

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Саровский физико-технический институт-филиал НИЯУ МИФИ

ФИЗИКО - ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ

Д. В. СИЗМИН

«НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИКА»

Саров
2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Саровский физико-технический институт-филиал НИЯУ МИФИ

ФИЗИКО - ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ

Д. В. СИЗМИН

«НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИКА»

Учебно-методическое пособие

Утверждено
Научно-методическим Советом
СарФТИ

_____ 2015 г.

Саров
2015

ISBN

Д. В. Сизмин

«Нелинейная оптика»

Учебно-методическое пособие составлено на основе курса лекций «Нелинейная оптика», читаемого студентам кафедры «Квантовая электроника» Саровского государственного физико-технического института (СарФТИ НИЯУ МИФИ).

Пособие содержит методы математического описания нелинейно-оптических процессов. Рассмотрены методы нелинейного преобразования частоты, эффекты самовоздействия света, вынужденного рассеяния, обращения волнового фронта, и другие явления, важные для лазерной техники. Приведены примеры применений нелинейно-оптических явлений в различных областях науки и техники.

Сизмин Дмитрий Владимирович

СарФТИ 2015 г.

Оглавление

1. Введение	7
Волновое уравнение	7
Нелинейная поляризация	11
Эффекты, связанные с поляризацией второго порядка	12
Эффекты, связанные с поляризацией третьего порядка	14
Непараметрические нелинейно-оптические явления	16
Фазовый синхронизм	17
2. Нелинейная поляризация	21
Ангармонический осциллятор	22
Свойства симметрии тензоров восприимчивости	26
Эффективная восприимчивость	32
Временное представление	34
3. Метод медленно меняющихся амплитуд	35
Уравнения для связанных амплитуд	35
Соотношения Мэнли-Роу	36
Генерация суммарной частоты	37
Генерация второй гармоники	40
Решение с учётом истощения волны накачки	41
Внутрирезонаторная генерация второй гармоники	44
4. Фазовый синхронизм	47
Распространение электромагнитных волн в кристаллах	47
Фазовый синхронизм в одноосных кристаллах	49
Фазовый синхронизм при генерации второй гармоники	50
Фазовый синхронизм при трёхчастотном параметрическом взаимодействии	53
Экспериментальное определение направления синхронизма	54
Температурная перестройка синхронизма	54
Квазисинхронизм	55
5. Пространственные и временные эффекты при нелинейном преобразовании частоты света	59
Поглощение	59
Диафрагменный апертурный эффект	60
Дифракция	61
ГВГ в расходящихся пучках	62
ГВГ сфокусированных гауссовых пучков	64
Преобразование немонахроматического излучения	66
Преобразование импульсного излучения	66
Пространственно-временная аналогия	70
Расчёт нелинейно-оптических преобразователей частоты	71
6. Параметрическая генерация света	75
Параметрическое усиление	75
Параметрический генератор	76
Перестроение частоты ПГС	79
Влияние модовой структуры резонатора	80

Параметрический генератор бегущей волны.....	82
Нелинейно-оптические кристаллы	83
7. Нелинейный показатель преломления.....	85
Механизмы возникновения нелинейности третьего порядка	85
Тепловая нелинейность.....	87
Крупномасштабная самофокусировка.....	89
Мелкомасштабная самофокусировка	92
Поворот эллипса поляризации	96
Распространение оптических импульсов в кубически-нелинейной среде	99
Оптические солитоны	100
8. Вынужденное рассеяние	103
Спонтанное рассеяние.....	103
Спонтанное рассеяние Манделъштама-Бриллюэна	105
Электрострикция	108
ВРМБ-усиление	109
ВРМБ-генерация.....	112
Вынужденное комбинационное рассеяние	115
Вынужденное рассеяние в лазерной технике	120
9. Обращение волнового фронта.....	123
Принцип обращения волнового фронта.....	123
ОВФ при вырожденном четырёхволновом взаимодействии в кубически-нелинейной среде.....	126
ОВФ при вынужденном рассеянии.....	131
Практическое применение ОВФ	135
Список обозначений и сокращений.....	139
Приложение А – Единицы СИ и СГС в электродинамике.....	142
Приложение Б – Физические константы.....	143
Приложение В – Уравнения электродинамики в системах СИ и СГС	144
Приложение Г – Краткий русско-английский нелинейный словарь.....	145
Предметный указатель	146
Литература.....	147

1. Введение

В течение всей истории оптики до середины XX столетия считалось, что оптические среды линейны. Из этого допущения следуют важные следствия:

- Оптические свойства материалов, такие как показатель преломления и коэффициент поглощения, не зависят от интенсивности света;
- Справедлив принцип суперпозиции: два пучка света в одной и той же области среды не взаимодействуют друг с другом (распространяются независимо);
- Частота света не изменяется при прохождении через среду.

После появления лазера в 1960 г. стало ясно, что эти правила являются приближительными, и имеют место только в слабых световых полях. При больших интенсивностях оптические среды проявляют нелинейные свойства:

- Показатель преломления зависит от интенсивности света;
- Следовательно, принцип суперпозиции нарушается в нелинейной оптической среде: пучки света взаимодействуют между собой (так, что светом можно управлять с помощью света);
- Частота света может изменяться при прохождении через нелинейную среду.

Открытие нелинейных оптических эффектов существенно расширило возможности лазерной техники: появились способы изменения частоты излучения (генерации гармоник), источники перестраиваемого по частоте излучения (параметрические генераторы), лазеры на основе вынужденного рассеяния и т. д. В основе большинства методов генерации ультракоротких лазерных импульсов также лежат нелинейно-оптические явления, такие как нелинейная рефракция и поглощение. Очень широко применяются нелинейно-оптические методы в научных исследованиях.

Вместе с тем, многие нелинейные эффекты в оптике (самофокусировка, фазовая модуляция, вынужденное рассеяние) являются вредными, они ограничивают эффективность лазерных систем. Это относится, прежде всего, к особо мощным лазерам, поскольку в них велика интенсивность излучения, а также к волоконно-оптическим линиям связи – в силу их большой длины даже малые нелинейные эффекты могут накапливаться.

Волновое уравнение

В классической физике все электромагнитные (в том числе оптические) явления описываются *уравнениями Максвелла*:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

(в системе СГС), где \mathbf{E} и \mathbf{H} – напряжённости электрического и магнитного поля, \mathbf{D} и \mathbf{B} – электрическая и магнитная индукции соответственно. В оптике, как правило,

рассматривают распространение электромагнитного излучения в диэлектрических средах, в которых плотность свободных зарядов и плотность тока равны нулю: $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$.

Систему уравнений Максвелла необходимо дополнить *материальными уравнениями*, связывающими поля \mathbf{E} и \mathbf{D} , \mathbf{H} и \mathbf{B} . По определению,

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M},\end{aligned}\quad (1.2)$$

где \mathbf{P} и \mathbf{M} – векторы *поляризации* и *намагниченности* среды (плотности электрического и магнитного моментов). Изменение магнитного момента – довольно инерционный процесс, поэтому на частотах, характерных для оптических волн ($\sim 10^{15}$ Гц), намагниченность не успевает возникнуть, и в большинстве случаев можно считать, что $\mathbf{M} = 0$ и $\mathbf{H} = \mathbf{B}$.

В слабых полях поляризация среды пропорциональна напряжённости поля:

$$\mathbf{P} = \chi^{(1)}\mathbf{E}, \quad (1.3)$$

где $\chi^{(1)}$ – тензор линейной *диэлектрической восприимчивости*. В координатной форме уравнение (1.3) записывается в виде $P_i = \chi_{ij}^{(1)}E_j$. Тогда

$$\mathbf{D} = (1 + 4\pi\chi^{(1)})\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad (1.4)$$

где $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi^{(1)}$ – тензор линейной *диэлектрической проницаемости*.

Взяв ротор от третьего из уравнений (1.1), и подставив в него четвёртое уравнение, получаем

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}. \quad (1.5)$$

Используя известное соотношение для двойного векторного произведения, левую часть (1.5) можно представить в виде

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta\mathbf{E}. \quad (1.6)$$

В линейной изотропной среде дивергенция \mathbf{E} равна нулю, и учитывая (1.4), мы приходим к *волновому уравнению*:

$$-\Delta\mathbf{E} + \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.7)$$

Решением волнового уравнения является любая функция вида $\mathbf{E}(t - \mathbf{N} \cdot \mathbf{r}/v)$, где \mathbf{N} – единичный вектор в направлении распространения волны, v – фазовая скорость волны: $v = c/n$, n – *показатель преломления*: $n = \sqrt{\varepsilon}$. Часто произвольное решение волнового уравнения представляют в виде суммы *плоских монохроматических волн* – гармонических колебаний вида

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{e} \left[A e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} + A^* e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right], \quad (1.8)$$

В этом выражении \mathbf{e} – единичный вектор поляризации, ω – циклическая частота, \mathbf{k} – волновой вектор, A – комплексная амплитуда. Модуль волнового вектора связан с длиной волны света λ , частотой ν и круговой частотой ω соотношениями $k = 2\pi/\lambda = 2\pi\nu/c = n\omega/c$.

Представление волны (1.8) в виде суммы двух взаимно сопряжённых слагаемых обеспечивает вещественность поля напряжённости. В линейной оптике можно ограничиться одним из них: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}Ae^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$, и после проведения вычислений просто взять действительную часть от результата. Однако в уравнениях нелинейной оптики возникают члены вида E^2 , E^3 и т. п., поэтому необходимо в явном виде учитывать оба слагаемых. Следует также помнить, что в некоторых текстах уравнение (1.8) записывается без коэффициента $1/2$.

Для плоских волн вторая пара уравнений Максвелла сводится к соотношениям

$$[\mathbf{k}\mathbf{H}] = -\frac{\omega}{c}\mathbf{D}, \quad [\mathbf{k}\mathbf{E}] = \frac{\omega}{c}\mathbf{B}, \quad (1.9)$$

причём амплитуды магнитного и электрического поля связаны между собой: $\mu H^2 = \varepsilon E^2$.

Используя известное соотношение векторного анализа

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}), \quad (1.10)$$

и уравнения Максвелла (1.1), получим:

$$\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \frac{1}{4\pi} \left[\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (1.11)$$

В это уравнение входят величины: *плотность энергии* электромагнитного поля W и *плотность потока энергии* – *вектор Пойнтинга* \mathbf{S} :

$$W = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B}) = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon E^2 + \mu H^2), \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (1.12)$$

Следовательно, выражение (1.11) – это *уравнение непрерывности* для плотности электромагнитной энергии в среде (закон сохранения энергии):

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{S} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (1.13)$$

Физический смысл данного уравнения: изменение электромагнитной энергии в некотором элементарном объёме среды ($\partial W/\partial t$) равно потоку энергии ($-\operatorname{div} \mathbf{S}$) через границу этого объёма плюс диссипация энергии в тепло ($-\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$) из-за омического сопротивления току.

Интенсивность волны – это средняя величина плотности потока энергии. Поскольку среднее значение модуля вектора Пойнтинга за время больше периода волны в два раза меньше, чем его амплитуда: $\langle S \rangle = \frac{1}{2} \max S(t)$, то интенсивность выражается через амплитуду электрического поля следующим образом (для линейно поляризованной волны):

$$\begin{aligned} \text{СГС:} \quad I = \langle S \rangle &= \frac{nc}{8\pi} E^2, \\ \text{СИ:} \quad I &= \frac{n}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E^2 = \frac{n\varepsilon_0 c}{2} E^2, \quad I[\text{Вт/см}^2] = n \left(\frac{E[\text{В/см}]}{27} \right)^2. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Другое решение волнового уравнения – *сферическая волна*:

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} + \text{к.с.} \right], \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.15)$$

Если в волновом уравнении пренебречь второй производной амплитуды по продольной координате z : $\partial^2 A / \partial z^2 \ll k \cdot \partial A / \partial z$, то для волн вида $E(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}) e^{i(\omega t - kz)}$ оно сводится к *параксиальному волновому уравнению* (также известному как *параболическое уравнение Леонтовича*):

$$\Delta_{\perp} A - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad (1.16)$$

где Δ_{\perp} – «поперечный» лапласиан: $\Delta_{\perp} = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$. Данное уравнение описывает распространение (*дифракцию*) света в параксиальном приближении. Одним из решений этого уравнения является *гауссов пучок*, комплексная амплитуда которого равна

$$A(\mathbf{r}) = \frac{A_1}{q(z)} \exp \left[-ik \frac{\rho^2}{2q(z)} \right]; \quad \text{где } \rho^2 = x^2 + y^2, \quad q(z) = z + iz_R. \quad (1.17)$$

При этом параметр q определяет *радиус кривизны волнового фронта* $R(z)$ и *размер пучка* $w(z)$:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z + iz_R} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)} \quad (1.18)$$

То есть,

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} A_0 e^{i\omega t} \frac{w_0}{w(z)} \exp \left[-\frac{\rho^2}{w^2(z)} \right] \exp \left[-ikz - ik \frac{\rho^2}{2R(z)} + i\zeta(z) \right], \quad (1.19)$$

а параметры пучка определяются через длину перетяжки z_R соотношениями

$$\begin{aligned} w(z) &= w_0 \sqrt{1 + (z/z_R)^2}; & R(z) &= z \left[1 + (z_R/z)^2 \right]; \\ \zeta(z) &= \arctg(z/z_R); & w_0 &= \sqrt{\lambda z_R / \pi}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

В перетяжке (при $z = 0$) гауссов пучок имеет плоский волновой фронт, а на расстоянии $z \gg z_R$ радиус кривизны $R \approx z$, то есть он становится сферической волной, но с гауссовым

распределением интенсивности в поперечной плоскости. Интенсивность гауссова пучка определяется выражением

$$I(x, y, z) = I_0 \left[\frac{w_0}{w(z)} \right]^2 \exp \left[-\frac{2\rho^2}{w^2(z)} \right], \quad (1.21)$$

где I_0 – интенсивность на оси пучка в перетяжке. Мощность пучка равна

$$P = \int_0^\infty 2\pi\rho I(\rho, z) d\rho = \frac{\pi w_0^2}{2} I_0. \quad (1.22)$$

Расходимость гауссова пучка равна

$$2\theta_0 = 2 \left. \frac{w(z)}{z} \right|_{z \rightarrow \infty} = \frac{4}{\pi} \frac{\lambda}{2w_0}. \quad (1.23)$$

В конусе с углом при вершине $2\theta_0$ изучается около 86% мощности пучка.

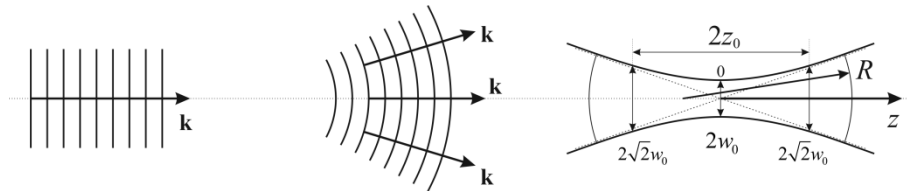


Рисунок 1.1 – Плоская волна, сферическая волна и гауссов пучок.

Нелинейная поляризация

Линейное волновое уравнение в виде (1.7) описывает все обычные оптические эффекты, связанные, например, с интерференцией, дифракцией. Однако очевидно, что простая линейная зависимость (1.3) поляризации от напряжённости поля справедлива только в слабых полях. В общем виде существует некоторая нелинейная зависимость $P = P(E)$, и её можно разложить в ряд по полю:

$$P(E) = \chi^{(1)}E + \chi^{(2)}E^2 + \chi^{(3)}E^3 + \dots = P^{(1)} + P^{(2)} + P^{(3)} + \dots = P^{(1)} + P^{NL}, \quad (1.24)$$

где $\chi^{(n)}$ – восприимчивость n -го порядка, $P^{(1)}$ – линейная составляющая поляризации. В векторном виде

$$\begin{aligned} P_i^{(2)} &= \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k, \\ P_i^{(3)} &= \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l, \end{aligned} \quad (1.25)$$

то есть $\chi^{(2)}$, $\chi^{(3)}$ – тензоры, соответственно, третьего и четвёртого порядка. Как всегда, в выражениях типа (1.25) предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

Тогда волновое уравнение приобретает вид

$$-\Delta \mathbf{E} + \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{NL}}{\partial t^2}. \quad (1.26)$$

Интерпретация этого уравнения такова: волна напряжённости электрического поля возбуждает в среде волну нелинейной поляризации, которая, в свою очередь, становится источником новых электромагнитных волн, вообще говоря, на других частотах.

Характерные значения восприимчивостей:

$$\begin{aligned}\chi^{(1)} &\sim 1, \\ \chi^{(2)} &\sim 10^{-9} - 10^{-8} \text{ ед. СГСЭ}, \\ \chi^{(3)} &\sim 10^{-14} - 10^{-15} \text{ ед. СГСЭ}.\end{aligned}\tag{1.27}$$

В системе СИ связь между поляризацией и полем обычно записывается в виде $P = \varepsilon_0[\chi^{(1)}E + \chi^{(2)}E^2 + \chi^{(3)}E^3 + \dots]$, где $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ Ф/м:

$$\begin{aligned}\chi^{(1)} &\sim 1, \\ \chi^{(2)} &\sim 10^{-12} - 10^{-11} \text{ м/В}, \\ \chi^{(3)} &\sim 10^{-22} - 10^{-21} \text{ м}^2/\text{В}^2.\end{aligned}\tag{1.28}$$

Перевод значений восприимчивости второго порядка из одной системы в другую производится по формуле $\chi^{(2)}[\text{СИ}] = \frac{4\pi}{3 \cdot 10^4} \chi^{(2)}[\text{СГСЭ}]$.

Оценить величину нелинейных восприимчивостей можно следующим образом. Характерная величина внутриатомного поля равна напряжённости поля элементарного заряда на расстоянии боровского радиуса (см. приложение Б):

$$E_a = \frac{e}{r_0^2} \approx 1,7 \cdot 10^7 \text{ ед. СГСЭ}, \quad \text{или} \quad E_a = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2} \approx 5 \cdot 10^{11} \text{ В/м},\tag{1.29}$$

Поляризации $P^{(n)}$ различного порядка должны быть примерно одинаковы по величине, если напряжённость поля световой волны равна E_a . То есть, $\chi^{(2)} \sim 1/E_a$, $\chi^{(3)} \sim (1/E_a)^2$, и т. д. Интенсивность, соответствующая напряжённости атомного поля, равна $I_a = 3,5 \cdot 10^{16}$ Вт/см². В обычных световых полях интенсивность много меньше I_a , поэтому $\chi^{(n)} \gg \chi^{(n+1)}E$, и ряд (1.24) быстро сходится. Это даёт возможность учитывать только несколько первых членов в разложении (1.24). Как будет показано в главе 2, нелинейной восприимчивостью второго порядка обладают только среды, не обладающие центральной симметрией.

Далее кратко рассмотрим некоторые нелинейно-оптические эффекты.

Эффекты, связанные с поляризацией второго порядка

Пусть на квадратично-нелинейную среду воздействует монохроматическое поле с частотой ω :

$$E(t) = A \cos \omega t.\tag{1.30}$$

Тогда отклик среды (нелинейная поляризация второго порядка) будет пропорционален полю во второй степени:

$$P^{(2)}(t) = \chi^{(2)} E(t)^2 = \frac{1}{2} \chi^{(2)} A^2 + \frac{1}{2} \chi^{(2)} A^2 \cos 2\omega t.\tag{1.31}$$

Это значит, что поляризация будет иметь постоянную составляющую $0,5\chi^{(2)}A^2$, и переменную $0,5\chi^{(2)}A^2\cos 2\omega t$, на удвоенной частоте 2ω . Первое слагаемое в (1.31) соответствует нелинейному процессу, который называется *оптическим выпрямлением*, а второе – *генерации второй гармоники* (рис. 1.2, 1.3).

Для описания эффектов второго порядка следует, в общем случае, представить входное поле в виде суммы двух волн разной частоты:

$$E(t) = \frac{1}{2} [A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t} + \text{к.с.}]. \quad (1.32)$$

Тогда нелинейная поляризация второго порядка имеет вид

$$P^{(2)}(t) = \chi^{(2)} E^2 = \frac{1}{4} \chi^{(2)} [A_1^2 e^{i2\omega_1 t} + A_2^2 e^{i2\omega_2 t} + 2A_1 A_2 e^{i(\omega_1 + \omega_2)t} + 2A_1 A_2^* e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} + \text{к.с.} + 2(|A_1|^2 + |A_2|^2)]. \quad (1.33)$$

То есть, происходит возбуждение волны поляризации на удвоенных частотах $2\omega_{1,2}$ (генерация второй гармоники, ГВГ), разностной $\omega_1 - \omega_2$ (генерация разностной частоты, ГРЧ), суммарной $\omega_1 + \omega_2$ (генерация суммарной частоты, ГСЧ), и нулевой (оптическое выпрямление) частотах (рис. 1.4).

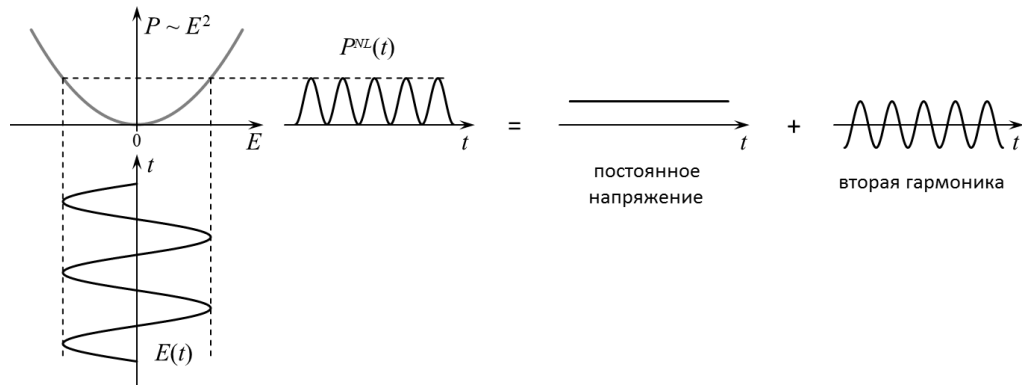


Рисунок 1.2 – Поляризация среды второго порядка.

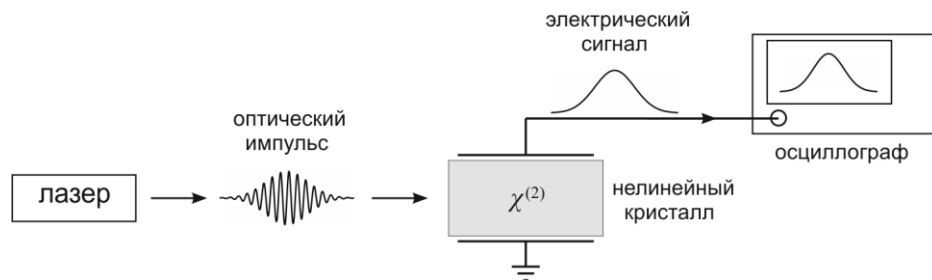


Рисунок 1.3 – Демонстрация оптического выпрямления.

С квантовой точки зрения нелинейный процесс преобразования частоты выглядит следующим образом. Например, при генерации второй гармоники, можно считать, что два фотона исходной частоты ω одновременно поглощаются в среде, переводя систему на виртуальный уровень с энергией $2\hbar\omega$, после чего система релаксирует с этого уровня в основное состояние с излучением фотона частотой 2ω .

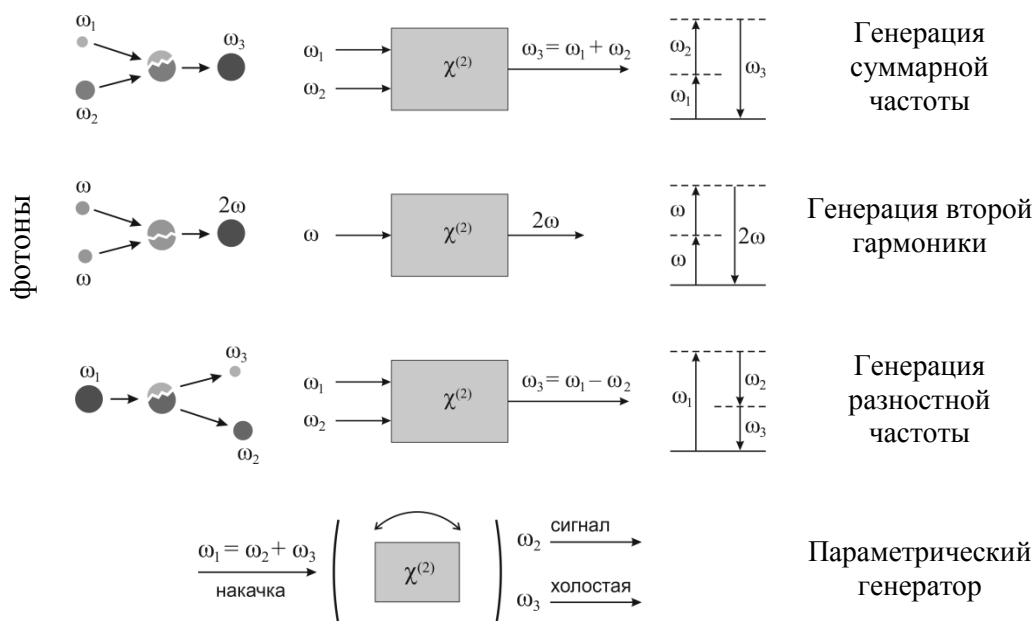


Рисунок 1.4 – Схематическое представление нелинейно-оптических процессов второго порядка.

Эффекты, связанные с поляризацией третьего порядка

Пусть на вход кубически-нелинейной среды падает волна с частотой ω :

$$E(t) = A \cos \omega t . \tag{1.34}$$

Тогда поляризация третьего порядка зависит от времени следующим образом:

$$P^{(3)}(t) = \chi^{(3)} E(t)^3 = \frac{1}{4} \chi^{(3)} A^3 \cos 3\omega t + \frac{3}{4} \chi^{(3)} A^3 \cos \omega t . \tag{1.35}$$

То есть, происходит *генерация третьей гармоники* (ГТГ) и переизлучение на исходной частоте (*самовоздействие света*) – см. рис. 1.5 и 1.6 а. Поскольку, как правило, $\chi^{(3)} E^3 \ll \chi^{(2)} E^2$, то эффект ГТГ в кубически-нелинейной среде очень мал, и на практике третью гармонику лазерного излучения получают путём последовательного удвоения частоты $\omega + \omega \rightarrow 2\omega$, а затем сложения волн первой и второй гармоники: $\omega + 2\omega \rightarrow 3\omega$ в квадратично-нелинейной среде.

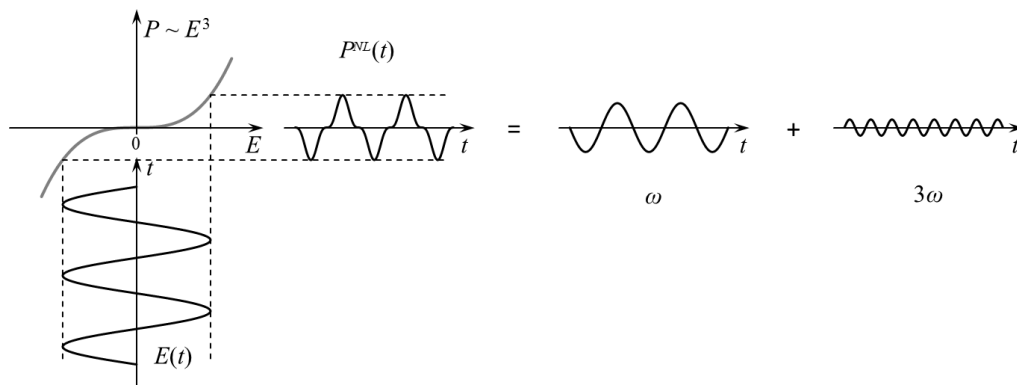


Рисунок 1.5 – Поляризация среды третьего порядка.

В общем случае следует рассматривать оптическое поле как сумму трёх волн:

$$E(t) = \frac{1}{2} (A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t} + A_3 e^{i\omega_3 t} + \text{к.с.}) \quad (1.36)$$

Тогда будут возбуждаться колебания поляризации на частотах ω_1 , ω_2 , ω_3 , $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$, $\omega_1 + \omega_2 - \omega_3$, $\omega_1 + \omega_3 - \omega_2$, $\omega_2 + \omega_3 - \omega_1$, $2\omega_1 \pm \omega_2$, $2\omega_1 \pm \omega_3$, $2\omega_2 \pm \omega_1$, $2\omega_2 \pm \omega_3$, $2\omega_3 \pm \omega_1$, $2\omega_3 \pm \omega_2$, $3\omega_1$, $3\omega_2$, $3\omega_3$. Два из этих процессов схематически показаны на рис. 1.6 б.

