (\{\sigma'\}, \{\dot{\varepsilon}^c\}) dt$.

Функция $H(T, \tau, \Theta)$ представляется в виде

$$H(T, \tau, \Theta) = H^0(T, \tau) + FH(T, H^0, \Theta),$$

где $FH(T, H^0, \Theta) = (1 - H^0(T, \tau))h(T, \Theta)$, $h(T, \Theta)$ - дополнительная функция упрочнения материала.

Приведенная модель позволяет удовлетворительно описать два первых участка кривой ползучести (участки неустановившейся и установившейся ползучести), а для описания 3-го участка (ускоренной ползучести) требуется учет влияния поврежденности на процесс ползучести. Однако, необходимость описания 3-го участка при решении практических задач возникает редко.

В качестве переменной, определяющей процесс накопления повреждений при ползучести, принята доля энергии диссипации, изменение которой на шаге нагружения определяется соотношением $\delta V = (\{\sigma'\}, \delta\{\varepsilon^c\})$. Соответствующее изменение функции

поврежденности при ползучести $\delta\Psi$ принимается в виде $\delta\Psi = \frac{\delta V}{V^R}$, где $V^R = V^R(T, \Pi)$ -

предельное значение энергии диссипации при ползучести, соответствующее текущему виду НДС, характеризуемому параметром Π , и действующей температурой T .

Параметр Π определяется через главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ в точке тела.

Вклад рассматриваемого вида поврежденности при ползучести в общее измене-

ние меры поврежденности, принимается в виде $\delta\omega = s\varpi^{\frac{s-1}{s}} \delta\Psi$, где $s = s(T)$ – функция материала, ϖ – накопленное значение меры поврежденности.

Таким образом, реализация модели термползучести определяется обширным набором материальных функций, зависящих от температуры T , параметра Θ , характеризующего уровень напряжений при ползучести, и от параметра τ , характеризующего время выдержки при ползучести. Это такие вышеперечисленные функции, как: $r_c(T)$ – радиус поверхности ползучести; $L(T, \Theta)$ – начальная скорость ползучести; $H^0(T, \tau)$ и $h(T, \Theta)$ – функции упрочнения при ползучести; $V_0^R(T)$ – предельное значение энергии диссипации при ползучести при одноосном растяжении; $s(T)$ – функция накопления меры поврежденности при ползучести и др. Получение материальных функций для модели ползучести осуществляется на основе экспериментов по исследованию ползучести образцов при одноосном растяжении, проведенных при различных уровнях напряжений для ряда фиксированных уровней температур.

Лекция №7

Алгоритмы реализации основных физических соотношений

Исследование поведения конструкций на основе рассмотренных выше физических соотношений приводит к сложным нелинейным системам разрешающих уравнений. Значительная часть величин, входящих в эти уравнения, является функционалами, зависящими от предшествующей истории деформирования материала, и определяется путем интегрирования по конкретной траектории нагружения. Поэтому для решения таких нелинейных задач применяются современные шаговые методы.

Численное моделирование процессов квазистационарного нелинейного деформирования в ПП ЛОГОС реализуется *на основе двухуровневой шаговой схемы*, используемой во многих современных программных продуктах [14]. В этой схеме *на шагах верхнего уровня (этапах нагружения)* осуществляется внешняя линейаризация задачи. Реальная траектория нагружения аппроксимируется в пространстве параметров нагружения совокупностью прямолинейных участков, величина которых определяется только условиями удовлетворительной аппроксимации траектории. Решение нелинейных задач на этапах нагружения может осуществляться в форме *метода начальных напряжений* [12,15], *метода Ньютона–Рафсона* и его различных модификаций [11,14], *квазиньютонова метода* [14,15], когда на каждой итерации строится приближение к касательной матрице жесткости без вычисления ее в явном виде и т. д. В ПП ЛОГОС по умолчанию решение выполняется методом *Ньютона–Рафсона*. Для вычисления изменений деформаций в пределах текущего этапа

последний разбивается на ряд шагов нижнего уровня, на которых вычисления проводятся независимо для отдельных точек конструкции без коррекции уравнений равновесия. Вычисление протяженности текущего шага в рассматриваемой точке траектории деформирования производится из условий пластичности.

Сам процесс нагружения на шаге представляется в виде мгновенного изменения деформаций δe_{ij} и температуры δT и последующей релаксации напряжений за промежуток времени $\delta t_i = \Delta t \delta \tau_i$. Для текущего шага на основе соответствующих частных моделей термопластичности последовательно вычисляются изменения пластических деформаций δe_{ij}^P , поврежденности от пластичности $\delta \omega^P$, деформаций ползучести $\delta \{\varepsilon^c\}$ и поврежденности от ползучести $\delta \omega^c$. Затем корректируются текущий уровень напряжений $\{\sigma\}$, мера поврежденности ω и параметры, характеризующие историю деформирования.