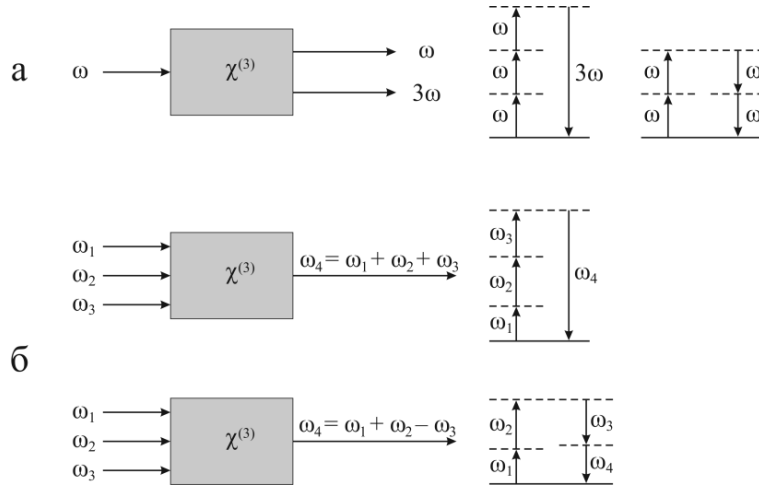
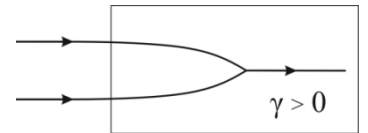


Рисунок 1.6 – Схематическое представление нелинейно-оптических процессов третьего порядка.

Второе слагаемое в правой части уравнения (1.35) описывает *самовоздействие* света. В простейшем случае можно показать, что оно сводится к изменению показателя преломления пропорционально интенсивности света:

$$n = n_0 + \gamma I, \quad \text{где} \quad \gamma = \frac{12\pi^2 \chi^{(3)}}{n_0^2 c}. \quad (1.37)$$

Если нелинейный коэффициент $\gamma > 0$, то показатель преломления в центре пучка, где интенсивность максимальна, больше, чем на периферии, поэтому пучок сходится к оси. Этот процесс называется *самофокусировкой*. В противном случае, при $\gamma < 0$, происходит *самодефокусировка* излучения.



Рассмотренные выше нелинейно-оптические эффекты относятся к *параметрическим* явлениям (в широком смысле этого слова). Параметрическим называется процесс, в котором среда пассивна, то есть, она не обменивается энергией со световыми волнами. Волны различных частот могут обмениваться энергией друг с другом, однако их полная энергия не меняется. Параметрическим процессам посвящены главы 2-7 данной книги. Далее мы рассмотрим некоторые непараметрические нелинейные явления.

Непараметрические нелинейно-оптические явления

Насыщающееся поглощение. Во многих материалах коэффициент поглощения уменьшается с увеличением интенсивности лазерного излучения. Часто эту зависимость можно представить в виде

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + I/I_s}, \quad (1.38)$$

где α_0 – коэффициент поглощения слабого сигнала, I_s – интенсивность насыщения (эта формула справедлива, например, при однородном уширении атомного перехода). Причиной этого явления может быть перераспределение населённости энергетических уровней среды. Если излучение переводит существенную долю атомов из основного в возбуждённое состояние, то поглощение, которое пропорционально населённости основного состояния, уменьшается.

Одно из применений этого эффекта – пассивные затворы для модуляции добротности и синхронизации мод в лазерах. Другое применение – бистабильные оптические элементы (рис. 1.7), обладающие гистерезисом пропускания. Их можно использовать в качестве логических элементов оптических вычислительных устройств.

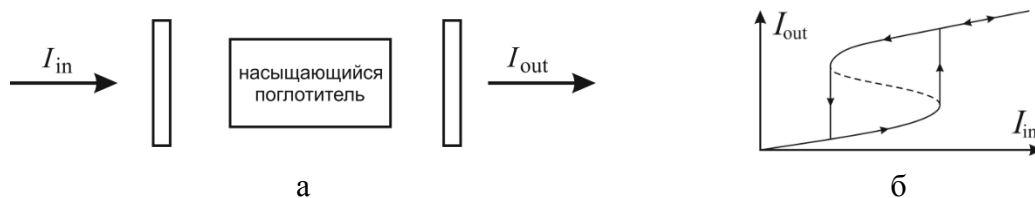


Рисунок 1.7 – Бистабильный оптический элемент (а); зависимость интенсивности выходного излучения от входного (б).

Многофотонное поглощение. В процессе многофотонного поглощения атом переходит из основного состояния в возбуждённое при одновременном поглощении двух и более фотонов. При этом сечение поглощения (отношение мощности поглощённого излучения к интенсивности падающей волны), в отличие от сечения «обычного», линейного поглощения, зависит от интенсивности. Например, для двухфотонного поглощения,

$$\sigma = \sigma^{(2)} I. \quad (1.39)$$

Следовательно, скорость перехода зависит от интенсивности квадратично:

$$R = \frac{\sigma I}{\hbar \omega} = \frac{\sigma^{(2)} I^2}{\hbar \omega}. \quad (1.40)$$

Заметьте, что параметрические нелинейные процессы, показанные на рис. 1.4 и 1.6, также являются по своей сути многофотонными.

Двухфотонное поглощение – полезный спектроскопический метод для определения положения атомных уровней, которые не связаны с основным состоянием однофотонными переходами.

Вынужденное рассеяние. Вынужденное рассеяние отличается от спонтанного тем, что падающее лазерное излучение, интерферируя с рассеянной волной, «раскачивает» неоднородности среды, на которых происходит рассеяние. Поэтому интенсивность вынужденного рассеяния может быть на много порядков больше, чем спонтанного. Примеры вынужденного рассеяния: комбинационное (ВКР) – рассеяние на колебаниях молекул среды, Манделъштама-Бриллюэна (ВРМБ) – на флуктуациях плотности (фононах), рэлеевское, и т. д.

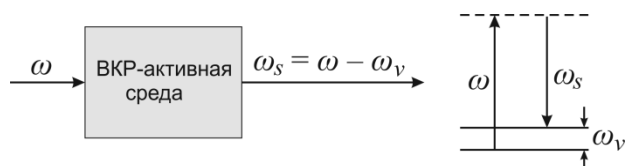


Рисунок 1.8 – Вынужденное комбинационное рассеяние.

На основе процессов вынужденного рассеяния можно создавать лазеры (например, распространены рамановские лазеры на ВКР). При определённых условиях при вынужденном рассеянии наблюдается интересный эффект – *обращение волнового фронта*.

Фазовый синхронизм

В обычных световых полях $\chi^{(3)}E^2 \ll \chi^{(2)}E \ll \chi^{(1)} \sim 1$, поэтому нелинейные эффекты весьма малы. Вскоре после создания лазера, в 1961 г. П. Франкен с сотр.¹ зарегистрировал генерацию второй гармоники, сфокусировав излучение рубинового лазера в кристалл кварца (рис. 1.9). Эффективность преобразования была порядка 10^{-6} . Однако вскоре стало понятно, что эффект можно усилить, если осуществить кумулятивное взаимодействие.

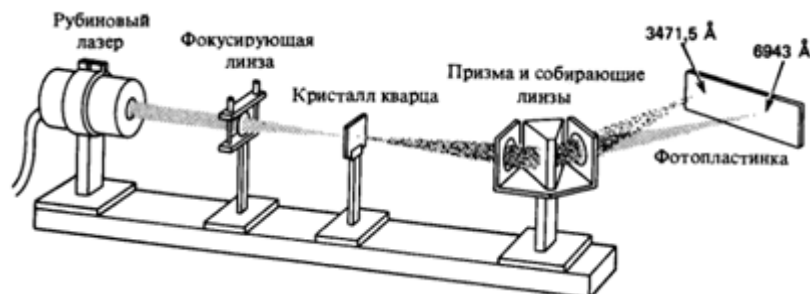


Рисунок 1.9 – Первый эксперимент по генерации второй гармоники.

Рассмотрим, для примера, процесс генерации второй гармоники. На вход нелинейной среды длиной L подаётся волна основного излучения

$$E_{\omega}(z, t) = A_1 \cos(\omega t - k_1 z), \quad (1.41)$$

которая возбуждает колебания нелинейной поляризации на удвоенной частоте:

$$P_{2\omega}(z, t) = \chi^{(2)} E_{\omega}^2 = \frac{1}{2} \chi^{(2)} A_1^2 \cos(2\omega t - 2k_1 z). \quad (1.42)$$

¹ Franken P. A. et al. Generation of Optical Harmonics, Phys. Rev. Lett., 7, 118 (1961).

Волна излучения второй гармоники, возникшая в точке z , на выходе среды будет иметь вид

$$E_{2\omega}(L, z, t) = A \cos[2\omega t - 2k_1 z - k_2(L - z)] = A \cos[2\omega t + \Delta k z - k_2 L], \quad (1.43)$$

где $\Delta k = k_2 - 2k_1$ – расстройка волновых векторов, A – константа, характеризующая амплитуды волн 2ω (пропорциональна $\chi^{(2)} \cdot (A_1)^2$). Эти волны складываются, и на выходе дают поле

$$\begin{aligned} E_{2\omega}(L, t) &= \int_0^L E_{2\omega}(L, z, t) dz \\ &= \frac{A}{\Delta k} [\sin(2\omega t + \Delta k L - k_2 L) - \sin(2\omega t - k_2 L)] \\ &= \frac{2A}{\Delta k} \sin \frac{\Delta k L}{2} \cos \left(2\omega t - k_2 L + \frac{\Delta k L}{2} \right), \end{aligned} \quad (1.44)$$

то есть,

$$E_{2\omega}(L, t) \propto L \frac{\sin(\Delta k L / 2)}{\Delta k L / 2} \quad (1.45)$$

– типичная интерференционная зависимость (функция $\sin x / x \equiv \text{sinc } x$ возникает всегда, когда есть сумма гармонических колебаний с фазой, равномерно распределённой в некотором интервале – например, результат дифракции на щели в дальней зоне, или спектр прямоугольного импульса).

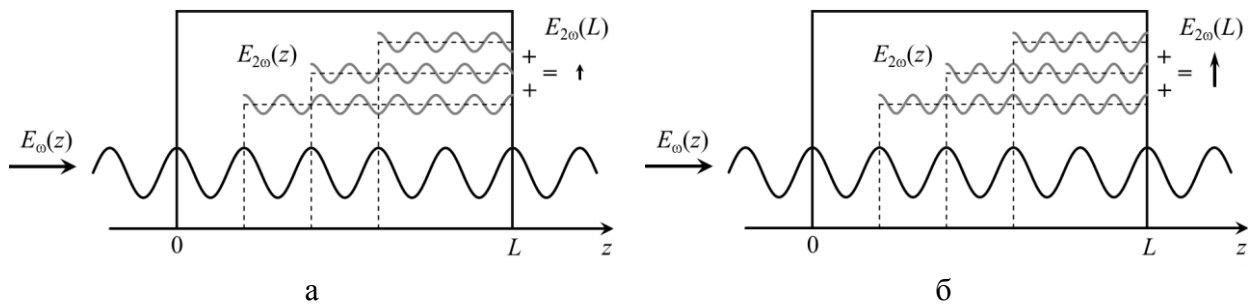


Рисунок 1.10 – Когерентное сложение волн 2ω , возникших в различных частях нелинейного кристалла: а) при $\Delta k \neq 0$ – на выходе кристалла волны складываются с различными фазами; б) при $\Delta k = 0$ – волны складываются с одинаковыми фазами.

При постоянной длине кристалла интенсивность второй гармоники зависит от Δk как функция sinc^2 (рис. 1.11 а), а при постоянном Δk зависит от длины нелинейной среды как синус в квадрате (рис. 1.11 б).

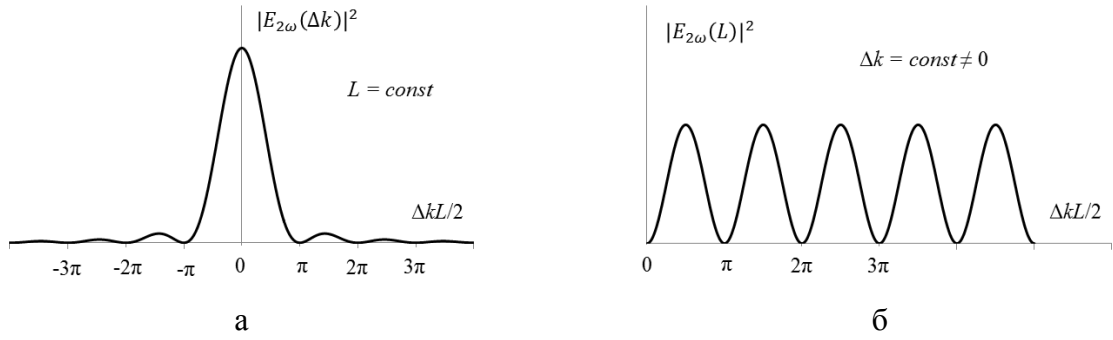


Рисунок 1.11 – Иллюстрация фазового синхронизма¹.

Следовательно, при ненулевой фазовой расстройке происходит периодическая перекачка энергии из первой во вторую гармонику и обратно. Длина L_c , на которой интенсивность излучения второй гармоники достигает максимума называется *длиной когерентности*:

$$L_c = \frac{\pi}{\Delta k} \quad (1.46)$$

При $\Delta k = 0$ интенсивность излучения на второй гармонике растёт $\sim L^2$ (при малых коэффициентах преобразования, когда интенсивность основного излучения можно считать постоянной). Это условие означает, что для эффективного нелинейного взаимодействия (накопления излучения второй гармоники на выходе кристалла) требуется равенство фазовых скоростей волн 1ω и 2ω .

Равенство $\Delta k = 0$ носит название условия *фазового синхронизма*. При генерации суммарной или разностной частоты ($\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$) оно имеет вид $k_3 = k_1 + k_2$ (скалярный синхронизм, то есть, при коллинеарном распространении всех трёх волн), или, в общем виде, $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ (векторный синхронизм, когда волновые вектора имеют разное направление).

Открытие^{2,3} условия фазового синхронизма (которому нет аналогов в системах с сосредоточенными параметрами, вроде радиотехнических цепей) в начале 1960-х гг. и разработка методов его достижения⁴ позволила создать практически пригодные преобразователи частоты, и обеспечила быстрое развитие прикладной нелинейной оптики.

¹ Здесь функция “sinc” определяется как $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$. Иногда её определяют как $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/\pi x$.

² Хохлов Р. В. О распространении волн в нелинейных диспергирующих линиях, Радиотехн. и электрон., **6**, №6, 1116 (1961).

³ Armstrong J. A., Bloembergen N., Ducuing J., Pershan P. S. Interactions Between Light Waves in a Nonlinear Dielectric, Phys. Rev., **127**, 1918 (1962).

⁴ Giordmaine J. A. Mixing of light beams in crystals, Phys. Rev. Letts., **8**, 19. (1962).

2. Нелинейная поляризация

Диэлектрик, помещенный во внешнее электрическое поле, *поляризуется* под действием этого поля. Поляризацией диэлектрика называется процесс приобретения им отличного от нуля макроскопического дипольного момента.

Степень поляризации диэлектрика характеризуется векторной величиной, которая называется поляризованностью или вектором поляризации (**P**). Поляризация определяется как электрический момент единицы объема:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i, \quad (2.1)$$

где N – число молекул в объеме ΔV , \mathbf{p} – дипольный момент молекулы.

В диэлектриках различают следующие типы поляризации: электронную, ориентационную и ионную, или решеточную (для ионных кристаллов).

Электронный тип поляризации характерен для диэлектриков с неполярными молекулами. Во внешнем электрическом поле (рис. 2.1 а) положительные заряды внутри молекулы смещаются по направлению поля, а отрицательные в противоположном направлении, в результате чего молекулы приобретают дипольный момент, направленный вдоль внешнего поля.

Поляризуемость частиц при электронной поляризации не зависит от температуры, а диэлектрическая проницаемость уменьшается с повышением температуры из-за теплового расширения диэлектрика и уменьшения числа частиц в единице объема

Ионный тип поляризации характерен для ионных кристаллов (например, NaCl и т. п.), в которых, в отсутствие внешнего поля, дипольный момент каждой элементарной ячейки равен нулю (рис. 2.1 б), а под влиянием внешнего электрического поля положительные и отрицательные ионы смещаются в противоположные стороны. Каждая ячейка кристалла становится диполем, кристалл поляризуется.

Ориентационная (вращательная) поляризация проявляется в полярных диэлектриках, молекулы которого обладают собственным дипольным моментом. В отсутствие внешнего поля молекулярные диполи ориентированы случайным образом, так что макроскопический момент диэлектрика равен нулю. Если поместить такой диэлектрик во внешнее электрическое поле, то на молекулу-диполь будет действовать момент сил (рис. 2.1 в), стремящийся ориентировать ее дипольный момент в направлении напряженности поля. Однако полной ориентации не происходит, поскольку тепловое движение препятствует упорядочиванию молекул под действием внешнего электрического поля.

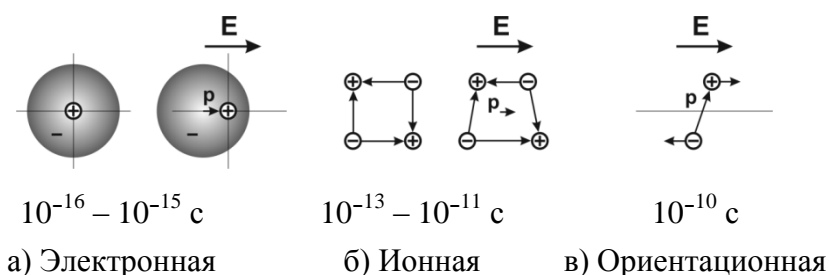


Рисунок 2.1 – Поляризация диэлектрика.

На рисунках 2.1 также указано характерное время отклика каждого из типов поляризации. Наименее инерционным является процесс электронной поляризации, поскольку масса электрона много меньше массы атомов.

Ангармонический осциллятор

Последовательная теория электрической восприимчивости строится на основе квантовой механики. В нашем курсе нелинейно-оптические взаимодействия рассматриваются с точки зрения классической физики, на основе уравнений Максвелла. В таком «феноменологическом» подходе восприимчивости $\chi^{(n)}$ считаются эмпирически известными величинами. Однако некоторые характерные свойства отклика нелинейной среды на световую волну можно установить из анализа движения классического осциллятора в переменном электромагнитном поле.

Рассмотрим движение одномерного классического ангармонического осциллятора (электрона в атоме). Уравнение движения электрона в переменном электрическом поле $E(t)$:

$$m\ddot{x} + 2\gamma m\dot{x} = -eE(t) + F(x), \quad (2.2)$$

где γ – параметр, определяющий затухание, а F – возвращающая сила, которая равна производной от потенциальной энергии. Потенциал гармонического осциллятора пропорционален x^2 . В общем же случае следует учесть нелинейные поправки низшего порядка:

$$U = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{3}max^3 + \frac{1}{4}mbx^4, \quad (2.3)$$

где ω_0 – резонансная частота, a и b – нелинейные коэффициенты. В центрально-симметричной среде потенциал должен быть чётной функцией координаты: $U(-x) = U(x)$ (рис. 2.2 б), поэтому в него входят только чётные степени x (т. е., $a = 0$). В средах же не обладающих центром симметрии наибольший нелинейный член – третьего порядка (рис. 2.2 а), поэтому возвращающая сила равна

$$F = -dU/dx = -m\omega_0^2 x - max^2, \quad (2.4)$$

и уравнение движения приобретает вид

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + ax^2 = -eE(t)/m. \quad (2.5)$$

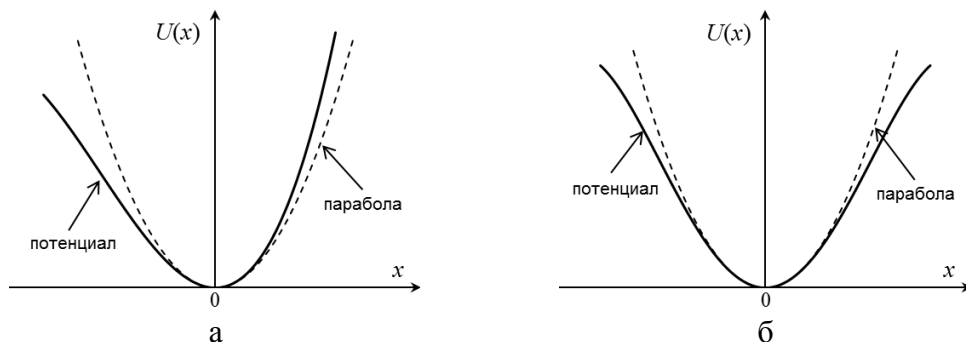


Рисунок 2.2 – Потенциал электрона в среде без центра симметрии (а), и в центрально-симметричной среде (б).

Нелинейное уравнение движения (2.5) будем решать с помощью теории возмущения. Для этого представим электрическое поле в виде суммы двух частотных компонент:

$$E(t) = \frac{1}{2} (E_1 e^{i\omega_1 t} + E_2 e^{i\omega_2 t} + \text{к.с.}), \quad (2.6)$$

и разложим решение $x(t)$ по малому параметру λ :

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + ax^2 = -\lambda e E(t)/m \quad (2.7)$$

$$x = \lambda x^{(1)} + \lambda^2 x^{(2)} + \lambda^3 x^{(3)} + \dots \quad (2.8)$$

Получим систему *линейных* уравнений в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(1)} + 2\gamma\dot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} &= -eE(t)/m, \\ \ddot{x}^{(2)} + 2\gamma\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + a[x^{(1)}]^2 &= 0, \\ \ddot{x}^{(3)} + 2\gamma\dot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} + 2ax^{(1)}x^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Решение уравнения первого порядка (это уравнение для классического *линейного* осциллятора) имеет вид

$$x^{(1)}(t) = \frac{1}{2} [x^{(1)}(\omega_1) e^{i\omega_1 t} + x^{(1)}(\omega_2) e^{i\omega_2 t} + \text{к.с.}], \quad (2.10)$$

где амплитуды смещения равны

$$x^{(1)}(\omega_j) = -\frac{e}{m} \frac{E_j}{D(\omega_j)}, \quad \text{где } D(\omega_j) = \omega_0^2 - \omega_j^2 + 2i\omega_j\gamma \quad (2.11)$$

Линейная поляризация должна быть пропорциональна полю $E(t)$:

$$P^{(1)}(t) = \chi^{(1)} E(t) = \frac{1}{2} [P^{(1)}(\omega_1) e^{i\omega_1 t} + P^{(1)}(\omega_2) e^{i\omega_2 t} + \text{к.с.}], \quad (2.12)$$

где

$$P^{(1)}(\omega_j) = \chi^{(1)}(\omega_j) E(\omega_j) = -Ne x^{(1)}(\omega_j), \quad (2.13)$$

где N – количество электронов в единице объёма. Следовательно, для линейной восприимчивости можем записать

$$\chi^{(1)}(\omega_j) = \frac{Ne^2}{mD(\omega_j)}. \quad (2.14)$$

График этой функции приведён на рисунке 2.3. Действительная часть восприимчивости определяет показатель преломления: $n = \sqrt{1 + 4\pi \text{Re } \chi^{(1)}}$, тогда как мнимая часть отвечает за поглощение. Вдали от резонанса (при $|\omega - \omega_0| \gg \gamma$) для оптических материалов характерна нормальная (положительная) дисперсия, то есть, чем больше частота, тем больше показатель преломления, а также малое поглощение. Вблизи же резонанса наблюдается *аномальная дисперсия* ($dn/d\omega < 0$) и высокое поглощение.

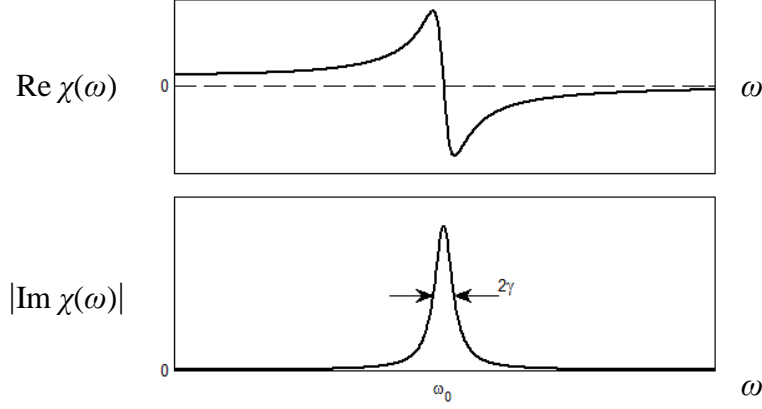


Рисунок 2.3 – Зависимость линейной восприимчивости от частоты.

Координату второго порядка $x^{(2)}$ найдём, подставив решение для линейной части смещения (2.10)-(2.11) во второе из уравнений (2.9). Она будет иметь компоненты на суммарных частотах $2\omega_1$, $2\omega_2$, $\omega_1 + \omega_2$, $\omega_1 - \omega_2$, 0. Соответствующие амплитуды равны

$$\begin{aligned}
 x^{(2)}(2\omega_j) &= \frac{-a(e/m)^2 E_j^2}{2D(2\omega_j)D^2(\omega_j)}, \\
 x^{(2)}(\omega_1 + \omega_2) &= \frac{-a(e/m)^2 E_1 E_2}{D(\omega_1 + \omega_2)D(\omega_1)D(\omega_2)}, \\
 x^{(2)}(\omega_1 - \omega_2) &= \frac{-a(e/m)^2 E_1 E_2^*}{D(\omega_1 - \omega_2)D(\omega_1)D(-\omega_2)}, \\
 x^{(2)}(0) &= \frac{-a(e/m)^2 E_1 E_1^*}{D(0)D(\omega_1)D(-\omega_1)} + \frac{-a(e/m)^2 E_2 E_2^*}{D(0)D(\omega_2)D(-\omega_2)}.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Нелинейная поляризация для генерации второй гармоники записывается как

$$P^{(2)}(2\omega_j) = \frac{1}{2} \chi^{(2)}(2\omega_j, \omega_j, \omega_j) E^2(\omega_j) = -Nex^{(2)}(2\omega_j), \tag{2.16}$$

следовательно частотная зависимость восприимчивости имеет вид

$$\chi^{(2)}(2\omega_j, \omega_j, \omega_j) = \frac{aN(e^3/m^2)}{D(2\omega_j)D^2(\omega_j)} = \frac{ma}{N^2 e^3} \chi^{(1)}(2\omega_j) [\chi^{(1)}(\omega_j)]^2 \tag{2.17}$$

Аналогично для других частот:

$$\begin{aligned}
 \chi^{(2)}(\omega_1 + \omega_2, \omega_1, \omega_2) &= \frac{aN(e^3/m^2)}{D(\omega_1 + \omega_2)D(\omega_1)D(\omega_2)} = \frac{ma}{N^2 e^3} \chi^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) \chi^{(1)}(\omega_1) \chi^{(1)}(\omega_2), \\
 \chi^{(2)}(\omega_1 - \omega_2, \omega_1, \omega_2) &= \frac{aN(e^3/m^2)}{D(\omega_1 - \omega_2)D(\omega_1)D(-\omega_2)} = \frac{ma}{N^2 e^3} \chi^{(1)}(\omega_1 - \omega_2) \chi^{(1)}(\omega_1) \chi^{(1)}(-\omega_2), \\
 \chi^{(2)}(0, \omega_1, -\omega_1) &= \frac{aN(e^3/m^2)}{D(0)D(\omega_1)D(-\omega_1)} = \frac{ma}{N^2 e^3} \chi^{(1)}(0) \chi^{(1)}(\omega_1) \chi^{(1)}(-\omega_1)
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Таким образом, нелинейная восприимчивость зависит от каждой из своих частот так же, как линейная.

Для *центрально-симметричной среды* минимальный порядок нелинейной поправки к потенциалу – четвёртый, а к возвращающей силе – третий. Уравнение движения приобретает вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x - bx^3 = -eE(t)/m \quad (2.19)$$

а потенциал имеет симметричную форму, как на рис. 2.2 б. Если повторить выкладки по теории возмущений, получится следующее выражение для восприимчивости третьего порядка:

$$\chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_q, \omega_m, \omega_n, \omega_p) = \frac{Nbe^4 [\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}]}{3m^3 D(\omega_q)D(\omega_m)D(\omega_n)D(\omega_p)}, \quad \omega_q = \omega_m + \omega_n + \omega_p, \quad (2.20)$$

или, через линейные восприимчивости:

$$\chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_q, \omega_m, \omega_n, \omega_p) = \frac{bm}{3N^3 e^4} \chi^{(1)}(\omega_q) \chi^{(1)}(\omega_m) \chi^{(1)}(\omega_n) \chi^{(1)}(\omega_p) \times [\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}] \quad (2.21)$$

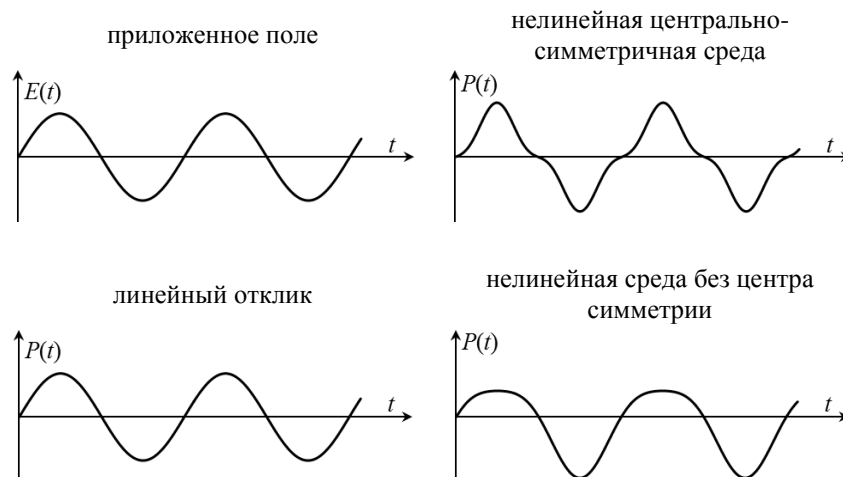


Рисунок 2.4 – Линейный и нелинейный отклик среды на приложенное поле.

Р. Миллером¹ была замечена следующая эмпирическая закономерность: величина

$$\frac{\chi^{(2)}(\omega_1 + \omega_2, \omega_1, \omega_2)}{\chi^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) \chi^{(1)}(\omega_1) \chi^{(1)}(\omega_2)} \quad (2.22)$$

приблизительно одинакова для всех сред без центра симметрии (*правило Миллера*). Из формул (2.18) видно, что она равна $ma/N^2 e^3$, то есть, константа, поскольку плотность атомов N практически постоянна для веществ в конденсированном состоянии ($N \sim 10^{22} \text{ см}^{-3}$). Значение a можно оценить по порядку величины, если считать, что линейная и нелинейная составляющие возвращающей силы одинаковы при смещении

¹ Miller R. C. Optical second harmonic generation in piezoelectric crystals, Appl. Phys. Lett., 5, 17 (1964).

электрона от положения равновесия на расстояние порядка постоянной решётки $d \approx N^{-1/3}$: $m\omega_0^2 d = mad^2$, то есть $a = \omega_0^2/d$. Так получаем:

$$\chi^{(2)} = \frac{e^3}{m^2 \omega_0^4 d^4} \quad (2.23)$$

Подставив значения $d = 3 \text{ \AA}$, $\omega_0 = 10^{16} \text{ с}^{-1}$, получаем оценку $\chi^{(2)} \approx 1,6 \cdot 10^{-8}$ ед. СГСЭ – сравните с (1.27). Аналогично, для восприимчивости третьего порядка имеем

$$b = \frac{\omega_0^2}{d^2}, \quad \chi^{(3)} \approx \frac{Nbe^4}{m^3 \omega_0^8} = \frac{e^4}{m^3 \omega_0^6 d^5} \approx 3 \cdot 10^{-15} \text{ ед. СГСЭ} \quad (2.24)$$

Из правила Миллера следует, что высокоэффективные нелинейные материалы (с большим $\chi^{(n)}$) следует искать среди кристаллов с большим показателем преломления.

Свойства симметрии тензоров восприимчивости

Вектор нелинейной поляризации в квадратично-нелинейной среде равен

$$P_i(\omega_n + \omega_m) = \frac{1}{2} \sum_{jk} \sum_{nm} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_n + \omega_m, \omega_n, \omega_m) E_j(\omega_n) E_k(\omega_m). \quad (2.25)$$

Это значит, что в общем случае для описания взаимодействия следует знать 6 тензоров

$$\begin{aligned} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3, \omega_1, \omega_2), \quad \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3, \omega_2, \omega_1), \quad \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \omega_3, -\omega_2) \\ \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, -\omega_2, \omega_3), \quad \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_2, \omega_3, -\omega_1), \quad \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_2, -\omega_1, \omega_3) \end{aligned} \quad (2.26)$$

а также 6 аналогичных тензоров с отрицательными частотами (всего 12 тензоров), в каждом из которых по 27 чисел. То есть, следует определить $12 \times 27 = 324$ (комплексных) числа. Однако на вид тензоров восприимчивости накладывается ряд условий, которые значительно уменьшают число независимых параметров.

Вещественность полей. Поскольку электрическое поле и поляризация – вещественные величины, то, как следует из уравнения (2.25), отрицательно- и положительно-частотные составляющие восприимчивости должны удовлетворять соотношениям

$$\chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_n - \omega_m, -\omega_n, -\omega_m) = \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_n + \omega_m, \omega_n, \omega_m)^* \quad (2.27)$$

Внутренняя перестановочная симметрия. Если поменять местами последние индексы (вместе с соответствующими частотами), то поляризация не изменится, поэтому можно положить

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_n + \omega_m, \omega_n, \omega_m) = \chi_{ikj}^{(2)}(\omega_n + \omega_m, \omega_n, \omega_m). \quad (2.28)$$

Правило симметрии относительно перестановок внутренних индексов вводится для удобства вычислений, то есть, как соглашение. Иначе, можно было бы положить, например, что один из соответствующих компонентов равен нулю, а другой – в 2 раза больше, чтобы сумма (2.25) оставалась такой же.

Симметрии в непоглощающей среде. Если в нелинейной среде нет поглощения, то, во-первых, все компоненты тензоров восприимчивости вещественны, и во-вторых, они

обладают **полной перестановочной симметрией**. Это значит, что *все* частотные аргументы восприимчивости можно переставлять, вместе с соответствующими декартовыми индексами. При перестановке частот следует помнить, что знаки частот меняются при перестановке первой и любой другой частоты, а также, что первая частота всегда равна сумме двух других. Например, можно написать, что

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{jki}^{(2)}(-\omega_1 = \omega_2 - \omega_3) \quad (2.29)$$

В силу вещественности полей выражение в правой части (2.29) равно $\chi_{jki}^{(2)}(\omega_1 = -\omega_2 + \omega_3)^*$, и, вследствие вещественности $\chi^{(2)}$ в непоглощающей среде, равно $\chi_{jki}^{(2)}(\omega_1 = -\omega_2 + \omega_3)$. Таким образом,

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{jki}^{(2)}(\omega_1 = -\omega_2 + \omega_3). \quad (2.30)$$

Аналогично, например, можно показать, что

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{kij}^{(2)}(\omega_2 = \omega_3 - \omega_1). \quad (2.31)$$

Клейнмановская симметрия¹. Обычно частоты взаимодействующих волн много меньше резонансных частот среды. В этом случае нелинейную восприимчивость можно считать независимой от частоты (бездисперсионной), и условие полной перестановочной симметрии дополняется тем, что индексы тензора восприимчивости можно переставлять независимо от частот. Например,

$$\begin{aligned} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) &= \chi_{jki}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{kij}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \\ &= \chi_{ikj}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{jik}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{kji}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Сокращённая запись. На практике для описания нелинейных взаимодействий второго порядка используется тензор $d_{ijk} = \frac{1}{2} \chi_{ijk}^{(2)}$. При выполнении условия Клейнмана, а также при генерации второй гармоники, этот тензор симметричен по последним двум индексам, поэтому у него 18 независимых компонент, и его можно записать в сокращённом (двумерном 3×6) виде:

$$d_{il} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Соответствие между индексами l и jk :

jk :	11	22	33	23,32	31,13	12,21
l :	1	2	3	4	5	6

В случае Клейнмановской симметрии, например, $d_{12} \equiv d_{122} = d_{212} \equiv d_{16}$, и т. д., и остаётся только 10 независимых компонент:

$$d_{il} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{16} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{14} & d_{12} \\ d_{15} & d_{24} & d_{33} & d_{23} & d_{13} & d_{14} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

¹ Kleinman D. Theory of Second Harmonic Generation of Light, Phys. Rev., **128**, 1761 (1962).

Можно описать нелинейную поляризацию при генерации второй гармоники матричным уравнением

$$\begin{bmatrix} P_x(2\omega) \\ P_y(2\omega) \\ P_y(2\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{16} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{14} & d_{12} \\ d_{15} & d_{24} & d_{33} & d_{23} & d_{13} & d_{14} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E_x(\omega)^2 \\ E_y(\omega)^2 \\ E_z(\omega)^2 \\ 2E_y(\omega)E_z(\omega) \\ 2E_x(\omega)E_z(\omega) \\ 2E_x(\omega)E_y(\omega) \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

а при генерации суммарной или разностной частоты (при условии Клеймана):

$$\begin{bmatrix} P_x(\omega_3) \\ P_y(\omega_3) \\ P_y(\omega_3) \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{16} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{14} & d_{12} \\ d_{15} & d_{24} & d_{33} & d_{23} & d_{13} & d_{14} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E_x(\omega_1)E_x(\omega_2) \\ E_y(\omega_1)E_y(\omega_2) \\ E_z(\omega_1)E_z(\omega_2) \\ E_y(\omega_1)E_z(\omega_2) + E_z(\omega_1)E_y(\omega_2) \\ E_x(\omega_1)E_z(\omega_2) + E_z(\omega_1)E_x(\omega_2) \\ E_x(\omega_1)E_y(\omega_2) + E_y(\omega_1)E_x(\omega_2) \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Симметрия кристаллов. В теории групп доказывается, что может существовать 14 типов кристаллических решёток (сингоний) – см. таблицу 2.1.

Тензор линейной восприимчивости выбором направления координатных осей всегда можно привести к диагональному виду:

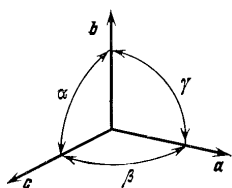
$$\begin{array}{ccc} \text{двухосные} & \text{одноосные} & \text{изотропные} \\ \chi^{(1)} = \begin{bmatrix} \chi_1^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_2^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_3^{(1)} \end{bmatrix}, & \chi^{(1)} = \begin{bmatrix} \chi_1^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_1^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_3^{(1)} \end{bmatrix}, & \chi^{(1)} = \begin{bmatrix} \chi_1^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_1^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_1^{(1)} \end{bmatrix} \end{array} \quad (2.37)$$

С точки зрения линейных оптических свойств кристаллы делятся на изотропные (в которых все три главных значения тензора $\chi^{(1)}$ равны между собой), одноосные (в которых $\chi_1^{(1)} = \chi_2^{(1)} \neq \chi_3^{(1)}$) и двухосные ($\chi_1^{(1)} \neq \chi_2^{(1)} \neq \chi_3^{(1)}$). Подробнее об оптической анизотропии см. главу 4.

Все кристаллы делятся на 32 класса, в соответствии с присущей им симметрией. Только 21 из них не обладает центральной симметрией, и, соответственно, может иметь ненулевую восприимчивость второго порядка $\chi^{(2)}$. Симметрия среды приводит к тому, что количество независимых компонентов тензора нелинейной восприимчивости намного уменьшается. В таблице 2.2 приведены формы матриц d_{il} .

Таблица 2.1 – Типы кристаллических решёток¹.

	Сингония	Решётка					Кристаллические классы
		примитивная	базоцентрированная	объёмноцентрированная	гранецентрированная	ромбоэдрическая	
		<i>P</i>	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>F</i>	<i>R</i>	
Двухосные	Триклинная						1, $\bar{1}$
	$a \neq b \neq c; \alpha \neq \beta \neq \gamma$						
	Моноклинная						2, <i>m</i> , 2/ <i>m</i>
$a \neq b \neq c; \alpha = \gamma = 90^\circ \neq \beta$							
Орторомбическая							222 <i>mm</i> 2 <i>mmm</i>
	$a \neq b \neq c; \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$						
Одноосные	Тетрагональная						4, $\bar{4}$, 422 4 <i>mm</i> , $\bar{4}2m$ 4/ <i>m</i> 4/ <i>mmm</i>
	$a = b \neq c; \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$						
	Тригональная						3, 32 3 <i>m</i> $\bar{3}$, $\bar{3}m$
$a = b = c; \alpha = \beta = \gamma < 120^\circ, \neq 90^\circ$							
Гексагональная							6, $\bar{6}$ 622, 6 <i>mm</i> $\bar{6}m2$, 6/ <i>m</i> 6/ <i>mmm</i>
	$a = b \neq c; \alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$						
Изотропные	Кубическая						432, $\bar{4}3m$ 23 <i>m</i> 3, <i>m</i> 3 <i>m</i>
		$a = b = c; \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$					



¹ Киттель Ч. Введение в физику твёрдого тела. М., 1978.

Таблица 2.2 – Вид тензоров d_{ij} для 21 кристаллического класса без центра симметрии [4].

Двухосные	класс 1	класс 2	класс $mm2$
	класс t	класс 222	
Одноосные	класс 3	класс $3m$	класс $\bar{6}$
	класс $\bar{6}m2$	классы 6 и 4	классы $6mm$ и $4mm$
	классы 622 и 422	класс $\bar{4}$	класс 32
		класс $\bar{4}2m$	
Изотропные	классы $\bar{4}3m$ и 23	класс 432	

Обозначения: точки – нулевой коэффициент; кружки: ненулевой коэффициент; квадраты: коэффициенты, равные нулю при выполнении условия Клейнмана; соединённые элементы равны между собой (белые – равны с обратным знаком); штриховые соединения: только при выполнении условия Клейнмана.

Например, для кристаллов класса $3m$ (к которым принадлежит, распространённый нелинейный материал ниобат лития LiNbO_3) матрица нелинейной восприимчивости второго порядка (при выполнении условия Клейнмана) имеет вид

$$d(3m) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} - d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{15} & d_{15} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

то есть, в ней всего 3 независимых параметра. Для класса $\bar{4}2m$ (например, дигидрофосфат калия KN_2PO_4 , KDP):

$$d(\bar{4}2m) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{36} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

В таблице 2.3 приведены значения компонент тензоров нелинейной восприимчивости некоторых распространённых нелинейных кристаллов.

Таблица 2.3 – Значения d некоторых нелинейных кристаллов [3], [11].

Кристалл	Класс симметрии	Диапазон прозрачности, мкм	λ , мкм	Показатели преломления $n(\lambda)$ $n(\lambda/2)$	d , пм/В
KH_2PO_4 (KDP)	$\bar{4}2m$	0,18 – 1,5	1,064	$n_o = 1,494, n_e = 1,460$ $n_o = 1,512, n_e = 1,471$	$d_{36} = 0,43$
KD_2PO_4 (KD*P)	$\bar{4}2m$	0,2 – 2,0	1,064	$n_o = 1,493, n_e = 1,456$ $n_o = 1,509, n_e = 1,469$	$d_{36} = 0,40$
LiIO_3	6	0,3 – 6,0	1,064	$n_o = 1,857, n_e = 1,717$ $n_o = 1,898, n_e = 1,748$	$d_{15} = -5,53$ $d_{31} = -7,11$
LiNbO_3	$3m$	0,33 – 5,5	1,064	$n_o = 2,234, n_e = 2,155$ $n_o = 2,325, n_e = 2,233$	$d_{31} = -5,95$ $d_{33} = -34,4$
LiB_3O_5 (LBO)	$mm2$	0,16 – 3,2	1,064	$n_x = 1,566, n_y = 1,591, n_z = 1,606$ $n_x = 1,579, n_y = 1,607, n_z = 1,621$	$d_{15} = 1,03$ $d_{24} = -0,94$ $d_{31} = 1,09$ $d_{33} = -0,94$
$\beta\text{-BaB}_2\text{O}_4$ (BBO)	$3m$	0,2 – 2,6	1,064	$n_o = 1,654, n_e = 1,542$ $n_o = 1,674, n_e = 1,555$	$d_{11} = 1,6$ $d_{22} = 2,2$ $d_{31} = 0,15$
GaAs	$\bar{4}3m$	1 – 15	10,6	$n = 3,27$ $n = 3,30$	$d_{36} = 370$
Ag_3AsS_3 (прустит)	$3m$	0,6 – 13	10,6	$n_o = 2,697, n_e = 2,503$ $n_o = 2,730, n_e = 2,518$	$d_{15} = 11$ $d_{22} = 18$
CdGeAs_2	$\bar{4}2m$	2,4 – 18	10,6	$n_o = 3,505, n_e = 3,591$ $n_o = 3,530, n_e = 3,621$	$d_{36} = 235$
AgGaSe_2	$\bar{4}2m$	0,7 – 18	10,6	$n_o = 2,592, n_e = 2,559$ $n_o = 2,614, n_e = 2,582$	$d_{36} = 33$
$\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$ («банан»)	$mm2$	0,37 – 5,0	1,064	$n_x = 2,257, n_y = 2,257, n_z = 2,169$ $n_x = 2,368, n_y = 2,367, n_z = 2,250$	$d_{31} = 13,2$ $d_{32} = 13,2$ $d_{33} = 18,2$
KTiOPO_4 (КТР)	$mm2$	0,35 – 4,5	1,064	$n_x = 1,738, n_y = 1,745, n_z = 1,830$ $n_x = 1,779, n_y = 1,790, n_z = 1,887$	$d_{15} = 1,91$ $d_{24} = 3,64$ $d_{31} = 2,54$ $d_{32} = 4,53$ $d_{33} = 16,9$

Аналогичные соотношения симметрии можно написать для тензоров восприимчивости третьего и т.д. порядков (см. [10]).

Ранее было отмечено, что для описания нелинейного взаимодействия трёх волн необходимо 324 комплексных числа. Вследствие вещественности полей, только половина из них независимы. Далее, симметрия относительно внутренних перестановок $\chi^{(2)}$ оставляет только 81 независимый параметр. В непоглощающей среде все элементы $\chi^{(2)}$ действительны, и выполняется условие полной перестановочной симметрии, следовательно, только 27 чисел независимы. При генерации второй гармоники можно использовать сокращённую запись, то есть остаётся 18 независимых компонентов. Если

выполняется условие Клейнмана, из них остаётся только 10. И, наконец, любая кристаллическая симметрия нелинейного материала может ещё уменьшить это число.

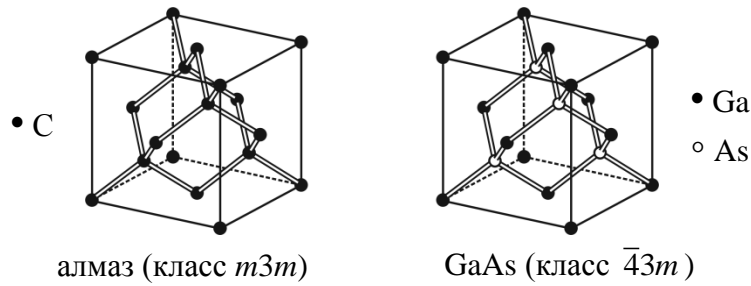


Рисунок 2.5 – Кубические кристаллы с центральной симметрией (например, алмаз), и без неё (например, арсенид галлия, с решёткой типа цинковой обманки).

Следует отметить различие между изотропными центрально-симметричными средами. Кристаллы с кубической решёткой оптически изотропны, то есть линейная диэлектрическая восприимчивость в них не зависит от направления вектора \mathbf{E} . Однако они могут не иметь центра симметрии. Например, арсенид галлия (рис. 2.5) имеет кубическую алмазоподобную кристаллическую структуру, но без центральной симметрии, поскольку состоит из атомов двух разных типов. Следовательно, он обладает квадратичной нелинейностью (причём очень сильной, см. табл. 2.3). Использованию GaAs в нелинейно-оптических преобразователях частоты препятствует отсутствие двулучепреломления, поскольку это означает, что в нём невозможно осуществить обычный способ достижения фазового синхронизма (см. гл. 4)

Эффективная восприимчивость

Если направления поляризации взаимодействующих волн заданы, то тензор нелинейной восприимчивости d_{ij} можно заменить одним числом – эффективной восприимчивостью d_{eff} . В одноосном кристалле любую поляризованную волну можно разложить на две составляющие – с обыкновенной и необыкновенной поляризациями. Соответствующие выражения для единичных векторов направления поляризации \mathbf{e} в сферических координатах θ, φ (где θ – угол между оптической осью Z и вектором \mathbf{k} , φ – угол между осью X и направлением проекции вектора \mathbf{k} на плоскость XY, $|\mathbf{e}| = 1$):

$$\mathbf{e}_e = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_o = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

В уравнениях для расчёта эффективности преобразования используются коэффициенты эффективной нелинейности, содержащие все операции суммирования по направлениям поляризации взаимодействующих волн:

$$d_{\text{eff}} = \mathbf{e}_1 \cdot (d\mathbf{F}\{\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\}) = \mathbf{e}_2 \cdot (d\mathbf{F}\{\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\}) = \mathbf{e}_3 \cdot (d\mathbf{F}\{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\}), \quad (2.42)$$

где $\mathbf{F}\{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\}$ – шестикомпонентный вектор-столбец, элементы которого выражаются через компоненты векторов \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 так же, как элементы вектора в правой части уравнения (2.36) выражаются через компоненты \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 :

$$\mathbf{F}\{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\} = \begin{bmatrix} e_{x1}e_{x2} \\ e_{y1}e_{y2} \\ e_{z1}e_{z2} \\ e_{y1}e_{z2} + e_{z1}e_{y2} \\ e_{x1}e_{z2} + e_{z1}e_{x2} \\ e_{x1}e_{y2} + e_{y1}e_{x2} \end{bmatrix} : \begin{matrix} \mathbf{F}_{oo} \\ \mathbf{F}_{oe} \\ \mathbf{F}_{ee} \end{matrix} \quad (2.43)$$

$$\begin{bmatrix} \sin^2 \varphi \\ \cos^2 \varphi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sin 2\varphi \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -0.5 \cos \theta \sin 2\varphi \\ 0.5 \cos \theta \sin 2\varphi \\ 0 \\ -\sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \cos 2\varphi \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \\ \cos^2 \theta \sin^2 \varphi \\ \sin^2 \theta \\ -\sin 2\theta \sin \varphi \\ -\sin 2\theta \cos \varphi \\ \cos^2 \theta \sin 2\varphi \end{bmatrix}$$

Величина d_{eff} представляет собой скалярное произведение вектора типа (2.42) на тензорно-векторное произведение вида $d\mathbf{F}\{\mathbf{e}\mathbf{e}\}$, которое тоже есть вектор-столбец 3×1 . В зависимости от типа синхронизма (*ooe*, *oeo* и т.д.), с помощью (2.41) вычисляются компоненты векторов \mathbf{e}_i , и по известным правилам векторной алгебры определяется произведение (2.42).

В таблице 2.4 приведены выражения d_{eff} для 11 одноосных кристаллических классов при коллинеарном взаимодействии (то есть, когда волновые вектора всех трёх волн имеют одинаковое направление θ , φ). Видно, что даже для одноосных кристаллов эффективная восприимчивость в общем случае зависит не только от угла θ между волновым вектором и оптической осью, но и от угла φ в плоскости, ортогональной оси. Поэтому нелинейное взаимодействие подлежит оптимизации по углу φ (тогда как угол θ равен углу синхронизма, см. главу 4).

Таблица 2.4 – Выражения для d_{eff} одноосных нелинейных кристаллов различных классов симметрии при выполнении условия Клейнмана [3]

Класс симметрии	Тип взаимодействия	
	<i>ooe, oeo, eoo</i>	<i>eeo, eoe, oee</i>
6, 4, <i>6mm</i> , <i>4mm</i>	$d_{15} \sin \theta$	0
$\bar{6}m2$	$d_{22} \cos \theta \sin 3\varphi$	$d_{22} \cos^2 \theta \cos \varphi$
<i>3m</i>	$d_{15} \sin \theta - d_{22} \cos \theta \sin 3\varphi$	$d_{22} \cos^2 \theta \cos 3\varphi$
$\bar{6}$	$\cos \theta (d_{11} \cos 3\varphi - d_{22} \sin 3\varphi)$	$\cos^2 \theta (d_{11} \sin 3\varphi + d_{22} \cos 3\varphi)$
3	$d_{15} \sin \theta + \cos \theta (d_{11} \cos 3\varphi - d_{22} \sin 3\varphi)$	$\cos^2 \theta (d_{11} \sin 3\varphi + d_{22} \cos 3\varphi)$
32	$d_{11} \cos \theta \sin 3\varphi$	$d_{11} \cos^2 \theta \sin 3\varphi$
$\bar{4}$	$\sin \theta (d_{14} \sin 2\varphi + d_{15} \cos 2\varphi)$	$\sin 2\theta (d_{14} \cos 2\varphi - d_{15} \sin 2\varphi)$
$\bar{4}2m$	$d_{36} \sin \theta \sin 2\varphi$	$d_{36} \sin 2\theta \cos 2\varphi$

Таким образом, соотношение (2.25) между полем и поляризацией приводится к скалярной форме:

$$\begin{aligned} P(\omega_3) &= 2d_{\text{eff}} E(\omega_1) E(\omega_2), & - \text{при ГСЧ} \\ P(2\omega) &= d_{\text{eff}} E(\omega)^2, & - \text{при ГВГ} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Временное представление

До сих пор мы использовали зависимость поляризации от напряжённости электрического поля с учётом дисперсии, в частотном представлении:

$$\begin{aligned}
 P_i^{(1)}(\omega) &= \sum_j \chi_{ij}^{(1)}(\omega) E_j(\omega), \\
 P_i^{(2)}(\omega_3) &= \sum_{jk} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) E_j(\omega_1) E_k(\omega_2), \quad \omega_3 = \omega_1 + \omega_2 \\
 P_i^{(3)}(\omega_4) &= \sum_{jkl} \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_4; \omega_3, \omega_1, \omega_2) E_j(\omega_1) E_k(\omega_2) E_l(\omega_3), \quad \omega_4 = \omega_3 + \omega_1 + \omega_2
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Можно также рассматривать оптические процессы во временном представлении, то есть, функции $E(t)$, $P(t)$ вместо $E(\omega)$, $P(\omega)$. Особенно часто этот подход используется при анализе быстропротекающих процессов, например, отклика вещества на пико- и фемтосекундные лазерные импульсы.