Таким образом, в результате последовательного вычисления величин, входящих в уравнения пластичности, на каждом шаге низшего уровня и суммирования их в пределах этапа нагружения определяются все значения функций, необходимые для получения текущего приближения решения нелинейной задачи.

Так как во всех соотношениях, определяющих частные модели материала, используются эффективные напряжения, коррекция их за счет изменения поврежденности на шагах нижнего уровня не производится. Корректируются лишь приведенные напряжения на шаге верхнего уровня.

Лекция №8

Метод Ньютона-Рафсона решения системы нелинейных уравнений

Итерационная схема Ньютона-Рафсона строится на основе модификации простого итерационного процесса для уравнения $[K(\{U_n\})]\{U_{n+1}\} = \{F\}$. В классической формулировке метода Ньютона-Рафсона для системы нелинейных уравнений это рекуррентное соотношение модифицируется в следующее уравнение для приращений перемещений на двух последовательных этапах приближения:

$$[K(\{U_n\})](\{U_{n+1}\} - \{U_n\}) = \{F\} - [K(\{U_n\})]\{U_n\},$$

или

$$[K(\{U_n\})]\Delta\{U_{n+1}\} = \Delta\{R_n\}, \quad (26)$$

$$\{U_{n+1}\} = \{U_n\} + \Delta\{U_{n+1}\}, \quad (27)$$

$$\Delta\{R_n\} = \{F\} - [K(\{U_n\})]\{U_n\}. \quad (28)$$

Переход к записи уравнений равновесия для приращений перемещений имеет ясный физический смысл: величина $\Delta\{R_n\}$ физически интерпретируется как

неуравновешенная невязка силы в конструкции, и, следовательно, она является удобной мерой погрешности приближенного решения. Согласно вариационному принципу Лагранжа, для тела, находящегося в положении статического равновесия под действием внешней нагрузки, обеспечивается баланс между внутренними силами, обусловленными возникшими в результате деформирования напряжениями, и совокупностью внешних сил. Следовательно, норма вектора невязки сил характеризует меру отклонения приближенного решения от искомого.

Уравнения (26) – (28) определяют схему итерационного решения по методу Ньютона-Рафсона, реализованную в пакете программ ЛОГОС. Есть возможность выбрать два варианта решения.

Первая реализация, используемая по умолчанию, предполагает перестроение матрицы касательной жесткости $[K(\{U_n\})]$ на каждой итерации. Матрица является линейной аппроксимацией нелинейного оператора $[K(\{U\})]$ и на каждой итерации строится по значениям перемещений и деформаций, соответствующим приближенному решению $\{U_n\}$.

Второй вариант предполагает вместо касательной матрицы использование постоянной матрицы жесткости $[K(\{U_0\})]$, соответствующей начальному упругому приближению. Метод начальной жесткости используется при решении задач с нелинейными моделями материалов, для которых построение оператора касательной жесткости не реализовано или проблематично.

Для обоих вариантов решения используются 2 классических критерия сходимости - по норме вектора приращения перемещений и по норме вектора неравновесной невязки узловых сил [17-19]:

$$\begin{aligned}\|\Delta\{U_{n+1}\}\| &\leq \varepsilon_1 \|\{U_1\}\|, \\ \|\Delta\{R_{n+1}\}\| &\leq \varepsilon_2 \|\{F\}\|,\end{aligned}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – задаваемые константы, а $\|\{U_1\}\|$ – норма вектора узловых перемещений, соответствующего первому линейно-упругому приближению.

Стоит отметить, что при формулировке рекуррентной схемы итерационного цикла Ньютона-Рафсона (26)-(28) предполагалось, что вектор $\{F\}$ не зависит от узловых перемещений. Однако в некоторых случаях вектор $\{F\}$ может зависеть от перемещений, например, в случае поверхностного давления, действующего на сильно деформируемую конструкцию. Общая идея метода Ньютона-Рафсона распространяется и на случай таких неконсервативных нагрузок, с той разницей, что при вычислении вектора невязки по формуле (28) вместо постоянного вектора внешних сил используется переменный вектор, величина которого зависит от узловых перемещений, соответствующих текущему приближению: $\Delta\{R_n\} = \{F(\{U_n\})\} - [K(\{U_n\})]\{U_n\}$.

Адаптивный метод пошагового нагружения для обеспечения сходимости итерационного процесса

Основная идея метода заключается в представлении процесса деформирования в виде последовательности равновесных состояний. Полная действующая нагрузка достигается последовательным приложением инкрементов нагрузки, при этом желательно, чтобы размер подшага по нагружению выбирался таким, чтобы задача на подшаге была близка к линейной. При такой постановке процесс пошагового нагружения сводится к отысканию следующего равновесного состояния при уже определенной геометрии и с накопленными напряжениями с предыдущих подшагов.