Поля в частотном и временном представлении связаны преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\omega) &= \int \mathbf{E}(t) e^{-i\omega t} dt, \\
 \mathbf{E}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Поляризация и электрическое поле световой волны во временном представлении связаны между собой интегральными соотношениями:

$$\begin{aligned}
 P_i^{(1)}(t) &= \sum_j \int_0^\infty \chi_{ij}^{(1)}(\tau) E_j(t-\tau) d\tau, \\
 P_i^{(2)}(t) &= \sum_{jk} \int_0^\infty \int_0^\infty \chi_{ijk}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) E_j(t-\tau_1) E_k(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \\
 P_i^{(3)}(t) &= \sum_{jkl} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \chi_{ijkl}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) E_j(t-\tau_1) E_k(t-\tau_2) E_l(t-\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3,
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

где $\chi(\tau)$ – временной аналог восприимчивости $\chi(\omega)$ – отклик среды на импульсное воздействие в виде дельта-функции. Из (2.45) - (2.47) следует, что функции $\chi(\tau)$ и $\chi(\omega)$ также связаны преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned}
 \chi_{ij}^{(1)}(\omega) &= \int_0^\infty \chi_{ij}^{(1)}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \\
 \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \chi_{ijk}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) e^{-i(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2, \\
 \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_4; \omega_3, \omega_1, \omega_2) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \chi_{ijkl}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) e^{-i(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2 + \omega_3\tau_3)} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3.
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

3. Метод медленно меняющихся амплитуд

Уравнения для связанных амплитуд

В нелинейной оптике параметрические взаимодействия, связанные с восприимчивостью второго порядка (то есть, генерация гармоник, суммарных и разностных частот) описываются на основе нелинейного волнового уравнения (1.26):

$$-\Delta \mathbf{E} + \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{\text{NL}}}{\partial t^2}. \quad (3.1)$$

Будем считать, что среда непоглощающая, и волны распространяются вдоль оси Z . Электрическое поле представим в виде суммы трёх плоских волн с амплитудами A_i , частотами ω_i и единичными векторами поляризации \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$):

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{1}{2} \left[\mathbf{e}_1 A_1(z) e^{i(\omega_1 t - k_1 z)} + \mathbf{e}_2 A_2(z) e^{i(\omega_2 t - k_2 z)} + \mathbf{e}_3 A_3(z) e^{i(\omega_3 t - k_3 z)} + \text{к.с.} \right], \quad (3.2)$$

где $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Аналогично для нелинейной поляризации:

$$\mathbf{P}(z, t) = \frac{1}{2} \left[\mathbf{e}_1 P_1(z) e^{i\omega_1 t} + \mathbf{e}_2 P_2(z) e^{i\omega_2 t} + \mathbf{e}_3 P_3(z) e^{i\omega_3 t} + \text{к.с.} \right]. \quad (3.3)$$

Тогда

$$\Delta E = \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = -\omega_i^2 E_i. \quad (3.4)$$

Вторая производная по z равна

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 A_i}{dz^2} - 2ik_i \frac{dA_i}{dz} - k_i^2 A_i \right) e^{i(\omega_i t - k_i z)} + \text{к.с.} \quad (3.5)$$

В приближении медленно меняющихся амплитуд $d^2 A/dz^2 \ll k \cdot dA/dz$ (это означает, что амплитуда поля мало изменяется на расстояниях порядка длины волны) и, учитывая, что $k_i^2 = n_i^2 \omega_i^2 / c^2$, $n^2 = \text{Re } \varepsilon$, а в среде без поглощения $\text{Im } \varepsilon = 0$, получаем

$$2ik_i \frac{dA_i}{dz} \cdot e^{-ik_i z} = \frac{4\pi\omega_i^2}{c^2} P_i(z). \quad (3.6)$$

Далее, нелинейная поляризация выражается через амплитуды поля следующим образом (оставлены только члены с частотами ω_1 , ω_2 , и ω_3):

$$\begin{aligned} P(z, t) &= 2dE^2(z, t) = \\ &= \frac{d}{2} \left[2A_2^* A_3 e^{i\omega_1 t - i(k_3 - k_2)z} + 2A_1^* A_3 e^{i\omega_2 t - i(k_3 - k_1)z} + 2A_1 A_2 e^{i\omega_3 t - i(k_1 + k_2)z} + \text{к.с.} \right], \end{aligned} \quad (3.7)$$

где введено обозначение $d \equiv d_{\text{eff}}$ – эффективная восприимчивость. Мы перешли к скалярным уравнениям, поскольку все эффекты, связанные с поляризацией волн считаются учтёнными при расчёте d_{eff} . В непоглощающей среде тензор восприимчивости обладает полной перестановочной симметрией, поэтому величина d одинакова для всех трёх взаимодействий. Сравнивая это выражение с (3.3), получаем

$$\begin{aligned} P_1 &= 2dA_2^*A_3e^{-i(k_3-k_2)z} \\ P_2 &= 2dA_1^*A_3e^{-i(k_3-k_1)z} \\ P_3 &= 2dA_1A_2e^{-i(k_1+k_2)z} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Таким образом, из (3.6) и (3.8) получается система укороченных уравнений для связанных амплитуд:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dz} &= -\frac{4\pi i\omega_1 d}{n_1 c} A_2^* A_3 e^{-i\Delta k z} \\ \frac{dA_2}{dz} &= -\frac{4\pi i\omega_2 d}{n_2 c} A_1^* A_3 e^{-i\Delta k z} \\ \frac{dA_3}{dz} &= -\frac{4\pi i\omega_3 d}{n_3 c} A_1 A_2 e^{i\Delta k z} \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $\Delta k = k_3 - k_1 - k_2$. Эти уравнения описывают все нелинейно-оптические явления второго порядка: генерацию суммарной частоты ($\omega_1, \omega_2 \rightarrow \omega_3$), вырожденный случай – генерация второй гармоники ($\omega_1 = \omega_2$), параметрическое усиление/генерацию ($\omega_3 \rightarrow \omega_1, \omega_2$), вырожденный случай – генерация т. н. субгармоники ($\omega_1 = \omega_2$). Разница между математическим описанием этих явлений – только в граничных условиях для уравнений (3.9). Система (3.9) решается аналитически в общем виде, но некоторые её свойства можно проследить непосредственно из самих уравнений, например,

Соотношения Мэнли-Роу

Напомним, что интенсивность линейно поляризованной волны выражается через амплитуду электрического поля как $I = (nc/8\pi) \cdot A^* A$, следовательно, производная интенсивности i -й волны по z равна

$$\frac{dI_i}{dz} = \frac{n_i c}{8\pi} \left(A_i^* \frac{dA_i}{dz} + A_i \frac{dA_i^*}{dz} \right). \quad (3.10)$$

Для волны ω_1 , из первого из уравнений (3.9) получаем

$$\frac{dI_1}{dz} = \frac{i\omega_1 d}{2} \left(-A_1^* A_2^* A_3 e^{-i\Delta k z} + A_1 A_2 A_3^* e^{i\Delta k z} \right) = \omega_1 d \operatorname{Im} \left[A_1^* A_2^* A_3 e^{-i\Delta k z} \right]. \quad (3.11)$$

Аналогично, для второй и третьей волны:

$$\begin{aligned} \frac{dI_2}{dz} &= \omega_2 d \operatorname{Im} \left[A_1^* A_2^* A_3 e^{-i\Delta k z} \right], \\ \frac{dI_3}{dz} &= \omega_3 d \operatorname{Im} \left[A_1 A_2 A_3^* e^{i\Delta k z} \right] = -\omega_3 d \operatorname{Im} \left[A_1^* A_2^* A_3 e^{-i\Delta k z} \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Тогда получается, что суммарная интенсивность трёх волн $I = I_1 + I_2 + I_3$ не зависит от z :

$$\frac{dI}{dz} = \frac{dI_1}{dz} + \frac{dI_2}{dz} + \frac{dI_3}{dz} = (\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)d \operatorname{Im} [A_1^* A_2^* A_3 e^{-i\Delta kz}] = 0, \quad (3.13)$$

поскольку $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Выражение (3.13) представляет собой не что иное, как закон сохранения энергии в непоглощающей среде.

Из уравнений (3.11) - (3.12) также следует соотношение

$$\frac{1}{\omega_1} \frac{dI_1}{dz} = \frac{1}{\omega_2} \frac{dI_2}{dz} = -\frac{1}{\omega_3} \frac{dI_3}{dz}. \quad (3.14)$$

Энергия кванта электромагнитного излучения равна $\hbar\omega$, то есть, величина I/ω пропорциональна плотности потока фотонов. Следовательно, уравнение (3.14) означает, например, при генерации суммарной частоты, что уменьшение количества фотонов на первой частоте равно уменьшению количества фотонов на частоте ω_2 и равно увеличению количества фотонов на суммарной частоте ω_3 (см. рисунок 1.4). Аналогично для параметрической генерации, но в обратном порядке: каждый фотон ω_3 распадается на два фотона с меньшей частотой.

Интересно, что соотношения Мэнли-Роу изначально были выведены во второй половине 1950-х гг., то есть, до возникновения лазеров и нелинейной оптики¹. Авторы рассматривали нелинейное взаимодействие волн произвольной природы, подразумевая электромагнитные волны в радиочастотном диапазоне.

Может показаться странным, что существенно квантовый (интерпретируемый с помощью понятия «фотон») результат (3.14) получен из классических уравнений Максвелла. Однако при выводе этого соотношения мы использовали предположение, что тензор восприимчивости обладает полной перестановочной симметрией, что позволило считать эффективные нелинейные коэффициенты d одинаковыми в уравнениях (3.9). Свойство полной перестановочной симметрии в непоглощающей среде – нетривиальный факт, который можно строго обосновать только в квантовой теории диэлектрической восприимчивости (см., например, [10]).

Генерация суммарной частоты

Предположим для простоты, что амплитуды A_1 и A_2 не изменяются в процессе генерации волны на суммарной частоте ω_3 (то есть, пока коэффициент преобразования мал). Тогда третье из уравнений (3.9) решается непосредственным интегрированием:

$$\begin{aligned} A_3(L) &= -\frac{4\pi i \omega_3 d}{n_3 c} A_1 A_2 \int_0^L e^{i\Delta kz} dz = -\frac{4\pi i \omega_3 d}{n_3 c} A_1 A_2 \frac{e^{i\Delta kL} - 1}{i\Delta k} = \\ &= -\frac{4\pi i \omega_3 d}{n_3 c} A_1 A_2 L e^{i\Delta kL/2} \frac{\sin(\Delta kL/2)}{\Delta kL/2}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

¹ Manly J. M., Rowe H. E., General Energy in Nonlinear Reactances, Proc. IRE, 47, 2115 (1959).

то есть, интенсивность волны на суммарной частоте равна

$$I_3(L) = \frac{n_3 c}{8\pi} A_3^*(L) A_3(L) = \frac{512\pi^5 d^2}{n_1 n_2 n_3 \lambda_3^2 c} I_1 I_2 L^2 \operatorname{sinc}^2(\Delta k L / 2). \quad (3.16)$$

Получилась зависимость, аналогичная выведенной для ГВГ из интерференционных соображений (формула (1.45) и рис. 1.11).

Одно из применений ГСЧ – перевод инфракрасного сигнала в видимый диапазон с помощью мощной волны накачки (т.н. «преобразование частоты вверх». англ. up-conversion). Этот эффект позволяет регистрировать слабые сигналы, поскольку обычно эффективность приёмников излучения в среднем и дальнем ИК диапазоне весьма мала, и их требуется сильно охлаждать для подавления тепловых шумов. Пусть на вход нелинейной среды падает волна накачки с частотой ω_2 и слабый сигнал на частоте $\omega_1 \ll \omega_2$. В нелинейном кристалле происходит генерация суммарной частоты $\omega_3 = \omega_2 + \omega_1$. Амплитуду накачки можно считать приблизительно постоянной: $A_2 \approx \text{const}$, $A_2 \gg A_1$, и система (3.9) сокращается до двух уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dz} &= -i\sigma_1 A_2^* A_3 e^{-i\Delta k z}, \\ \frac{dA_3}{dz} &= -i\sigma_3 A_2 A_1 e^{i\Delta k z}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $\sigma_i = 4\pi\omega_i d / n_i c$ – коэффициенты нелинейной связи.

Рассмотрим вначале случай идеального фазового синхронизма: $\Delta k = 0$. Тогда

$$\frac{d^2 A_1}{dz^2} = -\kappa^2 A_1 \quad (3.18)$$

$$\text{где } \kappa^2 = \sigma_1 \sigma_3 |A_2|^2 = \frac{16\pi^2 \omega_1 \omega_3 d^2 |A_2|^2}{n_1 n_3 c^2}.$$

Общее решение уравнения (3.18) записывается в виде

$$A_1(z) = B \cos \kappa z + C \sin \kappa z \quad (3.19)$$

где B и C – константы, зависящие от граничных условий. Тогда амплитуда волны суммарной частоты будет равна

$$A_3(z) = \frac{i\kappa C}{\sigma_1 A_2^*} \cos \kappa z - \frac{i\kappa B}{\sigma_1 A_2^*} \sin \kappa z \quad (3.20)$$

Если на входе в нелинейную среду изначально не было волны суммарной частоты, то граничные условия таковы: $A_3(0) = 0$, $B = A_1(0)$, $C = 0$, и решение принимает вид

$$\begin{aligned} A_1(z) &= A_1(0) \cos \kappa z, \\ A_3(z) &= -iA_1(0) \frac{\kappa}{\sigma_1 A_2^*} \sin \kappa z. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Это выражение можно упростить, заметив, что

$$\frac{\kappa}{\sigma_1 A_2^*} = \sqrt{\frac{n_1 \omega_3}{n_3 \omega_1}} \frac{|A_2|}{A_2^*} = \sqrt{\frac{n_1 \omega_3}{n_3 \omega_1}} e^{i\varphi_2} \quad (3.22)$$

где φ_2 – фаза волны A_2 . Таким образом,

$$A_3(z) = -iA_1(0) \sqrt{\frac{n_1 \omega_3}{n_3 \omega_1}} e^{i\varphi_2} \sin \kappa z \quad (3.23)$$

Вид этого решения показан на рисунке 3.1 а. Вдоль направления распространения происходит периодическая перекачка мощности из волны ω_1 в волну ω_3 , и обратно.

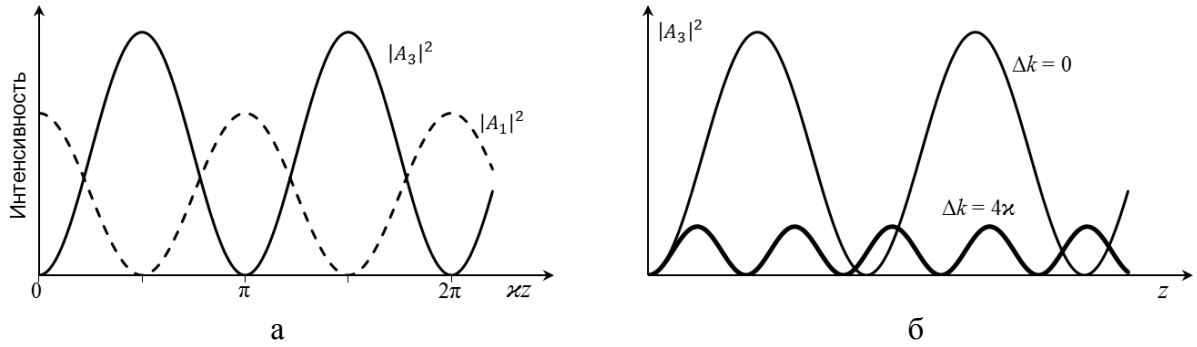


Рисунок 3.1 – Генерация суммарной частоты при постоянной амплитуде накачки

Рассмотрим теперь более общий случай, с произвольной расстройкой волновых векторов: $\Delta k \neq 0$. Будем искать решение системы уравнений (3.17) в виде

$$\begin{aligned} A_1(z) &= (Fe^{igz} + Ge^{-igz})e^{-i\Delta kz/2}, \\ A_3(z) &= (Ce^{igz} + De^{-igz})e^{i\Delta kz/2}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где F, G, C, D – константы, определяемые граничными условиями, g – пространственная частота колебаний амплитуды. Подставив их в первое из уравнений (3.17), получаем

$$\left[i(g - \Delta k/2)Fe^{igz} - i(g + \Delta k/2)Ge^{-igz} \right] e^{-i\Delta kz/2} = \left[-iK_1 Ce^{igz} - iK_1 De^{-igz} \right] e^{-i\Delta kz/2}. \quad (3.25)$$

Приравняем отдельно множители при e^{igz} и при e^{-igz} :

$$\begin{aligned} (g - \Delta k/2)F &= -\sigma_1 A_2^* C, \\ (g + \Delta k/2)G &= \sigma_1 A_2^* D. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Аналогично, из второго из уравнений (3.17) имеем

$$\begin{aligned} (g + \Delta k/2)C &= -\sigma_3 A_2 F, \\ (g - \Delta k/2)D &= \sigma_3 A_2 G. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Первые уравнения из (3.26) и (3.27) содержат только F и C , и их можно написать в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \sigma_3 A_2 & g + \Delta k/2 \\ g - \Delta k/2 & \sigma_1 A_2^* \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F \\ C \end{bmatrix} = 0. \quad (3.28)$$

Система (3.28) имеет нетривиальное решение, если детерминант матрицы в левой части равен нулю, то есть,

$$g^2 = \kappa^2 + \Delta k^2 / 4 \quad (3.29)$$

Следовательно, учитывая уравнения (3.26), (3.27), (3.29), и то, что $A_1(0) = F + G$, и $A_3(0) = C + D$, получаем общее решение:

$$\begin{aligned} A_1(z) &= \left\{ A_1(0) \cos gz + i \left[\frac{\Delta k}{2g} A_1(0) - \frac{\sigma_1 A_2^*}{g} A_3(0) \right] \sin gz \right\} e^{-i\Delta k z / 2}, \\ A_3(z) &= \left\{ A_3(0) \cos gz - i \left[\frac{\Delta k}{2g} A_3(0) + \frac{\sigma_3 A_2}{g} A_1(0) \right] \sin gz \right\} e^{i\Delta k z / 2}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Если на входе в нелинейную среду волна суммарной частоты отсутствует, то есть, $A_3(0) = 0$, то интенсивность преобразованной волны пропорциональна величине

$$|A_3(z)|^2 = \frac{\sigma_3^2 |A_2|^2}{g^2} |A_1(0)|^2 \sin^2 gz \quad (3.31)$$

Зависимость (3.31) при различных Δk показана на рисунке 3.1 б. При ненулевой расстройке Δk максимальный коэффициент преобразования уменьшается, а частота колебаний интенсивности увеличивается.

Генерация второй гармоники

Повторим вывод уравнений для нелинейного взаимодействия двух волн – основной частоты ω и второй гармоники 2ω . Электрическое поле представляется в виде:

$$E(z, t) = \frac{1}{2} \left[A_1(z) e^{i(\omega t - k_1 z)} + A_2(z) e^{i(2\omega t - k_2 z)} + \text{к.с.} \right], \quad (3.32)$$

где $k_1 = n_1 \omega / c$, $k_2 = 2n_2 \omega / c$, $n_1 = n(\omega)$, $n_2 = n(2\omega)$. Нелинейная поляризация:

$$P(z, t) = \frac{1}{2} \left[P_1(z) e^{i\omega t} + P_2(z) e^{i2\omega t} + \text{к.с.} \right], \quad (3.33)$$

$$P(z, t) = 2dE^2 = \frac{d}{2} \left[2A_1^* A_2 e^{i\omega t - i(k_2 - k_1)z} + A_1^2 e^{i2\omega t - i2k_1 z} + \text{к.с.} \right], \quad (3.34)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} P_1(z) &= 2dA_1^* A_2 e^{-i(k_2 - k_1)z}, \\ P_2(z) &= dA_1^2 e^{-i2k_1 z}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

где d – эффективная восприимчивость. По-прежнему мы будем пренебрегать поглощением, и в приближении медленно меняющихся амплитуд, из уравнений (3.6) получаем:

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dz} &= -\frac{4\pi i \omega d}{n_1 c} A_1^* A_2 e^{-i\Delta k z}, \\ \frac{dA_2}{dz} &= -\frac{4\pi i \omega d}{n_2 c} A_1^2 e^{i\Delta k z},\end{aligned}\quad (3.36)$$

где Δk – расстройка волновых векторов: $\Delta k = k_2 - 2k_1$.

Если волна основной частоты есть сумма двух составляющих с различной поляризацией (например, необыкновенной и обыкновенной волн в одноосном кристалле), или с различным направлением распространения (то есть, в терминах главы 4, при синхронизме второго типа и/или векторном типе синхронизма), то нельзя совершить переход от системы уравнений для трёх амплитуд (3.9) к системе для двух (3.36). В этом случае следует по-прежнему рассматривать три амплитуды: две на основной частоте, и одну на удвоенной.

Рассмотрим, вначале, решение уравнений (3.36) при заданной амплитуде накачки. Пусть $A_1(z) = \text{const}$ (коэффициент преобразования во вторую гармонику мал). Тогда

$$A_2(z) = -\frac{4\pi i \omega d}{n_2 c} A_1^2 \int_0^z e^{i\Delta k z'} dz' = -\frac{4\pi i \omega d}{n_2 c} A_1^2 z e^{i\Delta k z/2} \text{sinc}(\Delta k z/2), \quad (3.37)$$

то есть, интенсивность

$$I_2(z) = \frac{n_2 c}{8\pi} A_2^* A_2 = \frac{128\pi^3 \omega^2 d^2}{n_1^2 n_2 c^3} I_1^2 z^2 \text{sinc}^2(\Delta k z/2), \quad (3.38)$$

а КПД преобразования равно

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{I_2}{I_1} = \frac{2^9 \pi^5 d^2}{n_1^2 n_2 c \lambda_1^2} I_1 z^2 \text{sinc}^2(\Delta k z/2) \quad (\text{СГС}) \\ \eta &= \frac{I_2}{I_1} = \frac{2^3 \pi^2 d^2}{\varepsilon_0 n_1^2 n_2 c \lambda_1^2} I_1 z^2 \text{sinc}^2(\Delta k z/2) \quad (\text{СИ})\end{aligned}\quad (3.39)$$

Решение с учётом истощения волны накачки

Введём коэффициенты нелинейной связи $\sigma_{1,2} = 4\pi\omega d/n_{1,2}c$, и выразим комплексные амплитуды полей через их модули a и фазы φ : $A_{1,2}(z) = a_{1,2}(z)\exp[i\varphi_{1,2}(z)]$. Тогда система (3.36) примет вид

$$\begin{aligned}a_1' + ia_1\varphi_1' &= -i\sigma_1 a_1 a_2 \exp[-i(2\varphi_1 - \varphi_2 + \Delta k z)], \\ a_2' + ia_2\varphi_2' &= -i\sigma_2 a_1^2 \exp[i(2\varphi_1 - \varphi_2 + \Delta k z)].\end{aligned}\quad (3.40)$$

Обратите внимание на то, что в уравнениях для ГВГ определения коэффициентов нелинейной связи σ_i отличаются от коэффициентов, введённых при рассмотрении невырожденного по частоте трёхволнового взаимодействия (3.17).

Обозначим обобщённую фазу $\Psi = 2\varphi_1 - \varphi_2 + \Delta kz$. Тогда, разделяя вещественную и мнимую части, и учитывая, что $\Psi' = 2\varphi_1' - \varphi_2' + \Delta k$, из уравнений (3.40) получаем систему

$$\begin{aligned} a_1' &= -\sigma_1 a_1 a_2 \sin \Psi, \\ a_2' &= \sigma_2 a_1^2 \sin \Psi, \\ \Psi' &= \left(\sigma_2 \frac{a_1^2}{a_2} - 2\sigma_1 a_2 \right) \cos \Psi + \Delta k. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Из первых двух уравнений видно, что производная величины

$$U^2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} a_1^2 + a_2^2 \quad (3.42)$$

равна нулю, следовательно, $U^2 = const$, и её можно выразить через граничные условия:

$$U^2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} a_1^2(0) + a_2^2(0). \quad (3.43)$$

Величина U^2 пропорциональна сумме интенсивностей волн основной частоты и второй гармоники, поэтому она и сохраняется в непоглощающей среде.

Рассмотрим, для простоты, случай идеального синхронизма ($\Delta k = 0$). При этом, как нетрудно заметить, сохраняется также величина

$$\Gamma = a_1^2 a_2 \cos \Psi \quad (3.44)$$

Далее, с помощью уравнения (3.42) можно уменьшить количество неизвестных в системе (3.41), выразив a_1 через a_2 . Тогда получится система из двух уравнений:

$$\begin{aligned} a_2' &= \sigma_1 (U^2 - a_2^2) \sin \Psi, \\ \Psi' &= \frac{\sigma_1}{a_2} (U^2 - 3a_2^2) \cos \Psi. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Выразив $\sin \Psi$ через Γ , первое из этих уравнений приводится к виду

$$a_2' = \sqrt{\sigma_1^2 (U^2 - a_2^2)^2 - \sigma_2^2 \Gamma^2}. \quad (3.46)$$

Особенно простой вид последнее уравнение приобретает при $\Gamma = 0$, что справедливо, когда либо первая, либо вторая гармоника отсутствуют на входе нелинейной среды ($a_1(0) = 0$ или $a_2(0) = 0$), или их фазы согласованы таким образом, что $\cos \Psi = 0$. Положим, для определённости, что $a_2(0) = 0$. Тогда получим:

$$a_2' = \sigma_1 (U^2 - a_2^2) \quad (3.47)$$

Это уравнение уже легко интегрируется, и решение его – гиперболический тангенс:

$$a_2(z) = U \operatorname{th}(\sigma_1 U z) \quad (3.48)$$

Учитывая, что $U = \sqrt{\sigma_2/\sigma_1} a_1(0)$, и $a_1(z) = \sqrt{\sigma_1/\sigma_2} \sqrt{U^2 - a_2^2(z)}$, получаем:

$$\begin{aligned} a_1(z) &= a_1(0) \operatorname{ch}^{-1}(z/L_{NL}), \\ a_2(z) &= a_1(0) \sqrt{\sigma_2/\sigma_1} \operatorname{th}(z/L_{NL}), \end{aligned} \quad (3.49)$$

где

$$L_{NL} = \frac{1}{a_1(0) \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}} = \frac{c \sqrt{n_1 n_2}}{4\pi \omega d a_1(0)} \quad (3.50)$$

– эффективная длина нелинейного взаимодействия, то есть, расстояние, на котором происходит существенная перекачка мощности основного излучения в мощность второй гармоники. Если длина нелинейного кристалла много меньше L_{NL} , то при вычислении коэффициента преобразования во вторую гармонику можно пользоваться приближением заданной амплитуды накачки. Практическая формула для вычисления L_{NL} , учитывая, что $n_2 \approx n_1 \approx n$ (в системе СИ):

$$L_{NL} = \frac{n \lambda_1}{4\pi d} \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 c n}{I_1(0)}}, \quad \text{или} \quad L_{NL}[\text{см}] = \frac{5,8 \cdot n^{3/2} \lambda_1[\text{мкм}]}{d_{[\text{пм/В}]} \sqrt{I_1(0)[\text{МВт/см}^2]}} \quad (3.51)$$

На рисунке 3.2а показан вид решения (3.49).

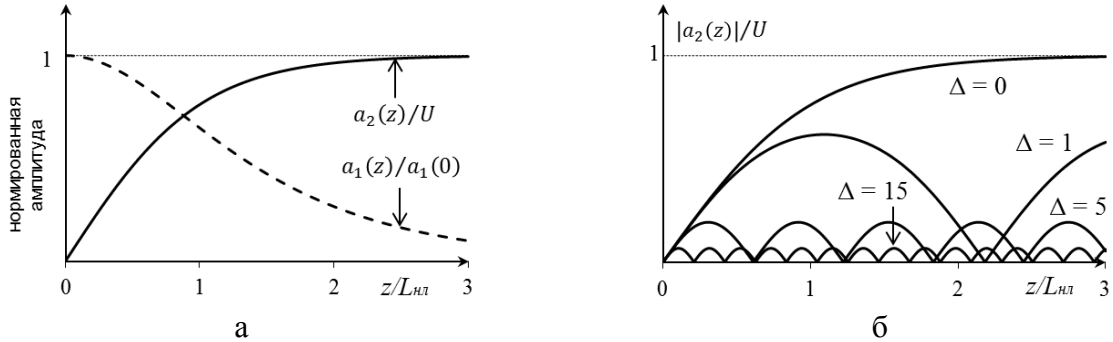


Рисунок 3.2 – Генерация второй гармоники: а – при идеальном синхронизме; б – решения при различной расстройке волновых векторов.

При произвольной расстройке Δk решение системы уравнений (3.41) выражается через эллиптические функции (см. [1]):

$$a_2(z) = U \sqrt{\kappa} \operatorname{sn}\left(z/\sqrt{\kappa} L_{NL}; \kappa\right), \quad (3.52)$$

где

$$\sqrt{\kappa} = \sqrt{1 + (\Delta/2)^2} - \Delta/2, \quad \Delta = \Delta k L_{NL}/2, \quad (3.53)$$

а $\text{sn}(u; \kappa)$ – эллиптический синус Якоби, который при $\kappa = 1$ ($\Delta = 0$) обращается в гиперболический тангенс (формула (3.48)), а при большой фазовой расстройке ($\Delta \gg 1$, $\kappa \approx \Delta^{-2} \rightarrow 0$) обращается в обычный синус (формула (3.37)). Определение и свойства этой функции таковы:

$$u = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1-m\sin^2\theta}}, \quad \text{sn}(u; m) = \sin\phi,$$

$$\text{период} = 4 \int_0^1 \left[(1-y^2)(1-m^2y^2) \right]^{-1/2} dy, \quad (3.54)$$

$$\text{sn}(u; 0) = \sin u,$$

$$\text{sn}(u; 1) = \text{th } u.$$

Вид решений (3.52) при различных Δ показан на рисунке 3.2б. Формулы для вычисления эффективности преобразования $\eta_{2\omega} = a_2^2/U^2$ в кристалле длиной L в различных приближениях – в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Эффективность преобразования частоты во вторую гармонику в приближении плоских монохроматических волн.

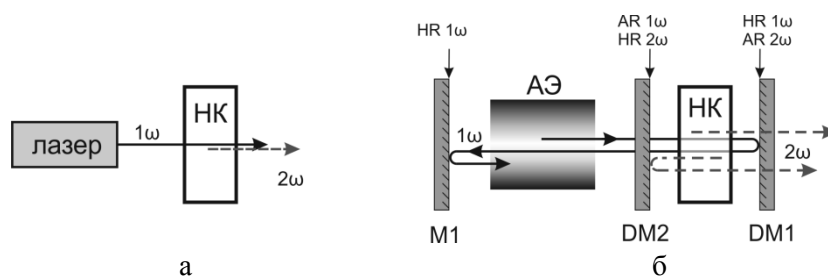
общий случай	$\eta_{2\omega} = \kappa \text{sn}^2(L/\sqrt{\kappa}L_{NL}; \kappa)$
заданное поле накачки ($\Delta \gg 1$)	$\eta_{2\omega} = (L/L_{NL})^2 \text{sinc}^2(\Delta kL/2)$
идеальный синхронизм ($\Delta = 0$)	$\eta_{2\omega} = \text{th}^2(L/L_{NL})$

Из приведённых формул видно, что если размеры нелинейной среды много меньше длины когерентности $L_c = \pi/\Delta k$, то независимо от того, синхронное взаимодействие, или нет, мощность второй гармоники растёт $\sim L^2$.

Внутрирезонаторная генерация второй гармоники

Обычная схема удвоения частоты лазерного излучения показана на рисунке 3.3 а. Лазерный пучок проходит через нелинейный кристалл, в котором, при выполнении условия фазового синхронизма, происходит генерация второй гармоники. На практике, однако, бывает достаточно трудно осуществить преобразование с высокой эффективностью, особенно для непрерывного излучения малой мощности.

В лазере выходное зеркало резонатора имеет некоторый оптимальный коэффициент пропускания T_{opt} , при котором выходная мощность максимальна. Интенсивность излучения внутри резонатора в $1/T_{\text{opt}}$ раз больше, чем интенсивность выходного излучения. Поэтому можно повысить эффективность преобразования во вторую гармонику, если поместить нелинейный кристалл внутрь резонатора. Одна из схем внутрирезонаторной ГВГ показана на рисунке 3.3 б. Выходное зеркало лазера заменяется на дихроичное (DM1), которое полностью отражает излучение основной частоты, и полностью пропускает вторую гармонику. То есть, теперь разгрузка резонатора производится не на выходном зеркале, а в кристалле-преобразователе, а эффективность преобразования частоты должна быть равна T_{opt} .



Обозначения: АЭ – активный элемент; НК – нелинейный кристалл;
 М – зеркало, DM – дихроичное зеркало;
 AR – антиотражающее покрытие; HR – полностью отражающее покрытие.

Рисунок 3.3 – Вне- (а) и внутрирезонаторная (б) схемы ГВГ.

Вторая гармоника генерируется не только при прямом проходе излучения 1ω через кристалл, но и при обратном. Для того, чтобы это излучение не пропадало в активном элементе, ставят ещё одно дихроичное зеркало DM2, которое прозрачно для первой гармоники, и полностью отражает вторую.

Можно считать, что при внутрирезонаторной генерации второй гармоники удвоение частоты осуществляется со стопроцентной эффективностью, в том смысле, что эта схема по выходу энергии излучения 2ω эквивалентна традиционной схеме (рис. 3.3 а), в которой достигнуто полное преобразование во вторую гармонику.

При внесении нелинейного кристалла в лазерный резонатор существенно меняется физика происходящих в нём процессов. Например, в обычном лазере потери излучения на выход из резонатора не зависят от интенсивности, а в случае ВРГВГ зависят, причём нелинейно (чем больше интенсивность света, тем больше коэффициент преобразования, то есть, в данном случае имеется отрицательная обратная связь, стабилизирующая выходную мощность лазера). Изменяется характер межмодовых взаимодействий, что влияет как на пространственные, так и на временные характеристики лазера. При создании лазерных систем с внутрирезонаторной генерацией второй гармоники необходим тщательный учёт подобных факторов.

4. Фазовый синхронизм

Ключевым для процессов нелинейного преобразования частоты является понятие *фазового синхронизма*. Только при условии $\Delta k = 0$ возможно эффективное взаимодействие частотных компонент. Например, при генерации второй гармоники условие синхронизма сводится к равенству фазовых скоростей волн основной и удвоенной частоты ($\Delta k = k_2 - 2k_1 = 0$, следовательно, $v_1 = \omega/k_1 = 2\omega/k_2 = v_2$) то есть, к равенству показателей преломления: $n(\omega) = n(2\omega)$. Однако для прозрачных сред обычно характерна нормальная дисперсия: чем больше частота излучения, тем больше показатель преломления. Наиболее распространённый способ компенсации дисперсии – применение анизотропных сред, в которых фазовая скорость волны зависит не только от частоты, но и от поляризации.

Распространение электромагнитных волн в кристаллах

Векторы электрической индукции \mathbf{D} и напряжённости электрического поля \mathbf{E} связаны между собой соотношением $\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}\mathbf{E}$, или, в координатной форме, $D_i = \sum_j \varepsilon_{ij} E_j$.

Выбором направления координатных осей можно привести тензор диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$ к диагональному виду:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Энергия электрического поля в среде равна

$$W_e = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z} \right]. \quad (4.2)$$

Заменяя величину $\mathbf{D}/\sqrt{8\pi W_e}$ на \mathbf{r} , и определяя главные значения показателя преломления $n_i^2 = \varepsilon_i$, из (4.2) получаем уравнение *эллипсоида показателя преломления*:

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1 \quad (4.3)$$

При этом в *изотропных* средах (к которым относятся кристаллы с кубической решёткой, аморфные тела, жидкости и газы), все три главных значения показателя преломления равны между собой: $n_x = n_y = n_z = n$, и эллипсоид сводится к сфере (показатель преломления не зависит от направления распространения волны). В *одноосных* кристаллах (с тетрагональной, тригональной или гексагональной решёткой) два главных значения равны между собой: $n_x = n_y \neq n_z$. В *двухосных* кристаллах (к которым относятся кристаллы с триклинной, моноклинной и орторомбической решёткой) все три главных значения показателя преломления различны: $n_x \neq n_y \neq n_z$.

Рассмотрим распространение света в анизотропных средах на примере одноосных кристаллов¹. В них любую волну можно представить в виде суммы двух линейно поляризованных волн с взаимно ортогональной поляризацией: *обыкновенной* (ordinary) волны, в которой электрический вектор всегда лежит в плоскости XY, и *необыкновенной* (extraordinary), электрический вектор которой лежит в плоскости, которой принадлежат ось OZ и волновой вектор \mathbf{k} (рисунок 4.1). Разделение света в кристалле на две волны, распространяющиеся с разными скоростями, называется явлением *двойного лучепреломления*.

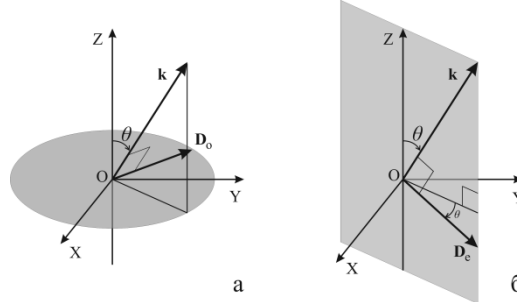


Рисунок 4.1 – Направление поляризации обыкновенной (а) и необыкновенной (б) волн.

Показатель преломления обыкновенной волны не зависит от направления распространения: $n_o = n_x = n_y$, поэтому $\mathbf{E} \parallel \mathbf{D}$ и, следовательно, волновой вектор $\mathbf{k} \perp \mathbf{D}$ и вектор Пойнтинга $\mathbf{S} \perp \mathbf{E}$ также коллинеарны между собой: $\mathbf{k} \parallel \mathbf{S}$.

Показатель преломления необыкновенной волны $n^e(\theta)$ зависит от угла θ между оптической осью OZ и вектором \mathbf{k} . Эту зависимость можно найти из уравнения²

$$\frac{(n^e)^2 \cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{(n^e)^2 \sin^2 \theta}{n_e^2} = 1, \quad (4.4)$$

откуда следует

$$n^e(\theta) = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 - (n_o^2 - n_e^2) \cos^2 \theta}}. \quad (4.5)$$

Если волна распространяется вдоль плоскости XY, то $n^e(\theta = 90^\circ) = n_e$, а если вдоль оси OZ, то $n^e(\theta = 0) = n_o$, и необыкновенная волна не отличается от обыкновенной.

Графически зависимость показателя преломления от направления волнового вектора изображают в виде *индикатрисы* – поверхности $n(\theta, \varphi)$, где (θ, φ) – углы направления волнового вектора \mathbf{k} в сферических координатах. Для обыкновенной волны – это сфера $n_o(\theta, \varphi) \equiv n_o = \text{const}$, а для необыкновенной – эллипсоид вращения (рисунок 4.2). Если $n_e < n_o$, то такой кристалл называется *отрицательным*, а если $n_e > n_o$, то *положительным*. Большинство используемых в нелинейной оптике кристаллов – отрицательные одноосные (см. табл. 2.3).

¹ Оптика двухосных кристаллов и выражения для углов синхронизма в них подробно рассмотрены, например, в книгах [1], [3].

² n_e (с нижним индексом) обозначает главное значение необыкновенного показателя преломления $n_e \equiv n_z$, а с верхним индексом – зависящее от направления распространения $n_e(\theta)$.

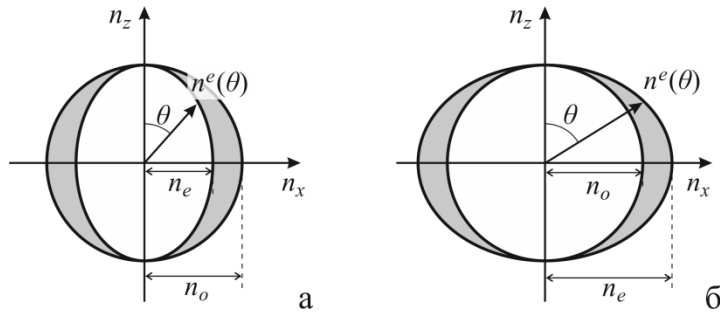
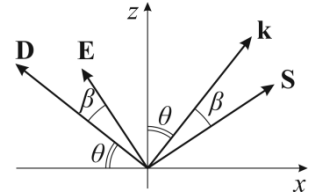


Рисунок 4.2 – Сечения индикатрис показателей преломления отрицательных (а) и положительных (б) одноосных кристаллов (разница между n_o и n_e для наглядности сильно преувеличена).

Угол β между направлениями волнового вектора \mathbf{k} и лучевого вектора \mathbf{S} (иначе говоря, угол между векторами \mathbf{E} и \mathbf{D}) называют *углом анизотропии*. В изотропной среде этот угол равен нулю. Он равен нулю также в одноосных кристаллах для обыкновенных волн. Для необыкновенной волны, распространяющейся под углом θ к оптической оси кристалла, угол анизотропии β можно рассчитать следующим образом:



$$\begin{aligned} D_{\parallel} &\equiv D_z = D \sin \theta = \varepsilon_{\parallel} E_{\parallel} = n_e^2 E_{\parallel} = n_e^2 E \sin(\theta + \beta), \\ D_{\perp} &\equiv \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = D \cos \theta = \varepsilon_{\perp} E_{\perp} = n_o^2 E_{\perp} = n_o^2 E \cos(\theta + \beta). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Разделив первое из соотношений (4.6) на второе, и используя формулу для тангенса суммы двух углов, получаем выражение для $\operatorname{tg} \beta$:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{(n_o^2 - n_e^2) \operatorname{tg} \theta}{n_e^2 + n_o^2 \operatorname{tg}^2 \theta}. \quad (4.7)$$

Введя обозначение $\Delta n = n_o - n_e$, и учитывая, что $\Delta n \ll n_o$, и $\operatorname{tg} \beta \approx \beta$ для малых β , получаем

$$\beta \approx \frac{\Delta n}{n_o} \sin 2\theta. \quad (4.8)$$

Угол анизотропии равен нулю при $\theta = 0^\circ$ или 90° , и максимален при $\theta = 45^\circ$.

Фазовый синхронизм в одноосных кристаллах

Условие фазового синхронизма при генерации второй гармоники: $2k_1 = k_2$. Поскольку $k = n\omega/c$, его можно записать как $n(\omega) = n(2\omega)$. При нормальной дисперсии, чем больше частота, тем больше показатель преломления, поэтому выполнить условие фазового синхронизма в однородных изотропных материалах невозможно. Однако, например, если выбрать поляризацию волны первой гармоники в одноосном отрицательном нелинейном кристалле обыкновенной, а волны второй гармоники – необыкновенной, то при определённом угле θ_c между направлением распространения волн и оптической осью, разница между n_e и n_o скомпенсирует дисперсию, и условие синхронизма будет выполнено: $n_o(\omega) = n^e(\theta_c, 2\omega)$ (рисунок 4.3а). Вообще говоря, направления синхронизма определяются пересечением сферы обыкновенного показателя

преломления удвоенной частоты и эллипсоида необыкновенного показателя преломления первой гармоники, и образуют конус вокруг оси OZ с углом при вершине $2\theta_c$ (рис. 4.3б).

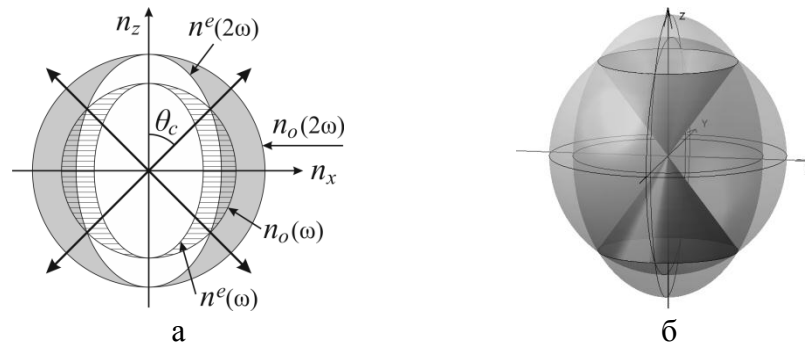


Рисунок 4.3 – Фазовый синхронизм при ГВГ в одноосном кристалле.

Угол θ_c называется *углом синхронизма*. Впервые способ достижения синхронизма в анизотропных кристаллах был предложен Дж. Джордмэйном в 1962 году¹. В общем случае условие фазового синхронизма при генерации суммарной $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ или разностной $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$ частоты записывается следующим образом:

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \quad (4.9)$$

(*векторный синхронизм*), Если же волновые векторы взаимодействующих волн коллинеарны, то должно выполняться скалярное равенство:

$$k_3 = k_1 + k_2 \quad (4.10)$$

(*скалярный синхронизм*). При этом в отрицательных кристаллах волна с наибольшей частотой (ω_3) всегда должна быть необыкновенной, а волны 1 и 2 могут быть либо обе обыкновенные, либо одна обыкновенная, а другая – необыкновенная. Сокращённо синхронизм вида $k_1^o + k_2^o = k_3^e$ обозначается как «*ооe*» ($k_i^o = n_i^o \omega_i / c$, а $k_i^e = n_i^e(\theta) \omega_i / c$), а синхронизм вида $k_1^o + k_2^e = k_3^e$ – как «*оee*». В положительных кристаллах наоборот, волна с частотой ω_3 – обыкновенная, а среди волн низших частот должна быть хотя бы одна необыкновенная (таблица 4.1). Виды синхронизма условно делятся на два типа: к первому относятся взаимодействия, в которых волны 1 и 2 имеют одинаковые поляризации (например, *ооe*, *ееo*), а ко второму – разные (например, *оee*, *оeo*).

Таблица 4.1 – Виды синхронизма в одноосных кристаллах.

	отрицательные ($n_e < n_o$)	положительные ($n_e > n_o$)
Тип I	<i>ооe</i>	<i>ееo</i>
Тип II	<i>оee, eoe</i>	<i>оeo, eoo</i>

Фазовый синхронизм при генерации второй гармоники

При рассмотрении фазового синхронизма удобно перейти от поверхностей показателя преломления к поверхностям волновых векторов, пользуясь соотношением $k = n\omega/c$. На рисунке 4.4а показаны сечения соответствующих эллипсоидов при скалярном

¹ Giordmaine J. A. Mixing of light beams in crystals, Phys. Rev. Letts., **8**, 19. (1962).

ооe-синхронизме (тип I) при генерации второй гармоники в отрицательном одноосном кристалле.

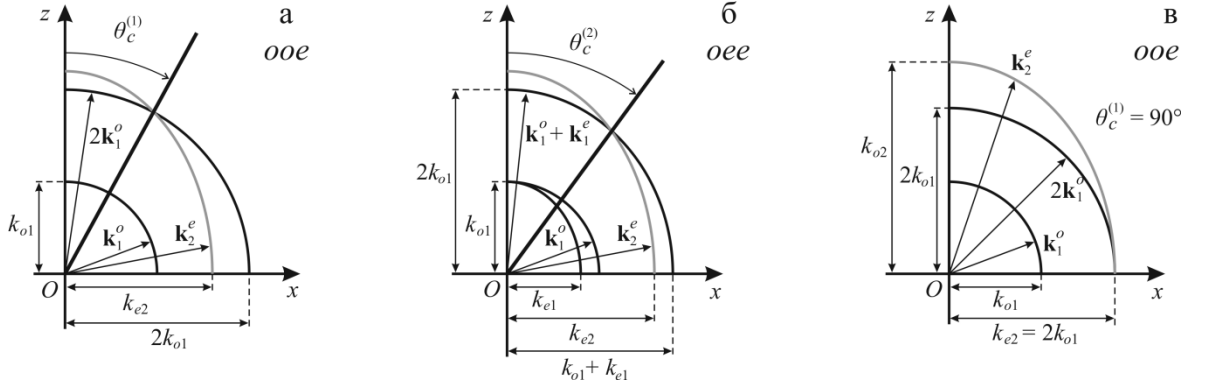


Рисунок 4.4 – Скалярный синхронизм типа *ооe* (а) и *оee* (б) при ГВГ; 90° -ный *ооe*-синхронизм (в).

Введём обозначения $n_{o1} = n_o(\omega)$, $n_{o2} = n_o(2\omega)$, $n_{e2} = n_e(2\omega)$. Тогда условие синхронизма $n_{o1} = n_{e2}^e(\theta)$, с помощью уравнения (4.5), запишется в виде

$$n_{o1} = \frac{n_{o2}n_{e2}}{\sqrt{n_{o2}^2 - (n_{o2}^2 - n_{e2}^2)\cos^2\theta_c^{(1)}}}, \quad (4.11)$$

и выражение для угла синхронизма при *ооe*-взаимодействии:

$$\cos\theta_c^{(1)} = \frac{n_{o2}}{n_{o1}} \sqrt{\frac{n_{o1}^2 - n_{e2}^2}{n_{o2}^2 - n_{e2}^2}}. \quad (4.12)$$

Необходимы и достаточным условием возможности осуществления данного типа синхронизма является $n_{e2} \leq n_{o1}$. Если $\theta_c^{(1)} = 90^\circ$, то есть, $n_{o1} = n_{e2}$, то такой синхронизм называется 90° -ным (рисунок 4.4 в). Он обладает рядом преимуществ: во-первых, угол анизотропии равен нулю, во-вторых, расстройка волновых векторов слабее зависит от отклонения $\Delta\theta$ направления распространения волн от направления синхронизма: $\Delta k \sim \Delta\theta^2$, тогда как обычно $\Delta k \sim \Delta\theta$ (см. гл. 5).

Скалярный *оee*-синхронизм (тип II) проиллюстрирован рисунком 4.4б. Угол синхронизма находится из уравнения

$$k_{o1} + k_1^e(\theta) = k_2^e(\theta), \quad (4.13)$$

или через показатели преломления,

$$n_{o1} + n_1^e(\theta) = 2n_2^e(\theta), \quad (4.14)$$

то есть,

$$n_{o1} + \frac{n_{o1}n_{e1}}{\sqrt{n_{o1}^2 - (n_{o1}^2 - n_{e1}^2)\cos^2\theta_c^{(2)}}} = \frac{2n_{o2}n_{e2}}{\sqrt{n_{o2}^2 - (n_{o2}^2 - n_{e2}^2)\cos^2\theta_c^{(2)}}}. \quad (4.15)$$

Из этого уравнения можно найти угол $\theta_c^{(2)}$. Отметим, что в отрицательных кристаллах, поскольку $n_{e1} < n_{o1}$, угол второго типа синхронизма всегда больше, чем первого: $\theta_c^{(2)} > \theta_c^{(1)}$.

На практике, нелинейное взаимодействие типа *oee* при генерации второй гармоники отличается от *ooe* только тем, что поляризация входного излучения основной частоты повернута на 45° (рисунок 4.5), то есть волна 1ω есть сумма обыкновенной и необыкновенной волн с одинаковой амплитудой.

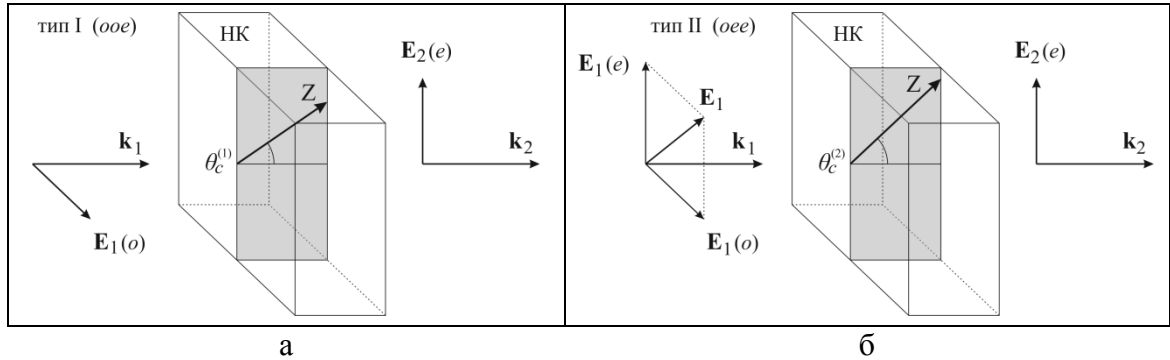


Рисунок 4.5 – Направления поляризации взаимодействующих волн при генерации второй гармоники в отрицательном нелинейном кристалле (НК). Серым цветом обозначена плоскость синхронизма, в которой лежит оптическая ось Z и волновой вектор \mathbf{k} .

Направления векторного синхронизма при ГВГ определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{o1}^{(1)} + \mathbf{k}_{o1}^{(2)} &= \mathbf{k}_2^e, & (ooe) \\ \mathbf{k}_{o1} + \mathbf{k}_1^e &= \mathbf{k}_2^e, & (oee) \end{aligned} \quad (4.16)$$

В этом случае, помимо угла $\theta_{2\omega}$ между волновым вектором второй гармоники и осью OZ требуется определить ещё два угла: направления двух составляющих волны основной частоты (рисунок 4.6).

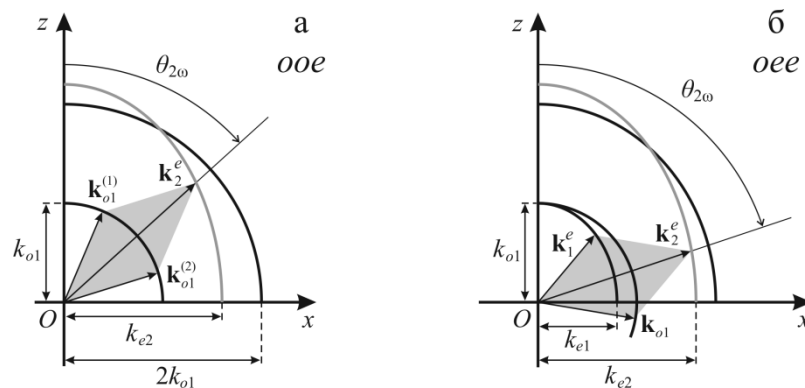


Рисунок 4.6 – Векторный синхронизм при генерации второй гармоники.

Поскольку модуль суммы векторов всегда меньше, либо равен сумме модулей этих векторов, то угол векторного синхронизма меньше, чем угол соответствующего скалярного синхронизма.

Фазовый синхронизм при трёхчастотном параметрическом взаимодействии

При генерации суммарной или разностной частоты условия синхронизма записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1^o + \mathbf{k}_2^o &= \mathbf{k}_3^e, & (ooe) \\ \mathbf{k}_1^o + \mathbf{k}_2^e &= \mathbf{k}_3^e, & (oeo) \\ \mathbf{k}_1^e + \mathbf{k}_2^o &= \mathbf{k}_3^e. & (eoe) \end{aligned} \quad (4.17)$$

При скалярном (коллинеарном) синхронизме их можно заменить соответствующими выражениями для модулей векторов \mathbf{k}_i . На рисунке 4.7 показан расчёт направления скалярного синхронизма, а на рисунке 4.8 – направлений $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ векторного синхронизма.

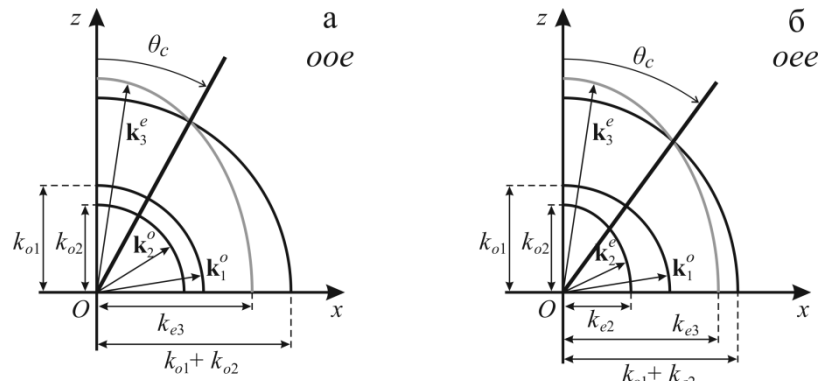


Рисунок 4.7 – Скалярный синхронизм при трёхчастотном взаимодействии.

В случае, например, скалярного *ooe*-синхронизма, первое из уравнений (4.17) сводится к

$$\omega_1 n_{o1} + \omega_2 n_{o2} = \omega_3 n_3^e(\theta), \quad (4.18)$$

то есть,

$$\omega_1 n_{o1} + \omega_2 n_{o2} = \frac{\omega_3 n_{o3} n_{e3}}{\sqrt{n_{o3}^2 - (n_{o3}^2 - n_{e3}^2) \cos^2 \theta_c}}, \quad (4.19)$$

откуда следует выражение для косинуса угла синхронизма

$$\cos \theta_c = \frac{n_{o3}}{\sqrt{n_{o3}^2 - n_{e3}^2}} \sqrt{1 - \frac{\omega_3^2 n_{e3}^2}{(\omega_1 n_{o1} + \omega_2 n_{o2})^2}}. \quad (4.20)$$

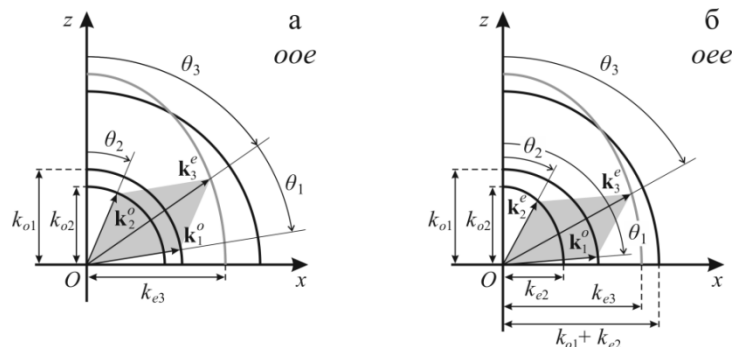


Рисунок 4.8 – Векторный синхронизм при трёхчастотном взаимодействии.