Разрешающие уравнения на инкременте нагружения, такие, как запись деформаций и напряжений через перемещения, формулировка вариационного принципа Лагранжа на текущем шаге нагружения, могут быть получены на основе двух различных методик [12]. Первая предполагает использовать в качестве отсчетной исходную метрику, в этом случае деформации и напряжения записываются относительно системы координат, связанной с начальным недеформированным состоянием системы. Альтернативный вариант методики пошагового нагружения использует метрику, измененную в соответствии с деформированным состоянием. С точки зрения объема вычислений при использовании МКЭ более предпочтительным является второй подход. В этом случае на каждом шаге нагружения в отдельности формулируется система разрешающих уравнений, в которой фигурируют производные относительно текущей метрики. Фактически на шаге нагружения ставится задача о предварительно напряженном деформировании конструкции при заданных приращениях нагрузки. Если эти приращения малы, то задача становится близка к линейной.

Применение метода последовательных нагружений дает полную картину нелинейного поведения системы в виде последовательности промежуточных состояний.

В ПП ЛОГОС реализована адаптивная схема пошагового нагружения с автоматическим выбором величины инкремента нагрузки в зависимости от скорости сходимости итерационного процесса для предыдущих подшагов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Справочное пособие / Г.С. Писаренко, Н.С. Мажаровский. – Киев: Наук. Думка, 1981. – 496с.
2. Трощенко В.Т. Рассеянное усталостное повреждение металлов и сплавов. Сообщение 3. Деформационные и энергетические критерии // Проблемы прочности. - 2006. - №1. - С. 1 - 31.
3. Трощенко В.Т., Стрижало В.О., Бородий М.В. Оценка долговечности металлических материалов в рамках деформационного критерия малоциклового усталости // Техническая диагностика и неразрушающий контроль. – 2008. - №4. – С. 14 – 25.
4. Когаев В.П. и др. Расчёты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность: Справочник / В.П. Когаев, Н.А. Махутов, А.П. Гусенков.– М.: Машиностроение, 1985. – 224с.
5. Прочность конструкций при малоцикловом нагружении. / Н.А. Махутов, А.З. Воробьев, М.М. Гаденин и др. – М.: Наука, 1983. - 270с.
6. Стрижало В.А. Циклическая прочность и ползучесть металлов при малоцикловом нагружении в условиях низких и высоких температур / В.А. Стрижало. – К.: «Наук. думка», 1978. – 238с.
7. Казанцев А.Г. К расчёту малоциклового усталости при непропорциональных режимах нагружения // Проблемы прочности. - 1989. - № 6. - С. 31 - 36.
8. Гохфельд Д.А. Уравнения состояния при малоцикловом нагружении / Д.А. Гохфельд.- М.: «Наука», 1981. – 244 с.
9. Серенсен С.В., Когаев В.П., Шнейдерович Р.М. Несущая способность и расчет деталей машин на прочность. Руководство и справочное пособие. Изд. 3-е, перераб. и доп. Под ред. С.В. Серенсена. М., «Машиностроение», 1975.
10. Авдеев П.В., Артамонов М.В., Борляев В.В., Дьянов Д.Ю., Спиридонов В.Ф. и др. Пакет программ ЛОГОС. Функциональные возможности для решения задач прочности / Сборник докладов XIII-го международного семинара «Супервычисления и математическое моделирование», Саров, 2011г.
11. Александрова О.Л., Барабанов Р.А., Дьянов Д.Ю., Косарим С.С., Спиридонов В.Ф. и др. Пакет программ ЛОГОС. Функциональные возможности для решения задач статической прочности конструкций с учётом физической и геометрической нелинейностей / Сборник докладов XIV-го международного семинара «Супервычисления и математическое моделирование», Саров, 2012г.
12. Капустин С.А. Численный анализ термомеханических процессов деформирования и разрушения конструкций на основе МКЭ // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Межвуз сб. / Москва. Изд-во "Товарищество научных изданий КМК".1995. Вып.53. с.63-71.

13. Коротких Ю.Г. Уравнения теории термовязкопластичности с комбинированным упрочнением. Уравнения состояния при малоцикловом нагружении; Монография / Под ред. Н.А. Махутова. М.: Наука, 1981. Гл.6. С. 129-167.
14. Crisfield M.A. Vol.1. Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Essentials -Wiley,1996.
15. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Перевод с англ. – М.: Мир, 1975г.
16. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. Изд. 2-е, перераб. и доп. М., «Машиностроение», 1975, 400с.
17. Simo J.C. and Hughes T.J.R. Computational Inelasticity. Springer-Verlag, New York, 1998.
18. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. New York: Oxford University Press, 1983.
19. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел // Новосибирск: Изд-во Сибирского отделения РАН, 2000.