При векторном *ooe*-синхронизме (рисунок 4.8 а), как следствие теоремы косинусов, можно записать следующую систему уравнений:

$$\cos \varphi_1 = \frac{\gamma^2 n_{o1}^2 - (1-\gamma)^2 n_{o2}^2 + n_{e3}^2 (1-\varepsilon_3^2 \cos^3 \theta_3)^{-1}}{2\gamma n_{o1} n_{e3} (1-\varepsilon_3^2 \cos^3 \theta_3)^{-1/2}},$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{(1-\gamma)^2 n_{o2}^2 - \gamma^2 n_{o1}^2 + n_{e3}^2 (1-\varepsilon_3^2 \cos^3 \theta_3)^{-1}}{2(1-\gamma) n_{o1} n_{e3} (1-\varepsilon_3^2 \cos^3 \theta_3)^{-1/2}},$$
(4.21)

где введены обозначения $\varphi_1 = \theta_3 - \theta_1$, $\varphi_2 = \theta_3 - \theta_2$, $\gamma = \omega_1/\omega_3$, $\varepsilon_3^2 = (n_{o3} - n_{e3})^2/n_{o3}^2$. Эти выражения определяют (для заданных γ , ω_3 , θ_3) направления распространения волн 1 и 2, при которых выполняется условие синхронизма.

Экспериментальное определение направления синхронизма

В одном из способов точного определения направления синхронизма в нелинейном кристалле используется расходящийся (или сходящийся) пучок накачки, как показано на рисунке 4.9. Лучи света в этом случае распространяются в различных направлениях, в том числе, и в направлении синхронизма. На экран или камеру проецируются лучи второй гармоники. В точка экрана, соответствующих направлению синхронизма интенсивность света 2ω будет максимальной.

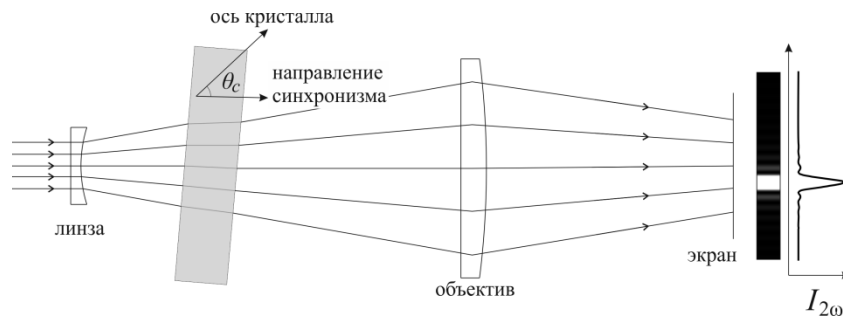


Рисунок 4.9 – Схема определения направления синхронизма.

Температурная перестройка синхронизма

В некоторых кристаллах обыкновенный и необыкновенный показатели преломления по-разному зависят от температуры. Следовательно, при изменении температуры кристалла соотношение между n_o и n_e изменяется, и условие фазового синхронизма нарушается. В таких случаях необходима термостабилизация кристалла. Кроме того, при прохождении лазерных пучков через кристалл, часть излучения поглощается, нагревая его (в общем случае, неравномерно). Это приводит к уменьшению эффективности преобразования частоты. Для оценки влияния изменения температуры вводится величина, называемая *температурной шириной синхронизма* ΔT : удвоенное изменение температуры, при котором эффективность преобразования падает вдвое. Поскольку эффективность преобразования частоты в приближении заданной амплитуды накачки $\sim \text{sinc}^2(\Delta kL/2)$, то при $\Delta kL = \pi$ она уменьшается примерно вдвое (а точнее, в 2,5 раза).

При малых изменениях температуры можно считать, что $\Delta k = [\partial(\Delta k)/\partial T] \cdot \Delta T/2$. Следовательно,

$$\Delta T = \frac{2\pi}{L|\partial\Delta k/\partial T|} \quad (4.22)$$

Например, при ГВГ с *ооо*-синхронизмом $\Delta k = 2\omega(n_2^e - n_{o1})/c$, то есть,

$$\Delta T = \frac{\lambda}{2L} \left| \frac{\partial n_2^e(\theta)}{\partial T} - \frac{\partial n_{o1}}{\partial T} \right|^{-1}, \quad (4.23)$$

где λ – длина волны первой гармоники в вакууме. Если характерные изменения температуры много меньше ΔT , то их можно не учитывать.

Зависимость фазового синхронизма от температуры может быть использована для изменения угла синхронизма. Например, при определённой температуре в некоторых кристаллах может выполняться равенство $n_o(1\omega) = n_e(2\omega)$, то есть, условие для 90°-ного *ооо*-синхронизма при ГВГ. На рисунке 4.10 для примера приведена зависимость главных значений показателей преломления n_{o1} и n_{e2} ниобата лития на длине волны $\lambda_1 = 1064$ нм (генерация второй гармоники Nd:YAG-лазера, $\lambda_2 = 532$ нм). Необыкновенный показатель гораздо сильнее зависит от температуры, и при температуре $T = 43^\circ\text{C}$ имеем $n_{o1} = n_{e2}$.

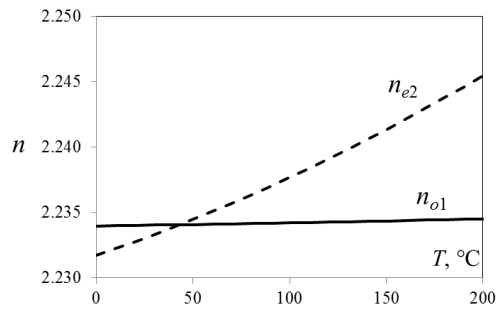


Рисунок 4.10 – Зависимость $n_{o1}(T)$ и $n_{e2}(T)$ для LiNbO_3 при $\lambda_1 = 1064$ нм.

Квазисинхронизм

Если выполнено условие фазового синхронизма, то амплитуда преобразованного излучения (например, волны второй гармоники при ГВГ) в приближении заданного поля накачки пропорциональна длине нелинейной среды: $a_2 \sim z$. В противном случае, при $\Delta k \neq 0$, амплитуда a_2 зависит от z периодически: $a_2 \sim \sin(\Delta kz/2)$ – см. рисунок 1.11б. При прохождении светом одной длины когерентности $L_c = \pi/\Delta k$ начинается обратная перекачка энергии от волны 2ω в волну ω . Предположим теперь, что нелинейный кристалл составлен из слоёв, с толщиной каждого равной нечётному числу длин L_c , и взаимно противоположными ориентациями оптических осей в соседних слоях (рисунок 4.11а). Тогда на границе раздела слоёв эффективная восприимчивость d_{eff} будет скачком менять знак, и амплитуда a_2 будет монотонно возрастать (рисунок 4.11б), хоть и медленнее, чем при идеальном синхронизме. Такой способ «дискретного» фазового синхронизма получил название *квазисинхронизма*, а периодически ориентированные слоистые преобразователи частоты называются кристаллами с *регулярной доменной структурой* (РДС).

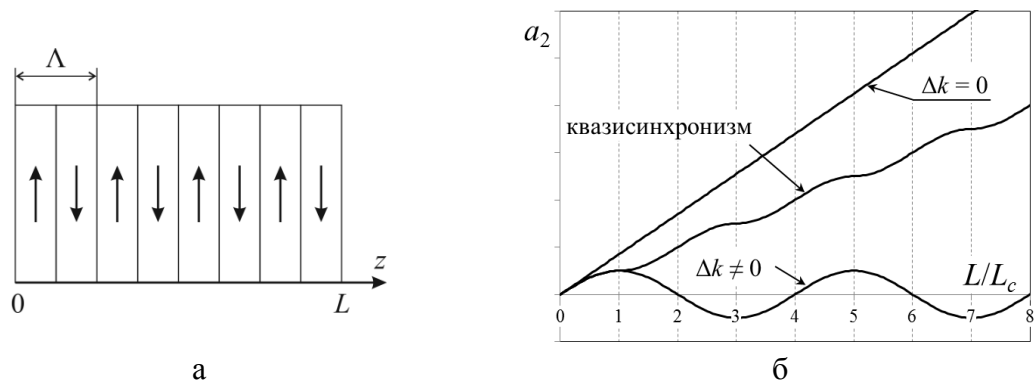


Рисунок 4.11 – а: схематичное изображение кристалла с регулярной доменной структурой; б: зависимость амплитуды второй гармоники a_2 в приближении заданного поля накачки от длины нелинейного кристалла L при идеальном синхронизме ($\Delta k = 0$), в отсутствие синхронизма ($\Delta k \neq 0$), и при квазисинхронизме в РДС-кристалле.

Нелинейное преобразование частоты в периодически ориентированных кристаллах исторически было одним из первых предложенных способов осуществления фазового синхронизма¹. Но тогда, в начале 1960-х, оптическая технология не позволяла создавать такие структуры, и практически все нелинейно-оптические устройства использовали обычный способ достижения синхронизма, основанный двулучепреломлении в анизотропных кристаллах. Только в начале 90-х появилась возможность выращивать тонкие кристаллические слои заданной толщины и ориентации оптической оси, и РДС-кристаллы получили широкое распространение.

Несмотря на сложность изготовления РДС-кристаллов, и то, что при квазисинхронизме рост амплитуды преобразованного излучения происходит медленнее, чем при идеальном синхронизме, такой способ осуществления фазового синхронизма даёт ряд новых возможностей:

- Традиционный способ синхронизма часто бывает невозможно осуществить из-за недостаточного двулучепреломления ($\Delta n = n_o - n_e$) для компенсации дисперсии, особенно в области высоких частот, где дисперсия велика, а Δn остаётся приблизительно постоянным. А в РДС-кристаллах можно использовать даже не обладающие двулучепреломлением нелинейные кристаллические среды (то есть, изотропные, но нецентросимметричные).
- Можно использовать, например, элемент d_{33} тензора нелинейной восприимчивости, который часто бывает много больше недиагональных элементов, но даёт вклад в эффективную восприимчивость только когда все три взаимодействующие волны – необыкновенные.
- В РДС-кристалле возможны все типы нелинейного взаимодействия, то есть, например, ooo , ooe , oee , eoe , eee и т.д. На их основе можно создавать преобразователи частоты, не зависящие от поляризации входного излучения.
- Появляется возможность одновременной генерации двух и более оптических гармоник или суммарных и разностных частот в одном нелинейном кристалле. Например, при обычном синхронизме, для генерации третьей гармоники требуется два отдельных кристалла: удвоитель ($\omega + \omega \rightarrow 2\omega$) с неполным преобразованием, и сумматор

¹ Armstrong J. A., Bloembergen N., Ducuing J., Pershan P. S. Interactions Between Light Waves in a Nonlinear Dielectric, Phys. Rev., **127**, 1918 (1962).

$(\omega + 2\omega \rightarrow 3\omega)$, поскольку направления синхронизма для ГВГ и ГСЧ, в общем случае, не совпадают. А в РДС-кристалле для такой «многочастотной» генерации достаточно выбрать толщину домена кратной длинам когерентности обоих процессов.

В РДС-кристалле эффективная нелинейная восприимчивость периодически зависит от координаты z . Например, для структуры, изображённой на рисунке 4.11а зависимость имеет вид

$$d(z) = d_{eff} \operatorname{sign} \left[\cos(2\pi z/\Lambda) \right], \quad (4.24)$$

где d_{eff} – эффективная восприимчивость однородного материала, а Λ – период структуры. В общем случае периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье

$$d(z) = d_{eff} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m e^{ik_m z}, \quad (4.25)$$

где $k_m = 2\pi m/\Lambda$. Для функции (4.24) коэффициенты Фурье равны $\alpha_m = 2/m\pi \cdot \sin(m\pi/2)$.

Если теперь провести вывод уравнений для связанных амплитуд взаимодействующих волн, как это было сделано в главе 3 (в приближении медленно меняющихся амплитуд, и учитывая только одну m -ю гармонику разложения (4.25), которая даёт наибольший вклад), то получится следующая система:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dz} &= -\frac{4\pi i \omega_1 d_q}{n_1 c} A_2^* A_3 e^{-i\Delta k_q z}, \\ \frac{dA_2}{dz} &= -\frac{4\pi i \omega_2 d_q}{n_2 c} A_1^* A_3 e^{-i\Delta k_q z}, \\ \frac{dA_3}{dz} &= -\frac{4\pi i \omega_3 d_q}{n_3 c} A_1 A_2 e^{i\Delta k_q z}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

где $d_q = d\alpha_m$, $\Delta k_q = k_3 - k_1 - k_2 + k_m$. Уравнения (4.26) имеют в точности такой же вид, как и (3.9), но с другими значениями коэффициента нелинейной связи d и расстройки волновых векторов Δk . Поскольку величины коэффициентов α_m убывают с ростом m , то желательно использовать гармоники первого порядка, $m = 1$. Тогда

$$\Delta k_q = k_3 - k_1 - k_2 + 2\pi/\Lambda, \quad d_q = 2d/\pi, \quad (4.27)$$

и оптимальный период РДС равен

$$\Lambda = 2L_c = \frac{2\pi}{|k_3 - k_1 - k_2|}. \quad (4.28)$$

5. Пространственные и временные эффекты при нелинейном преобразовании частоты света

В разделе 3 нелинейно-оптические явления рассматривались в приближении плоских монохроматических волн, бесконечных в пространстве и времени. Кроме того, мы пренебрегли поглощением в нелинейной среде. В таких предположениях из теории следует, что при точном выполнении условия фазового синхронизма легко достигнуть коэффициента преобразования частоты, сколь угодно близкого к единице (см., например, рисунок 3.2а). Однако реальные лазерные пучки имеют конечные апертуру и длительность, ширину спектра и расходимость. Эти факторы снижают эффективность генерации новых частот. В настоящем разделе мы вкратце рассмотрим процессы нелинейного преобразования частоты с более общих позиций, на примере генерации второй гармоники.

Поглощение

Линейное поглощение в среде определяется мнимой частью диэлектрической проницаемости. Если вывести систему уравнений (3.36) без предположения, что $\text{Im} \varepsilon_i = 0$, получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dz} + \frac{\delta_1}{2} A_1 &= -i\sigma_1 A_1^* A_2 e^{-i\Delta kz}, \\ \frac{dA_2}{dz} + \frac{\delta_2}{2} A_2 &= -i\sigma_2 A_1^2 e^{i\Delta kz}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где σ_i – коэффициенты нелинейной связи, а δ_i – коэффициенты поглощения по интенсивности:

$$\sigma_i = \frac{4\pi\omega_i d}{n_i c}, \quad \delta_i = -\frac{(\mathbf{e}_i \cdot \text{Im} \varepsilon_i \cdot \mathbf{e}_i) \omega_i}{n_i c}. \quad (5.2)$$

В последней формуле выражение в скобках есть произведение мнимой части тензора проницаемости $\varepsilon_i \equiv \varepsilon(\omega_i)$ на единичный вектор поляризации \mathbf{e}_i соответствующей волны (слева и справа). Поскольку в поглощающей среде $\text{Im} \varepsilon < 0$, то $\delta > 0$.

Переходом к вещественным амплитудам a_i ($A_i = a_i \exp(i\varphi_i)$) и обобщённой фазе $\Psi = 2\varphi_1 - \varphi_2 + \Delta kz$ система уравнений (5.1) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dz} + \frac{\delta_1}{2} a_1 + \sigma_1 a_1 a_2 \sin \Psi &= 0, \\ \frac{da_2}{dz} + \frac{\delta_2}{2} a_2 - \sigma_2 a_1^2 \sin \Psi &= 0, \\ \frac{d\Psi}{dz} - \Delta k + \left(2\sigma_2 a_2 - \sigma_2 \frac{a_1^2}{a_2} \right) \cos \Psi &= 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Последняя система, при определённых допущениях, поддаётся аналитическому решению (см., например, [1]), но, как правило, в нелинейно-оптических кристаллах хорошего качества поглощение мало ($\exp(-\delta_i L) \approx 1$), и уменьшением интенсивности волн из-за него можно пренебречь. Однако нагрев кристалла из-за поглощения может быть

существенным при использовании непрерывных или импульсно-периодических лазеров. Неоднородное изменение температуры $T(x, y, z)$, и связанное с ним изменение показателей преломления приводит к двум основным эффектам. Во-первых, возникает пространственно-неоднородная по сечению пучка фазовая расстройка $\Delta k(x, y, z)$, которая существенно ограничивает эффективность преобразования. Её можно учесть в численных расчётах, если решать систему (5.1) совместно с уравнением теплопроводности и зависимостью $\Delta k(T) = \Delta k(n_i(T), i = 1, 2, 3)$ ¹. Во-вторых, проявляется нелинейная рефракция, то есть тепловая линза, приводящая к самофокусировке или дефокусировке излучения. Второй эффект появляется при значительно больших интенсивностях, чем первый, и если эффективное фокусное расстояние тепловой линзы много больше длины нелинейной среды, то его можно не учитывать.

Диафрагменный апертурный эффект

Как мы выяснили в разделе 4, необыкновенная волна, распространяющаяся под углом θ к оптической оси испытывает снос на угол β , который рассчитывается по формуле (4.8). Например, при генерации второй гармоники, при скалярном *ооо*-синхронизме, пучок второй гармоники распространяется под углом β :

$$\operatorname{tg} \beta \approx \frac{n_{o2} - n_{e2}}{n_{o2}} \sin 2\theta_c \quad (5.4)$$

относительно пучка первой гармоники, и постоянно выходит из зоны нелинейного взаимодействия, поскольку пучки ограничены в пространстве (рисунок 5.1 а). Это явление называют *диафрагменным апертурным эффектом* (ДАЭ), и при его рассмотрении вводится *эффективная апертурная длина*, то есть расстояние вдоль оси Z, на котором пучок смещается в поперечном направлении на расстояние, равное размеру пучка

$$L_\beta = \frac{d_0}{\beta}, \quad (5.5)$$

где d_0 – поперечный размер пучка основной частоты. При 90°-ном синхронизме угол анизотропии β равен нулю, и ДАЭ отсутствует. Если длина нелинейной среды $L \ll L_\beta$, то диафрагменный эффект можно не учитывать.

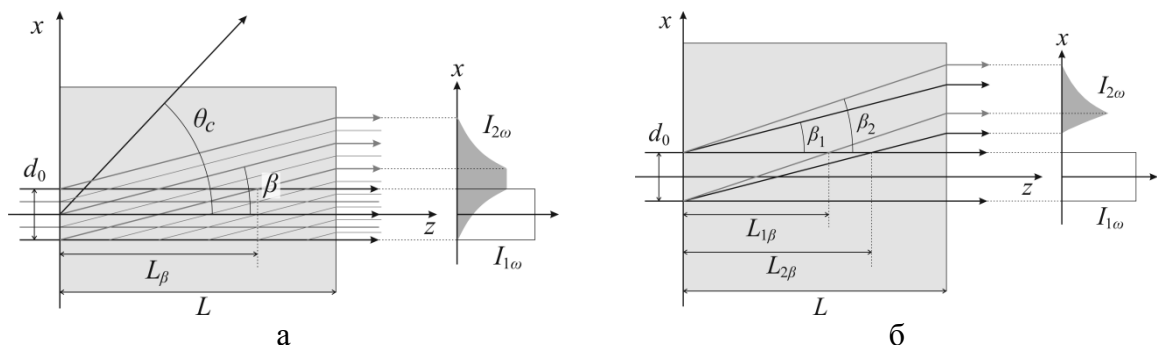


Рисунок 5.1 – Диафрагменный апертурный эффект при ГВГ со скалярным синхронизмом типа *ооо* (а); *ооо* (б).

¹ см. также главу 7, раздел «Тепловая нелинейность».

При скалярном *оee*-синхронизме (рисунок 5.1 б) происходит поперечный снос как волны второй гармоники, так и необыкновенной компоненты волны основной частоты. Соответственно, есть два угла анизотропии:

$$\operatorname{tg} \beta_1 \approx \frac{n_{o1} - n_{e1}}{n_{o1}} \sin 2\theta_c, \quad \operatorname{tg} \beta_2 \approx \frac{n_{o2} - n_{e2}}{n_{o2}} \sin 2\theta_c, \quad (5.6)$$

и две апертурные длины – для первой и второй гармоники:

$$L_{1\beta} = d_{o1} / \beta_1, \quad L_{2\beta} = d_{o2} / \beta_2. \quad (5.7)$$

ДАЭ при *оee*-синхронизме более опасен, чем при *оoe*, поскольку во втором случае генерация второй гармоники происходит на всей длине нелинейной среды, хоть и с меньшей эффективностью, а в первом случае генерация 2ω прекращается при $z > L_{1\beta}$ (когда *o*- и *e*-волны 1ω перестают перекрываться).

В простейшем геометрическом приближении (и при постоянной амплитуде накачки) выходную мощность излучения 2ω можно рассчитать, взяв интеграл от выражения (3.38) по переменной x , учитывая, что интенсивность волны первой гармоники и длина взаимодействия зависят от x : $I_1 = I_1(x)$, $L = L(x)$.

Более корректный подход к описанию ДАЭ состоит в модификации системы уравнений для связанных амплитуд (3.36). При их выводе мы считали, что $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$. Однако в анизотропной среде в общем случае это не так, и вместо уравнения (3.1) следует использовать более общее выражение

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} + \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{\text{NL}}}{\partial t^2}. \quad (5.8)$$

Тогда в правой части уравнений, содержащих амплитуды волн с необыкновенной поляризацией появляется член $\beta \partial A / \partial x$, который и описывает эффект сноса. Например, при *оoe*-взаимодействии система (3.36) приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial z} &= -i\sigma_1 A_1^* A_2 e^{-i\Delta kz}, \\ \frac{\partial A_2}{\partial z} + \beta \frac{\partial A_2}{\partial x} &= -i\sigma_2 A_1^2 e^{i\Delta kz}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Дифракция

Эффективность нелинейного преобразования частоты зависит также от поперечного размера взаимодействующих пучков, которые изменяются при распространении вследствие дифракции. Для оценки влияния дифракционного расплывания пучка следует сравнивать дифракционную длину (длину перетяжки):

$$L_{\text{диф}} = 2z_R = kw_0^2, \quad (5.10)$$

то есть расстояние, на котором размер пучка увеличивается из-за дифракции на величину порядка исходного размера пучка $2w_0$, с длиной нелинейного взаимодействия. Если длина кристалла $L \ll L_{\text{диф}}$, то дифракцией можно пренебречь. В противном случае следует решать уравнения для связанных амплитуд, модифицированные таким образом, чтобы в

них были включены вторые производные по поперечным координатам, которыми мы пренебрегли при выводе уравнений (3.36) из волнового уравнения (3.1):

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{i}{2k_1} \Delta_{\perp} A_1 &= -i\sigma_1 A_1^* A_2 e^{-i\Delta k z}, \\ \frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{i}{2k_2} \Delta_{\perp} A_2 &= -i\sigma_2 A_1^2 e^{i\Delta k z},\end{aligned}\quad (5.11)$$

где $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – поперечный лапласиан, который «отвечает» за дифракцию. Как нетрудно заметить, уравнения (5.11) аналогичны параболическому уравнению Леонтовича (1.16), в правой части которого добавлен источник – нелинейное взаимодействие.

ГВГ в расходящихся пучках

Для количественной оценки степени влияния расходимости (а также точности постановки нелинейного кристалла в угол синхронизма) вводят понятие *угловой ширины синхронизма* (аналогично введённой в (4.22) температурной ширине). Это есть угол $\Delta\theta$, такой, что при распространении волны основной частоты вдоль направления $\theta_c \pm \Delta\theta/2$ эффективность преобразования уменьшается в ~ 2 раза по сравнению с направлением синхронизма θ_c (в приближении заданного поля накачки). Зависимость $\Delta k(\theta)$ в окрестности θ_c можно аппроксимировать степенным рядом

$$\Delta k(\theta) = \left. \frac{\partial \Delta k}{\partial \theta} \right|_{\theta_c} (\theta - \theta_c) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \Delta k}{\partial \theta^2} \right|_{\theta_c} (\theta - \theta_c)^2 + \dots = \gamma_1 (\theta - \theta_c) + \gamma_2 (\theta - \theta_c)^2 + \dots \quad (5.12)$$

Тогда угловая ширина синхронизма находится из равенства $\Delta k L = \pi$, то есть,

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{L|\gamma_1|}. \quad (5.13)$$

Если же выполняется условие 90°-ного синхронизма, то $\gamma_1 = 0$, и следует учитывать вторую производную расстройки волновых векторов:

$$\Delta\theta_{90^\circ} = 2 \sqrt{\frac{\pi}{L|\gamma_2|}}. \quad (5.14)$$

Например, при генерации второй гармоники в *ооо*-синхронизме зависимость $\Delta k(\theta)$ имеет следующий вид (см. (4.5)):

$$\Delta k \equiv k_2 - 2k_1 = \frac{2\omega}{c} [n_2^e(\theta) - n_{o1}] = \frac{4\pi}{\lambda_1} \left[\frac{n_{o2} n_{e2}}{\sqrt{n_{o2}^2 - (n_{o2}^2 - n_{e2}^2) \cos^2 \theta}} - n_{o1} \right]. \quad (5.15)$$

Учитывая, что $\cos \theta_c = (n_{o2}/n_{o1}) \sqrt{(n_{o1}^2 - n_{e2}^2)/(n_{o2}^2 - n_{e2}^2)}$, получается выражение для γ_1 :

$$\gamma_1 \equiv \left. \frac{\partial \Delta k}{\partial \theta} \right|_{\theta_c} = \frac{4\pi}{\lambda_1} \frac{(n_{o2}^2 - n_{e2}^2) \cos \theta_c \sin \theta_c}{[n_{o2}^2 - (n_{o2}^2 - n_{e2}^2) \cos^2 \theta_c]^{3/2}} = \frac{4\pi}{\lambda_1} \frac{n_{o1} \sqrt{(n_{o1}^2 - n_{e2}^2)(n_{o2}^2 - n_{o1}^2)}}{n_{o2} n_{e2}}, \quad (5.16)$$

а при 90° -ном *ooe*-синхронизме $\cos \theta_c = 0$, и

$$\gamma_2(\theta_c = \pi/2) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta k}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta_c = \pi/2} = \frac{2\pi n_{e2} (n_{o2}^2 - n_{e2}^2)}{\lambda_1 n_{o2}^2}. \quad (5.17)$$

Угловая ширина синхронизма определяет, во-первых, допустимую расходимость излучения накачки, и во-вторых, требуемую точность угловой юстировки кристалла.

Пример

Генерация второй гармоники неодимового лазера ($\lambda_1 = 1,064$ мкм) в кристалле ниобата лития LiNbO_3 . Главные значения показателей преломления приведены в таблице 2.3. При *ooe*-синхронизме $\theta_c = 83,94^\circ$, $\gamma_1 = 2166 \text{ см}^{-1}$, и в кристалле длиной $L = 1$ см угловая ширина синхронизма равна $\Delta\theta = 0,17^\circ$. При температуре $T = 43^\circ\text{C}$ выполняется условие 90° -ного синхронизма, и $n_{o1} = n_{e2} = 2,234$, $\theta_c = 90^\circ$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 10148 \text{ см}^{-1}$, и $\Delta\theta = 2^\circ$, то есть, почти на порядок больше.

Следует помнить, что направления синхронизма в кристалле образуют конус (рис. 4.3 б), поэтому эффективность преобразования чувствительна к отстройке от угла синхронизма только в одном направлении – в плоскости, которой принадлежат вектор \mathbf{k} и оптическая ось кристалла (в *плоскости синхронизма*).

Предположим, что в нелинейный кристалл входит расходящийся пучок излучения основной частоты, имеющий конечную апертуру d_0 , характеризующийся углом расходимости φ_0 , который много больше дифракционного угла $1,22\lambda/d_0$ (рисунок 5.2 а).

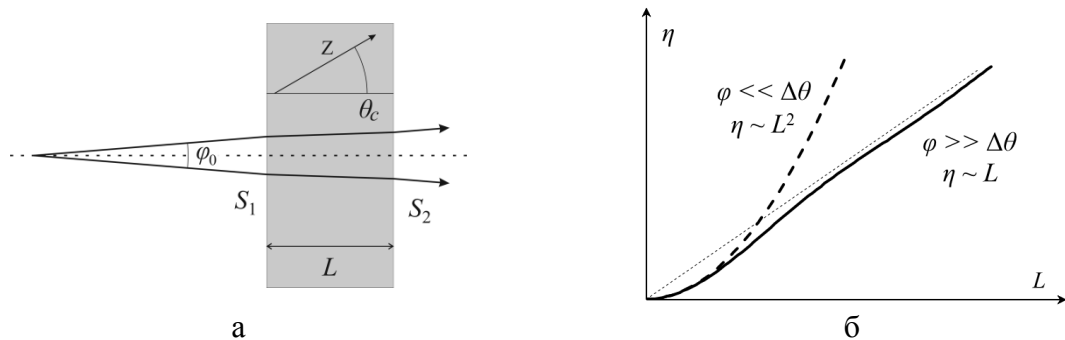


Рисунок 5.2 – Генерация второй гармоники в расходящемся пучке.

Эффективность генерации второй гармоники можно оценить в геометрикооптическом приближении: входной пучок основной частоты разбивается на несколько парциальных лучей $S_1(\varphi)$, каждый из которых распространяется под своим углом φ к направлению синхронизма: $I_1 = \sum S_1(\varphi)$. Для каждого из них рассчитывается эффективность преобразования $\eta(\varphi) = \eta(\Delta k(\varphi))$, по формулам из таблицы 3.1. Тогда выходная интенсивность излучения 2ω будет равна $I_2 = \sum S_2(\varphi) = \sum \eta(\varphi) S_1(\varphi)$. Например, в приближении заданного поля накачки (см. формулу (3.39))

$$\eta(\varphi) = \frac{8\pi\sigma^2}{nc} S_1(\varphi) L^2 \text{sinc}^2 \frac{\Delta k(\varphi)L}{2}. \quad (5.18)$$

В таких расчётах можно положить $n(\omega) = n(2\omega) = n$, и $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = 4\pi\omega d/nc$. Если парциальные лучи равномерно распределены в диапазоне углов от $-\varphi_0/2$ до $\varphi_0/2$ (то есть,

внутри кристалла – от $-\varphi_0/2n$ до $\varphi_0/2n$, в силу малости угла φ_0), то полная эффективность преобразования равна интегралу

$$\eta = \frac{8\pi\sigma^2}{c\varphi_0} S_1(0) L^2 \int_{-\varphi_0/2n}^{+\varphi_0/2n} \operatorname{sinc}^2 \frac{\gamma_1 \varphi L}{2} d\varphi \quad (5.19)$$

При $\varphi_0/n \ll \Delta\theta$ расходимость практически не влияет на эффективность преобразования, и $\eta \sim L^2$. При $\varphi_0/n \gg \Delta\theta$, получается асимптотически линейная зависимость $\eta \sim L$. На рисунке 5.2 б показаны графики $\eta(L)$ в обоих предельных случаях.

ГВГ сфокусированных гауссовых пучков

Коэффициент преобразования во вторую гармонику, как правило, тем больше, чем больше интенсивность излучения накачки. Интенсивность же можно увеличить, если сфокусировать лазерный пучок в нелинейный кристалл. Однако при этом также будут сильнее проявляться диафрагменный апертурный эффект и дифракция, которые снижают эффективность ГВГ. Таким образом, должна существовать *оптимальная фокусировка*, при которой коэффициент преобразования частоты максимален.

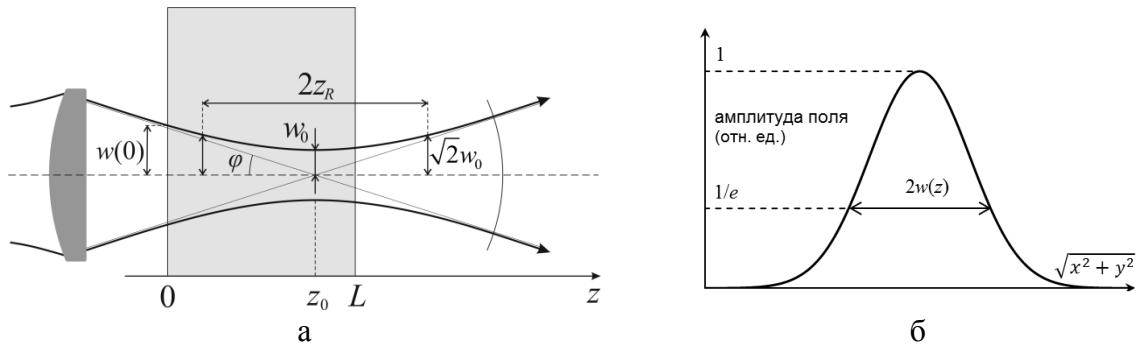


Рисунок 5.3 – а: Фокусировка гауссова пучка в нелинейный кристалл, б: распределение амплитуды поля в поперечной плоскости.

Пусть гауссов пучок волны основной частоты фокусируется в нелинейный кристалл, как показано на рисунке 5.3. Его амплитуда (см. формулы (1.17) – (1.20)) равна

$$A_1(x, y, z) = A_{10} \frac{w_0}{w(z)} \exp\left[-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right] \exp\left[-\frac{ik_1 \rho^2}{2R(z)} + i\zeta(z)\right], \quad (5.20)$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Интенсивность равна

$$I_1(x, y, z) = I_{10} \left[\frac{w_0}{w(z)}\right]^2 \exp\left[-\frac{2\rho^2}{w^2(z)}\right], \quad (5.21)$$

где I_{10} – интенсивность на оси пучка в перетяжке.

Будем работать в приближении заданного поля накачки. Тогда мощность пучка 1ω можно считать постоянной, и равной мощности в перетяжке (при $w(z) = w_0$): $P_1 = \pi w_0^2 I_{10} / 2$.

При слабой фокусировке, когда длина перетяжки много больше длины кристалла ($L \ll 2z_R = 2\pi(w_0)^2/\lambda$) гауссов пучок можно считать плоской волной, с модулированной по

поперечным координатам интенсивностью. В этом случае интенсивность волны второй гармоники на выходе кристалла рассчитывается по формуле (3.38):

$$I_2 = \frac{8\pi n_2 \sigma_2^2 L^2}{n_1^2 c} I_1^2 \operatorname{sinc}^2(\Delta k L / 2), \quad (5.22)$$

Из этого равенства, в частности, следует, что пучок второй гармоники также гауссов, но в $\sqrt{2}$ раз тоньше пучка накачки. Мощность волны 2ω находится интегрированием интенсивности I_2 по поперечной плоскости:

$$P_2 = \int_0^\infty 2\pi\rho I_2(\rho) d\rho = \frac{8\pi\sigma_2^2 n_2 L^2}{n_1^2 c} \frac{\pi w_0^2}{4} I_1^2 \operatorname{sinc}^2(\Delta k L / 2). \quad (5.23)$$

Следовательно, КПД преобразования по мощности равен

$$\eta_P = \frac{P_2}{P_1} = \frac{8\sigma_2^2 n_2 L^2}{n_1^2 c w_0^2} P_1 \operatorname{sinc}^2(\Delta k L / 2). \quad (5.24)$$

Если не ограничиваться приближением слабой фокусировки, то следует учитывать явления дифракции и сноса необыкновенной волны, то есть, например, при *ооо*-синхронизме, решать систему уравнений, являющуюся объединением систем (5.9) и (5.11) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{i}{2k_1} \Delta_\perp A_1 &= -i\sigma_1 A_1^* A_2 e^{-i\Delta k z}, \\ \frac{\partial A_2}{\partial z} + \beta \frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{i}{2k_2} \Delta_\perp A_2 &= -i\sigma_2 A_1^2 e^{i\Delta k z}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

В приближении заданного поля накачки можно решать (численно или аналитически) только второе из этих уравнений, подставив A_1 в виде (5.20). Бойд и Клейнман¹ предложили приближённый квазигеометрический метод расчёта эффективности нелинейного преобразования в случае сильной фокусировки (его изложение можно найти в книге [1]). Приведём без вывода главный результат: наибольший коэффициент преобразования частоты достигается (если диафрагменный апертурный эффект пренебрежимо мал) при такой фокусировке, что перетяжка находится в середине нелинейного кристалла, отношение длины кристалла к длине перетяжки $L/2z_R$ равно 2,84, а расстройка волновых векторов $\Delta k L = 3,2$. При этих условиях КПД преобразования равно

$$\eta_P = \frac{P_2}{P_1} = 1.07 \frac{8\sigma_2^2 n_2 \omega L}{n_1 c^2} P_1 = 1.07 \frac{128\pi^2 \omega^3 d^2 L}{n_1 n_2 c^4} P_1 \quad (5.26)$$

Может показаться странным, что наибольшая выходная мощность в данном случае достигается при ненулевой фазовой расстройке. Это – следствие того, что фаза сфокусированного пучка претерпевает изменение на π радиан при переходе через перетяжку – см. определение функции $\zeta(z)$ в формулах (1.20).

¹ Boyd J. D., Kleinman D. A., Parametric interaction of focused gaussian light beams, J. Appl. Phys., **39**, №8, 3597 (1968).

Преобразование некогерентного излучения

Вследствие различной дисперсии показателя преломления в окрестностях основной и удвоенной частот, расстройка волновых векторов зависит от частоты. Эту зависимость вблизи центральной частоты ν_0 , для которой выполняется условие синхронизма $\Delta k(\nu_0) = 0$, можно аппроксимировать выражением $\Delta k(\nu) \approx (\partial \Delta k / \partial \nu) \cdot (\nu - \nu_0)$. Аналогично тому, как мы вводили температурную и угловую ширину синхронизма, можно определить *спектральную ширину* – удвоенное изменение частоты излучения накачки (или длины волны), при котором эффективность преобразования уменьшается в 2 раза:

$$\Delta \nu = \frac{2\pi}{L |\partial \Delta k / \partial \nu|}, \quad \text{или} \quad \Delta \lambda = \frac{2\pi}{L |\partial \Delta k / \partial \lambda|}. \quad (5.27)$$

Например, при ГВГ в *ооо*-синхронизме,

$$\Delta k = k_2 - 2k_1 = \frac{4\pi\nu}{c} [n_2^e(\theta, 2\nu) - n_{o1}(\nu)] = \frac{4\pi}{\lambda_1} [n_2^e(\theta, \lambda_1/2) - n_{o1}(\lambda_1)], \quad (5.28)$$

и спектральная ширина синхронизма находится по формуле

$$\Delta \lambda = \frac{\lambda_1}{2L} \left| \frac{\partial n_2^e(\theta)}{\partial \lambda_2} - \frac{\partial n_{o1}}{\partial \lambda_1} \right|^{-1}. \quad (5.29)$$

Если ширина спектра волны основной частоты существенно меньше $\Delta \lambda$, то эффективность её преобразования будет приблизительно такая же, как у монохроматического излучения. В противном случае, при нелинейном взаимодействии *широкополосного* излучения, применяют следующий метод: излучение накачки с помощью дисперсионного элемента (призмы или дифракционной решётки) раскладывают в угловой спектр (рис. 5.4) так, чтобы каждая спектральная компонента ν распространялась в кристалле под своим углом к оптической оси, равным углу синхронизма $\theta_c(\nu)$.

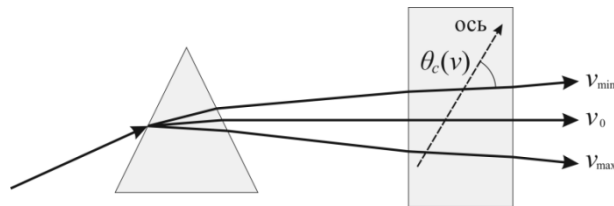


Рисунок 5.4 – Преобразование широкополосного излучения с помощью призмы.

Преобразование импульсного излучения

На эффективность нелинейного взаимодействия ультракоротких импульсов света влияют два специфических эффекта: *групповое запаздывание импульсов* и эффект *дисперсионного расплывания импульсов*.

Первый из них состоит в том, что из-за зависимости групповой скорости от частоты импульс второй гармоники смещается (по времени и продольной координате) относительно импульса основной частоты по мере распространения излучения в нелинейном кристалле (*ооо*-синхронизм, рисунок 5.5а). Возможно как опережение, так и отставание импульса второй гармоники относительно импульса основного излучения. Однако генерация идёт на всём пути волны накачки через нелинейную среду, поэтому

импульс второй гармоники получается уширенным по сравнению с исходным импульсом 1ω . При синхронизме II типа, например, *оee* (рис. 5.5б), этот эффект усугубляется: *о*- и *е*-составляющие волны накачки также имеют различные групповые скорости, они расходятся, и когда они перестают перекрываться, дальнейшая генерация второй гармоники прекращается.

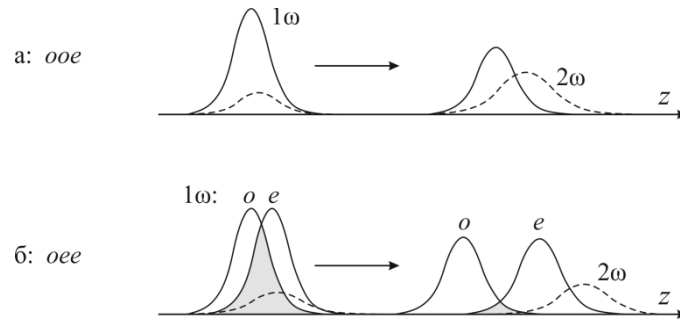


Рисунок 5.5 – Групповое запаздывание импульсов.

Второй эффект – дисперсионное расплывание импульсов – заключается в том, что из-за дисперсии групповых скоростей импульсы волн накачки и второй гармоники уширяются во времени при распространении через нелинейный кристалл, причём в разной степени.

Для того, чтобы формально учесть временные эффекты в уравнениях для связанных амплитуд¹, следует считать комплексную амплитуду A поля зависящей не только от пространственных координат, но и от времени:

$$E(t, z) = \frac{1}{2} \left[A(t, z) e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} + \text{к.с.} \right], \quad (5.30)$$

где ω_0 – центральная частота, $k_0 = n(\omega_0)\omega_0/c$ (для простоты будем писать уравнения в скалярном виде). Поле во временном $E(t, z)$ и частотном $E(t, \omega)$ представлении связаны между собой преобразованием Фурье (2.46). Аналогично, электрическая индукция (а точнее, её линейная часть) представляется в виде

$$D(t, z) = \int \varepsilon(\omega) E(\omega, z) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (5.31)$$

Линейное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E(t, z) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} D(t, z) = 0 \quad (5.32)$$

в частотном представлении приобретёт вид

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E(\omega, z) + \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} E(\omega, z) = 0. \quad (5.33)$$

¹ Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Чиркин А. С. Нестационарные явления и пространственно-временная аналогия в нелинейной оптике, ЖЭТФ, **55**, №4, 1430-1448 (1968).

Из (5.30) и (2.47) следует, что

$$\begin{aligned} E(\omega, z) &= \frac{1}{2} \left[\int A(t, z) e^{-ik_0 z} e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt + \int A^*(t) e^{ik_0 z} e^{-i(\omega + \omega_0)t} dt \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[A(\omega - \omega_0, z) e^{-ik_0 z} + A^*(\omega + \omega_0, z) e^{ik_0 z} \right] \approx \frac{1}{2} A(\omega - \omega_0, z) e^{-ik_0 z}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Последнее равенство подразумевает, что мы используем приближение медленно меняющихся амплитуд: высокочастотные компоненты амплитуды – $A(\omega + \omega_0)$ – ничтожно малы по сравнению с низкочастотными $A(\omega - \omega_0)$. Подставив это выражение в (5.33) и пренебрегая второй производной амплитуды по координате z , получаем уравнение для комплексной амплитуды:

$$-2ik_0 \frac{\partial}{\partial z} A(\omega - \omega_0, z) + (k^2 - k_0^2) A(\omega - \omega_0, z) = 0, \quad (5.35)$$

где $k = n\omega/c$. Если учесть, что $k^2 - k_0^2 \approx 2k_0(k - k_0)$, то волновое уравнение для амплитуды приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial z} A(\omega - \omega_0, z) + i(k - k_0) A(\omega - \omega_0, z) = 0. \quad (5.36)$$

Разложим модуль волнового вектора $k(\omega)$ в ряд Тейлора в окрестности частоты ω_0 :

$$k(\omega) = k_0 + \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right)_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (5.37)$$

Мы ограничимся только первыми двумя порядками разложения. Первая производная k по ω определяет *групповую скорость* u :

$$\frac{1}{u} \equiv \frac{\partial k}{\partial \omega} = \frac{1}{c} \left(n(\omega) + \omega \frac{\partial n}{\partial \omega} \right), \quad (5.38)$$

а вторая производная – *дисперсию групповой скорости* g :

$$g \equiv \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}. \quad (5.39)$$

Обозначив $\Omega = \omega - \omega_0$, перепишем уравнение (5.36):

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i}{u} \Omega A + \frac{ig}{2} \Omega^2 A = 0. \quad (5.40)$$

Используя соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A(t, z) &= \frac{\partial}{\partial t} \int A(\Omega, z) e^{i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi} = i \int \Omega A(\Omega, z) e^{i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi}, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} A(t, z) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int A(\Omega, z) e^{i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi} = - \int \Omega^2 A(\Omega, z) e^{i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi}, \end{aligned} \quad (5.41)$$

и взяв обратное преобразование Фурье от уравнения (5.40), получим линейное нестационарное волновое уравнение в приближении медленно меняющихся амплитуд во временном представлении:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{i}{2} g \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0, \quad (5.42)$$

где $A = A(t, z)$. Второе слагаемое в левой части (5.42) описывает эффект группового запаздывания импульсов, а третье – эффект дисперсионного расплывания.

Для того, чтобы в уравнениях типа (5.42) учесть *нелинейные* эффекты, в них следует добавить члены, связанные с нелинейной поляризацией (такие, как в правой части уравнений (3.9) или (3.36)). При генерации второй гармоники, например, получим *нестационарные уравнения для связанных амплитуд*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{i}{2} g_1 \frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} &= -i\sigma_1 A_1^* A_2 e^{-i\Delta k z}, \\ \frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{u_2} \frac{\partial A_2}{\partial t} - \frac{i}{2} g_2 \frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2} &= -i\sigma_2 A_1^2 e^{i\Delta k z}, \end{aligned} \quad (5.43)$$

где

$$u_i = \left(\frac{\partial k_i}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_i}^{-1} = c \left(n_i(\omega) + \omega \frac{\partial n_i}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_i}^{-1}, \quad g_i = \left(\frac{\partial^2 k_i}{\partial \omega^2} \right)_{\omega=\omega_i}. \quad (5.44)$$

Для оценки влияния эффекта группового запаздывания импульсов вводят параметр $L_{\text{кв}}$ – длину дисперсии групповых скоростей, также называемую *квазистатической длиной взаимодействия*:

$$L_{\text{кв}} = \tau_p \nu^{-1}, \quad (5.45)$$

где τ_p – длительность импульса накачки, а ν – разность обратных групповых скоростей: $\nu = u_1^{-1} - u_2^{-1}$. $L_{\text{кв}}$ равна длине, на которой импульсы основного и преобразованного излучения разойдутся на расстояние, равное длине импульса. Кроме того, можно определить характерное время запаздывания:

$$\tau_\nu = \nu L, \quad (5.46)$$

то есть, время, на которое запаздывают взаимодействующие импульсы при распространении на расстояние, равное длине кристалла L . Если $L < L_{\text{кв}}$, или, что то же самое, $\tau_p > \tau_\nu$, то эффект группового запаздывания можно не учитывать. Например, при $\lambda_1 = 1,06$ мкм и $\tau_1 = 2$ пс, имеем $L_{\text{кв}} = 15$ см для кристалла KDP, и $L_{\text{кв}} = 1$ см для кристалла LiNbO₃. Отсюда следует, что эффектом группового запаздывания можно пренебречь в кристалле KDP, поскольку практически используемые длины кристаллов обычно не превосходят ~5 см. Однако рассматриваемый эффект необходимо учитывать в случае кристалла LiNbO₃. При определённых условиях разница групповых скоростей обращается в ноль ($u_1 = u_2, \nu = 0$) – так называемый *групповой синхронизм*.

Для оценки влияния эффекта дисперсионного расплывания импульсов вводят характерную длину дисперсионного расплывания:

$$L_{\text{дис}} = \frac{\tau_p^2}{g}, \quad (5.47)$$

и, соответственно, время дисперсионного расплывания:

$$\tau_{\text{дис}} = \sqrt{gL}. \quad (5.48)$$

Эффект должен учитываться, если

$$L > L_{\text{дис}}, \quad \text{или} \quad \tau_p < \tau_{\text{дис}}. \quad (5.49)$$

Используя характерное значение $g \approx 10^{-27} \text{ с}^2/\text{см}$, получаем $L_{\text{дис}} \approx 10 \text{ м}$ для $\tau_p = 1 \text{ пс}$, и $L_{\text{дис}} \approx 10 \text{ см}$ для $\tau_p = 0,1 \text{ пс}$. Таким образом, для пикосекундных лазерных импульсов (не говоря уже об импульсах большей длительности) эффектом дисперсионного расплывания можно пренебречь. Он становится заметным лишь при $\tau_p < 10^{-13} \text{ с}$, т. е. в фемтосекундном диапазоне длительностей импульсов.

Если эффекты группового запаздывания и дисперсионного расплывания несущественны, то преобразование импульсного излучения можно рассчитать в квазистатическом приближении. Для этого импульс накачки разбивается на временные слои длительностью Δt , в которых его мощность можно считать приблизительно постоянной (рисунок 5.6), рассчитывается эффективность преобразования частоты для каждого из слоёв, а затем выходные интенсивности излучения 2ω суммируются. В пределе $\Delta t \rightarrow 0$ сумма сводится к интегралу по времени, и суммарный коэффициент преобразования по энергии можно рассчитать по формуле

$$\eta_{\Sigma} = \frac{\int P_2(t) dt}{\int P_1(t) dt} = \frac{\int \eta[P_1(t)] \cdot P_1(t) dt}{\int P_1(t) dt} \quad (5.50)$$

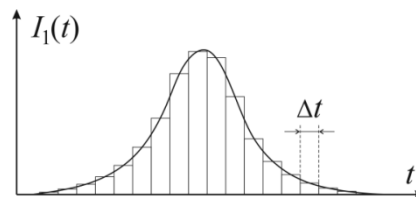


Рисунок 5.6 – Лазерный импульс в квазистатическом приближении.

Пространственно-временная аналогия

Существует аналогия между, пространственными эффектами нелинейного взаимодействия (для пучков, ограниченных в пространстве) с одной стороны, и временными эффектами (для импульсов, ограниченных во времени) с другой. Так, временным аналогом диафрагменного апертурного эффекта (которому соответствуют в уравнениях члены с первой производной по поперечным координатам $\beta \cdot \partial A / \partial x$) является эффект группового запаздывания импульсов, который описывается членами с первой производной по времени: $u^{-1} \cdot \partial A / \partial t$. При этом эффективная апертурная длина L_{β} соответствует квазистатической длине взаимодействия $L_{\text{кв}}$.

Пространственный эффект дифракционного расплывания аналогичен временному эффекту дисперсионного расплывания импульсов. В первом случае в уравнениях для связанных амплитуд вводятся вторые производные по поперечным координатам $\Delta_{\perp} A$, а во втором – вторая производная по времени $\partial^2 A / \partial t^2$. Дифракционная длина $L_{\text{диф}}$ соответствует длине дисперсионного расплывания импульсов $L_{\text{дис}}$.

Аналогия проявляется не только в формальном виде уравнений, но и в физическом смысле этих явлений. Если оба пространственных, или оба временных эффекта несущественны, то процесс нелинейного преобразования частоты рассчитывается в геометрическом или квазистатическом приближении соответственно, между которыми также существует полная аналогия.

Расчёт нелинейно-оптических преобразователей частоты

Приведём систему уравнений для связанных амплитуд в наиболее общем виде, с учётом всех вышеупомянутых эффектов (для трёхчастотного взаимодействия):

$$\begin{aligned}\hat{M}_1 A_1 &= -i\sigma_1 A_2^* A_3 e^{-i\Delta k z}, \\ \hat{M}_2 A_2 &= -i\sigma_2 A_1^* A_3 e^{-i\Delta k z}, \\ \hat{M}_3 A_3 &= -i\sigma_3 A_1 A_2 e^{i\Delta k z},\end{aligned}\tag{5.51}$$

где \hat{M}_i – дифференциальные операторы вида

$$\hat{M}_i = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\delta_i}{2} + \beta_i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{2k_i} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{u_i} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{ig_i}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.\tag{5.52}$$

Расчёт ведётся в декартовых координатах x, y, z , причём ось z выбирается в направлении распространения, а оси x и y так, чтобы снос необыкновенной волны происходил в плоскости xz .

В выражении (5.52):

коэффициенты нелинейной связи	$\sigma_i = \frac{4\pi\omega_i d_i}{n_i c}$
коэффициент линейного поглощения	$\delta_i = -\frac{(\mathbf{e}_i \cdot \text{Im } \boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \mathbf{e}_i) \omega_i}{n_i c}$
угол анизотропии (сноса) необыкновенной волны	$\beta_i = \text{arctg} \left[\frac{n_{oi} - n_{ei}}{n_{oi}} \sin 2\theta \right]$
групповая скорость	$u_i = \left(\frac{\partial k_i}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_i}^{-1}$
дисперсия групповой скорости	$g_i = \left. \frac{\partial^2 k_i}{\partial \omega^2} \right _{\omega=\omega_i}$

Волновая расстройка Δk складывается из «линейной» части: $\Delta k_{\text{лин}} = |\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|_z$, и расстройки, обусловленной тепловыми самовоздействиями, фоторефрактивным эффектом, и т. д.

Система уравнений (5.51) поддаётся только численному решению, но в подавляющем большинстве случаев нет необходимости решать её в полном виде. Если перед нами стоит задача создать нелинейный преобразователь частоты излучения для определённой лазерной системы, которая характеризуется мощностью, размером пучка, длительностью импульса, шириной спектра и расходимостью, то сначала следует вычислить характеристические параметры данного нелинейного взаимодействия, которые сведены в таблице 5.1. Затем надо сравнить их между собой, и с соответствующими параметрами лазерного излучения, чтобы решить, какие эффекты следует учитывать при расчётах, а какие нет.

Таблица 5.1 – Характеристические параметры нелинейного преобразования частоты [3].

Эффективная длина нелинейного взаимодействия	$L_{NL} = (\sigma a_0)^{-1}$
Апертурная длина	$L_\beta = d_0 / \beta$
Дифракционная длина	$L_{\text{диф}} = k w_0^2$
Квазистатическая длина взаимодействия	$L_{\text{кв}} = \tau_p / \nu$
Длина дисперсионного расплывания	$L_{\text{дис}} = \tau_p^2 / g$
Угловая ширина синхронизма	$\Delta\theta = 2 \left(L \frac{\partial \Delta k}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_c}^{-1}$
Температурная ширина синхронизма	$\Delta T = 2 \left(L \frac{\partial \Delta k}{\partial T} \right)^{-1}$
Спектральная ширина синхронизма	$\Delta\lambda = 2 \left(L \frac{\partial \Delta k}{\partial \lambda} \right)^{-1}$

Обозначения в таблице: a_0 – начальная амплитуда поля накачки; d_0 – размер пучка; τ_p – длительность импульса; $\nu = u_1^{-1} - u_2^{-1}$ – расстройка групповых скоростей.

На практике в реально используемых кристаллах при $L \sim 1$ см можно заведомо пренебречь дифракцией и анизотропией для пучков сантиметрового (и более) диаметра; запаздыванием групповых скоростей при $\tau_p \geq 1$ нс; дисперсионным расплыванием импульса при $\tau_p \geq 1$ пс. Дифракцию принципиально надо учитывать при преобразовании в сфокусированных пучках. Если длина кристалла меньше всех эффективных длин (кроме L_{NL}), то оператор \hat{M} можно свести к упрощённому виду

$$\hat{M}_i = \frac{\partial}{\partial z} + \delta_i. \quad (5.53)$$

Если при этом преобразуемые излучения являются модулированными по времени или по поперечным координатам, то достаточной точностью обладает квазистационарный и квазигеометрический методы расчёта соответственно.

В качестве численного примера покажем, как рассчитывался удвоитель частоты на лазерной установке «Луч», работающей в ИЛФИ. Выходное излучение одного канала ($\lambda_1 = 1,054$ нм) имеет энергию $E = (2,5 - 3,5)$ кДж, длительность импульса по полувисоте $\tau_p = (3 - 4,5)$ нс, размер пучка $\sim 20 \times 20$ см, то есть, среднюю интенсивность $I_{1\omega} = E / (S \cdot \tau_p) = (1,5 - 3)$ ГВт/см², расходимость излучения по уровню 80% энергии

$\theta_{0,8E} \approx 200$ мкрад. Для генерации гармоник в мощных лазерных установках на неодимовом стекле практически всегда используются нелинейные кристаллы типа KDP, поскольку они могут быть выращены до больших размеров, а также обладают высоким оптическим качеством и высокой лучевой прочностью. Показатели преломления KDP первой и второй гармоники равны $n_{o1} = 1,494$, $n_{e1} = 1,460$, $n_{o2} = 1,513$, $n_{e2} = 1,471$. Угол синхронизма первого типа (*ooe*) следовательно, равен $\theta_c = 41,18^\circ$, оптимальный азимутальный угол поляризации $\varphi = 45^\circ$, а эффективная восприимчивость (см. табл. 2.4) $d = d_{36} \sin \theta_c = 0,286$ пм/В. Для того, чтобы выбрать оптимальную длину кристалла, проводился расчёт эффективности преобразования при различной длине L и интенсивности основного излучения. Примеры таких графиков показаны на рисунке 5.7. В расчётах учитывались расходимость излучения, линейное поглощение и неточность постановки кристалла в угол синхронизма $\Delta\theta_c = 10^{-4}$ рад, Уравнения для амплитуд волн решались численными методами, при $\Delta k = \gamma_1 \cdot \delta\theta$.

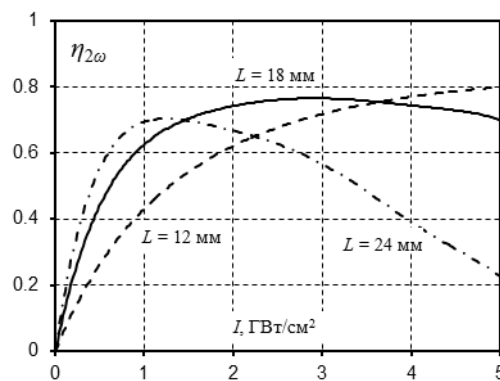


Рисунок 5.7 – Эффективность ГВГ в зависимости от интенсивности при различной длине кристалла KDP.

Из графиков видно, что оптимальная длина кристалла, при которой коэффициент преобразования приблизительно одинаков в рабочем диапазоне интенсивностей, равна 1,8 см. Затем следует провести расчёт зависимости эффективности от погрешности $\Delta\theta_c$ постановки кристалла в угол синхронизма, от смещения длины волны $\Delta\lambda_1$, расходимости $\theta_{0,8E}$, и прочих параметров, чтобы определить требования на угловую точность выставления кристалла, стабильность частоты основного излучения и т. д.

6. Параметрическая генерация света

В ряде приложений требуются источники когерентного излучения, непрерывно перестраиваемые по частоте в широких пределах. Один из распространённых способов построения перестраиваемого лазера – использование в качестве активной среды материалов, имеющих очень широкую полосу люминесценции, например Ti:сапфир, или растворы органических красителей. Их спектр усиления имеет ширину несколько десятков нм, а селекция излучения по спектру и его перестроение проводится с помощью внутрирезонаторных дисперсионных элементов (например, дифракционной решётки).

Другой способ получения перестраиваемого по частоте излучения – параметрическая генерация. В этом случае лазерное излучение с частотой ω_3 вводится в нелинейный кристалл, в котором происходит возникновение и усиление двух волн на частотах ω_1 и ω_2 , таким образом, что $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$. Это процесс, обратный генерации суммарной частоты. Соотношение, в котором частота исходной волны (накачки) разделяется на две низшие частоты, определяется условием фазового синхронизма: $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$. Изменяя условие синхронизма (например, поворачивая нелинейный кристалл) можно изменять частоты выходного излучения. Фазовый синхронизм при трёхчастотном взаимодействии был рассмотрен в главе 4. Если частоты ω_1 и ω_2 равны между собой: $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3/2$, то данный процесс называется генерацией *субгармоники*, и он является обратным по отношению к генерации второй гармоники.

Параметрическое усиление

Пусть на входе в нелинейный кристалл имеется мощное излучение с некоторой высокой частотой ω_3 (волна *накачки*) и слабое излучение с частотой ω_1 (*сигнальная* волна). В квадратично-нелинейной среде возникают колебания поляризации на частоте $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$, и происходит излучение света на этой частоте (*холостая* волна). Если при этом выполняется условие фазового синхронизма $\Delta k = |\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| = 0$, то обе волны, сигнальная и холостая, будут усиливаться за счёт накачки.

Процесс параметрического усиления описывается той же системой уравнений для трёх связанных амплитуд (5.51) или (3.9), но теперь граничные условия – иные, чем в случае генерации суммарной частоты. Рассмотрим данное нелинейное взаимодействие в приближении заданной амплитуды накачки ($A_3(z) \approx const$). Тогда останется система из двух уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dz} &= -i\sigma_1 A_2^* A_3 e^{-i\Delta k z}, \\ \frac{dA_2}{dz} &= -i\sigma_2 A_1^* A_3 e^{-i\Delta k z}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где $\sigma_i = 4\pi\omega_i d/n_i c$ – коэффициенты нелинейной связи, d – эффективная нелинейная восприимчивость. Общее решение системы (6.1) имеет вид

$$\begin{aligned}
A_1(z) &= \left[A_{10} \operatorname{ch} gz + \frac{i}{g} \left(\frac{\Delta k}{2} A_{10} - \sigma_1 A_3 A_{20}^* \right) \operatorname{sh} gz \right] e^{-i\Delta kz/2}, \\
A_2(z) &= \left[A_{20} \operatorname{ch} gz + \frac{i}{g} \left(\frac{\Delta k}{2} A_{20} - \sigma_2 A_3 A_{10}^* \right) \operatorname{sh} gz \right] e^{-i\Delta kz/2},
\end{aligned} \tag{6.2}$$

где $A_{10} = A_1(0)$, $A_{20} = A_2(0)$ – граничные условия, а g – коэффициент усиления:

$$g = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2 |A_3|^2 - \Delta k^2 / 4}. \tag{6.3}$$

Если выполнено условие фазового синхронизма $\Delta k = 0$, и холостая волна отсутствует на входе в нелинейный кристалл ($A_{20} = 0$), то выражения (6.2) принимают вид

$$\begin{aligned}
A_1(z) &= A_{10} \operatorname{ch} gz \rightarrow \frac{1}{2} A_{10} e^{gz}, \\
A_2(z) &= -i \sqrt{\frac{n_1 \omega_2}{n_2 \omega_1}} \frac{A_3}{|A_3|} A_{10}^* \operatorname{sh} gz \rightarrow O(1) A_{10}^* e^{gz},
\end{aligned} \tag{6.4}$$

где $O(1)$ – множитель порядка единицы. Таким образом, обе волны, и сигнальная, и холостая, экспоненциально усиливаются $\sim e^{gz}$ – рисунок 6.1.

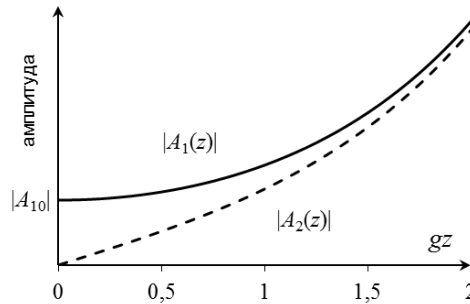


Рисунок 6.1 – Зависимость амплитуд сигнальной и холостой волн от толщины нелинейного кристалла в приближении заданного поля накачки.

Одно из применений параметрических усилителей – усиление чирпированного импульса фемтосекундных лазеров. Такие импульсы имеют большую ширину спектра. При определённых условиях на центральные длины волн взаимодействующих пучков и направления их распространения, параметрическое усиление сигнала в нелинейном кристалле может очень слабо зависеть от частоты излучения (т. н. условие сверхширокополосного синхронизма). Параметрические усилители также часто используют в тех случаях, когда необходимо обеспечить высокий контраст рабочего импульса, поскольку они обладают очень малым собственным уровнем шума.

Параметрический генератор

Предположим, что интенсивная когерентная световая волна (волна накачки) распространяется через нелинейный кристалл. В кристалле всегда имеются флуктуации поля в виде чрезвычайно слабых, хаотических сигналов. Благодаря параметрическому взаимодействию этих сигналов с волной накачки распространение волны накачки по кристаллу будет сопровождаться переизлучением световых волн на частотах, меньших частоты накачки. Это явление называют *параметрической люминесценцией* (параметрическим рассеянием света). В отличие от обычной люминесценции здесь имеет

место связь между переизлучаемыми частотами и углами, образуемыми направлениями наблюдения с направлением распространения волны накачки. Зависимость частоты параметрической люминесценции от угла излучения определяется условиями фазового синхронизма. Кроме того, при параметрической люминесценции переизлучаемые частоты никак не связаны с частотами переходов между энергетическими уровнями в среде.

Если теперь поместить нелинейный кристалл в резонатор, зеркала которого отражают излучение сигнальной или холостой волны (или обеих), то изначально слабое излучение люминесценции будут совершать многократный проход через кристалл, усиливаясь в нём. Такое устройство называется *параметрическим генератором света* (ПГС). Поскольку в ПГС обе волны усиливаются в одинаковой степени, то названия «сигнальная» и «холостая» – условны: сигнальным называется то излучение, которое дальше используется в народном хозяйстве.

Резонатор параметрического генератора может иметь высокую добротность только по одной из частот ω_1 или ω_2 , (*однорезонаторный* ПГС, рис. 6.2 а,в) или по обеим частотам (*двухрезонаторный* ПГС, рис. 6.2 б,г). Может использоваться как скалярный (рис. 6.2 а,б), так и векторный (рис. 6.2 в,г) синхронизм. Схемы генераторов с векторным синхронизмом довольно сложны, и редко используются на практике.

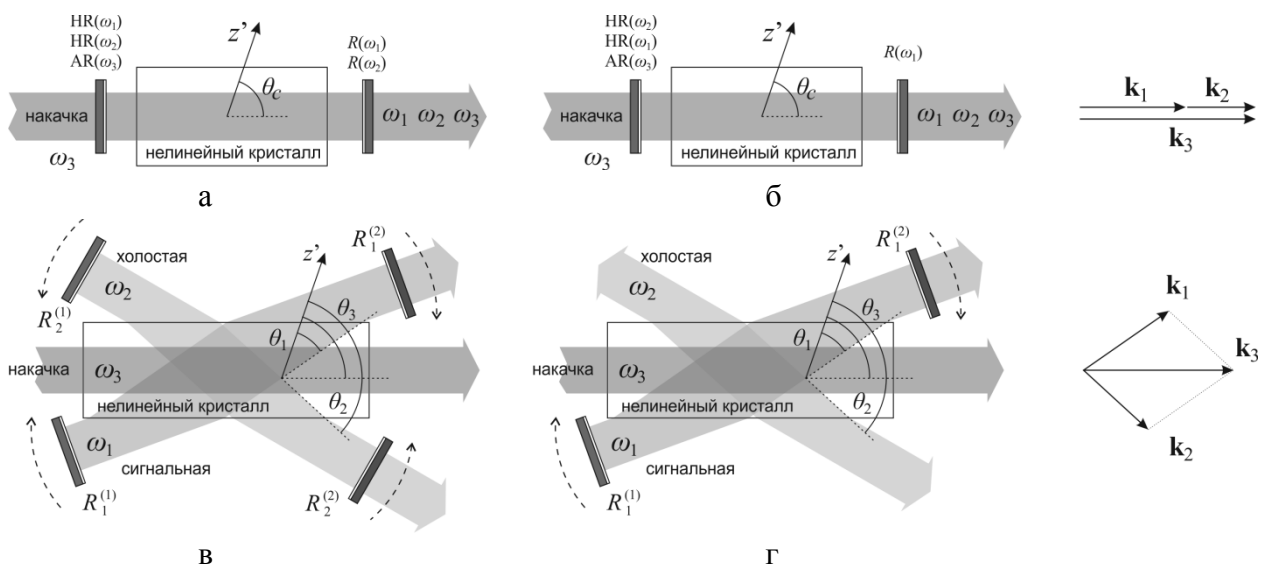


Рисунок 6.2 – Схемы ПГС: с коллинеарным (а, б), и векторным (в, г) синхронизмом; двух- (а, в) и однорезонаторные (б, г).

Оценить порог генерации ПГС (то есть, интенсивность накачки, при которой возникает генерация) можно так же, как и для обычного лазера. Для этого надо поставить условие, что усиление сигнальной (или холостой) волны за двойной обход резонатора равно уменьшению энергии на вывод из резонатора через зеркала.

Пусть $\Delta k = 0$, генератор двухрезонаторный, и коэффициенты отражения зеркал для сигнальной и холостой волны одинаковы, и равны R ($1 - R \ll 1$), а поглощение в кристалле отсутствует. Тогда $e^{2gL} - 1 = 2(1 - R)$, где L – длина кристалла, и если $2gL \ll 1$ (усиление за один проход мало), то уравнение на порог генерации

$$gL = 1 - R. \quad (6.5)$$

Выведем теперь пороговое условие в более общем виде, исходя из условия, что поля в резонаторе должны воспроизводиться после каждого обхода. При выполнении условия синхронизма, из уравнений (6.2) следует, что

$$\begin{aligned} A_1(0) &= \left[A_1(0) \operatorname{ch} gL - \frac{i}{g} \sigma_1 A_3 A_2^*(0) \operatorname{sh} gL \right] (1 - l_1), \\ A_2(0) &= \left[A_2(0) \operatorname{ch} gL - \frac{i}{g} \sigma_2 A_3 A_1^*(0) \operatorname{sh} gL \right] (1 - l_2), \end{aligned} \quad (6.6)$$

где $l_i = 1 - R_i \exp(-\alpha_i L)$ – коэффициент уменьшения амплитуды i -й волны за один обход резонатора, α_i – линейный коэффициент поглощения в кристалле на частоте ω_i ($i = 1, 2$). Решение этих уравнений относительно g даёт выражение для порога

$$\operatorname{ch} gL = 1 + \frac{l_1 l_2}{2 - l_1 - l_2}. \quad (6.7)$$

При $gL \ll 1$ имеем $\operatorname{ch} gL \approx 1 + g^2 L^2 / 2$, то есть, для двухрезонаторного ПГС (при $l_{1,2} \ll 1$) $g^2 L^2 = l_1 l_2$, как и в формуле (6.5).

Однорезонаторный ПГС – частный случай двухрезонаторного, и пороговое условие для него можно вывести, положив в формуле (6.7) $l_2 = 1$ (если отсутствует обратная связь по холостой волне). Тогда при $gL \ll 1$ получится $g^2 L^2 = 2l_1$. Отсюда видно, что порог генерации двухрезонаторного параметрического генератора существенно меньше, чем однорезонаторного.

Пример: оценим по порядку величины порог генерации при типичных значениях параметров нелинейной среды. Перепишем выражение для коэффициента усиления (6.3) через интенсивность накачки $I_3 = n_3 c |A_3| / 8\pi$:

$$g^2 = \sigma_1 \sigma_2 |A_3|^2 = \frac{(8\pi^2 d)^2}{n_1 n_2 \lambda_1 \lambda_2} \cdot \frac{8\pi}{n_3 c} I_3 \approx \frac{2^9 \pi^5 d^2}{n^3 \lambda^2 c} I_3. \quad (6.8)$$

Пусть $\lambda_{1,2} \approx 1$ мкм, $n = 2$, $d = 10^{-8}$ ед. СГСЭ, $L = 1$ см, $R = 0,9$. Для двухрезонаторного ПГС $g^2 L^2 = (1 - R)^2$ (пренебрегая поглощением в кристалле), и пороговая интенсивность накачки равна $I_3 = 0,15$ МВт/см². Для однорезонаторного ПГС $g^2 L^2 = 2(1 - R)$, и порог будет в $2/(1 - R) = 20$ раз больше. Таким образом, генерацию в двухрезонаторном ПГС осуществить гораздо проще, однако на практике обычно применяют однорезонаторные устройства, потому что в них частота излучения более стабильна (см. далее – влияние модовой структуры резонатора).

Пороговую интенсивность накачки также можно снизить в несколько раз, если в оптическую схему добавить возвратное зеркало, отражающее (частично или полностью) волну накачки обратно в резонатор ПГС – тогда сигнальная и холостая волны будут усиливаться не только на прямом, но и на обратном проходе через кристалл. При этом необходимо специально подбирать фазу отраженной волны накачки; в противном случае на обратном проходе вместо параметрического усиления может происходить обратная перекачка энергии в волну накачки.

Следует отметить, что параметрические генераторы электрических колебаний были весьма распространены в радиоэлектронике задолго до появления нелинейной оптики, и

поначалу теория нелинейного преобразования частоты света развивалась по аналогии с хорошо известной теорией нелинейных колебаний. Впервые ПГС был предложен С. А. Ахмановым и Р. В. Хохловым (по схеме с векторным синхронизмом, как на рис. 6.2 в) в 1962 г. Первый действующий ПГС был построен в 1965 г. Джордмэйном и Миллером. Он работал на кристалле ниобата лития в импульсном режиме. Первый параметрический генератор непрерывного излучения, с использованием ниобата бария-натрия ($\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$) продемонстрирован в 1968 г. Интерес к разработке ПГС возродился в 1980-х, когда появились новые эффективные нелинейные кристаллы, такие как $\beta\text{-BaV}_2\text{O}_4$ (бета-борат бария, ВВО), LiV_3O_5 (триборат лития, ЛВО), и KTiOPo_4 (титанил-фосфат калия, КТР), которые обладают большой нелинейностью, высокой лучевой стойкостью и большим двулучепреломлением. Доступность этих материалов способствовала быстрому росту характеристик оптических параметрических генераторов. Существующие серийные ПГС, позволяют получать непрерывное или импульсное (в нано-, пико- и фемтосекундных диапазонах длительности импульса) излучение, перестраиваемое по длине волны в ультрафиолетовой, видимой и инфракрасной области, с большим КПД преобразования частоты. В современных ПГС широко применяются кристаллы с регулярной доменной структурой. В отличие от обычных лазеров, параметрические генераторы требуют накачки в виде когерентного излучения. Наиболее распространена накачка ПГС гармониками твердотельных лазеров, в частности, 2, 3 или 4 гармоникой неодимового лазера.

Перестроение частоты ПГС

Как уже было указано, частоты сигнальной ω_1 и холостой ω_2 волн определяются условием фазового синхронизма и условием $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Спектральный диапазон, в котором можно перестраивать излучение ПГС, определяется диапазоном синхронизма и/или диапазоном прозрачности нелинейного материала. Расстройка волновых векторов Δk является функцией частот и показателей преломления взаимодействующих волн. Показатели преломления, в свою очередь, зависят от направления распространения (необыкновенные волны), температуры, внешнего поля, и частоты излучения накачки. Таким образом, есть четыре способа перестройки параметрических генераторов, основанные на изменении:

- угла между оптической осью кристалла и направлением излучения накачки (*угловая перестройка*);
- температуры нелинейного кристалла (*температурная перестройка*);
- внешнего постоянного электрического поля, приложенного к нелинейному кристаллу (*электрооптическая перестройка*);
- длины волны излучения накачки.

Из этих способов наиболее распространены первые два (угловая и температурная перестройка). В первом случае зависимость частоты сигнальной волны от угла θ определяется уравнением $\Delta k(n(\omega_i, \theta)) = 0$. На рисунке 6.3 а показан пример перестроечной характеристики – зависимости отношения ω_1/ω_3 от угла синхронизма – в кристалле ниобата лития при коллинеарном синхронизме I и II типа, при длине волны накачки 0,532 мкм (вторая гармоника неодимового лазера) и температуре 298 К.

При температурной перестройке зависимость $\omega_1(T)$ рассчитывается из уравнения $\Delta k(n(\omega_i, T)) = 0$. На рисунке 6.3 б показана температурная перестроечная кривая для ниобата лития при 90° -ном *ооо*-синхронизме (длина волны накачки $\lambda_3 = 0,532$ мкм). При температуре 43°C длины волн сигнальной и холостой волн совпадают: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2\lambda_3$. Это и есть вырожденный случай – генерация субгармоники. Обратный процесс – генерация второй гармоники при тех же условиях, рассмотрен в главе 4 (рис. 4.10).

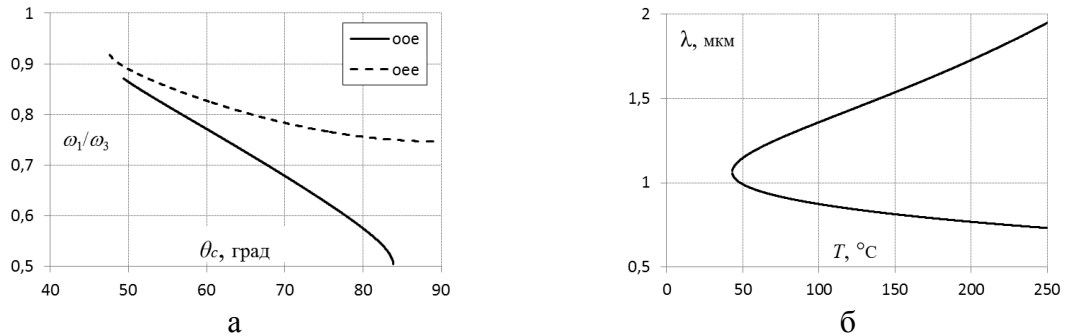


Рисунок 6.3 – Угловая (а) и температурная (б) перестройка ПГС с кристаллом LiNbO_3 .

Влияние модовой структуры резонатора

В резонаторе оптической длиной L_c продольные моды имеют собственные частоты ν_c , с интервалом $\Delta\nu_c = c/2L_c$. Спектральная ширина $\delta\nu_c = \Delta\nu_c/F$ каждой моды определяется параметром $F = \pi(R_1R_2)^{1/4}/[1 - (R_1R_2)^{1/2}]$. При длине резонатора, например, 15 см, межмодовый интервал равен $\Delta\nu_c = 1$ ГГц, а при типичном значении $F = 100$, ширина линий равна $\delta\nu_c = 10$ МГц (рис. 6.4). Ширина линии усиления параметрического генератора определяется спектральной шириной синхронизма ($\Delta kL \approx \pi$), причём, если характерное значение производной $\partial n/\partial \nu$ равно $\sim 10^{-15}$ с, то ширина синхронизма (пунктирной кривой на рис. 6.4) будет порядка 100 ГГц. То есть, в пределах спектрального диапазона параметрического усиления находится, как правило, множество собственных частот резонатора.

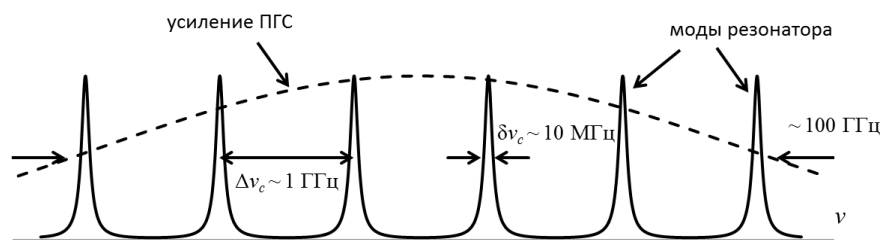


Рисунок 6.4 – Зависимость усиления в нелинейном кристалле от частоты и спектр мод резонатора.

В однорезонаторном ПГС генерация происходит на моде, частота которой меньше всего отличается от частоты ν_0 , при которой точно выполняется условие синхронизма $\Delta k = 0$ (рис. 6.5а). В ходе генерации накачка истощается, усиление уменьшается до величины потерь в резонаторе, так что усиление на других частотах становится меньше порогового. Таким образом, поведение однорезонаторного ПГС очень похоже на процессы в обычном лазере с однородным уширением люминесценции активной среды, в котором также обычно реализуется генерация на одной продольной моде.

В двухрезонаторном ПГС обе волны – сигнальная и холостая – имеют дискретные частоты. На рисунке 6.5б схематично показаны спектры мод такого генератора: оси ν_1 и ν_2 направлены в разные стороны, чтобы в каждой точке выполнялось равенство $\nu_1 + \nu_2 = \nu_3 = \text{const}$. В общем случае межмодовые интервалы для сигнального и холостого резонаторов не одинаковы, поэтому генерация происходит на частотах тех мод, для которых выполняется равенство $\nu_1 + \nu_2 = \nu_3$, а это не обязательно ближайшая к максимуму линии усиления частота. Поэтому частота излучения двухрезонаторного ПГС нестабильна: при перестроении, или в результате колебаний зеркал, температуры, и т. п., частоты сигнальной и холостой волн испытывают скачки.

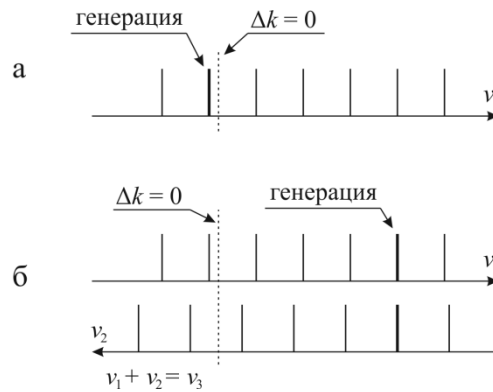


Рисунок 6.5 – Собственные частоты одно- (а) и двухрезонаторного (б) параметрического генератора.

Оценим спектральный диапазон $\Delta\nu_{\text{ПГС}}$, в котором могут происходить скачки частоты излучения двухрезонаторного ПГС. Пусть пространство длиной L_c между зеркалами резонатора заполнено нелинейной средой. Можно показать, что межмодовый интервал в таком резонаторе равен

$$\Delta\nu_c = \frac{1}{n_g} \frac{c}{2L_c}, \quad (6.9)$$

где n_g – групповой показатель преломления:

$$n_g = n + \nu \frac{dn}{d\nu}. \quad (6.10)$$

Эта величина зависит от частоты, поэтому интервалы мод сигнальной $\Delta\nu_{c1}$ и холостой $\Delta\nu_{c2}$ волн различны. Пусть эффективная ширина моды равна $\delta\nu$. Это может быть собственная ширина, определяемая добротностью резонатора (как на рис. 6.4), или обусловленная колебаниями частоты накачки, или нестабильностью резонатора. Тогда в результате каких-либо случайных процессов может произойти скачок частот генерации на N межмодовых интервалов $\Delta\nu_c$, так, чтобы разность частот сигнальной и холостой мод оставалась в пределах $\delta\nu$:

$$N|\Delta\nu_{c1} - \Delta\nu_{c2}| = \delta\nu. \quad (6.11)$$

Тогда получим оценку ширины спектра генерации $\Delta\nu_{\text{ПГС}} = N\Delta\nu_c$ как

$$\Delta\nu_{\text{ПГС}} = \frac{\Delta\nu_c \delta\nu}{|\Delta\nu_{c1} - \Delta\nu_{c2}|} = \frac{n_g}{|n_{g1} - n_{g2}|} \delta\nu. \quad (6.12)$$

При малой разнице групповых показателей преломления сигнальной и холостой волн $|n_{g1} - n_{g2}|$ эта величина может быть очень большой. В вырожденном случае (при генерации субгармоники) выражение (6.12) формально обращается в бесконечность, при синхронизме типа I (но не типа II).

Параметрический генератор бегущей волны

Распространёнными устройствами являются ПГС с пикосекундной длительностью импульса. В них используется импульсная накачка от лазера с синхронизацией мод. Процессы накачки и излучения в ПГС протекают практически безынерционно вследствие кубической электронной нелинейности, поэтому длительность импульсов излучения ПГС близка к длительности импульсов накачки.

Существенным преимуществом накачки ПГС пикосекундными лазерными импульсами является то, что лучевая прочность (пороговая интенсивность разрушения) кристаллов сильно зависит от длительности импульса лазерного излучения, возрастает при ее уменьшении. Так, лучевая прочность большинства используемых в нелинейной оптике кристаллов при облучении пикосекундными импульсами примерно на два порядка выше их лучевой прочности при облучении наносекундными импульсами. Это позволяет значительно поднять интенсивность накачки, при которой усиления за один проход достаточно для того, чтобы амплитуда генерируемого излучения была по величине сравнима с амплитудой поля накачки.

В ПГС с синхронной накачкой нелинейный кристалл помещается в резонатор, обеспечивающий положительную обратную связь, а накачка производится цугом пикосекундных импульсов, которые следуют с периодом, равным времени двойного прохода импульса по резонатору. Преимуществами ПГС с синхронной накачкой являются низкий порог возбуждения (интенсивность накачки ~ 100 МВт/см²) и высокая пространственная и временная когерентность импульсов. Недостатком таких устройств является необходимость использования широкодиапазонных зеркал резонатора и специальных элементов для компенсации дисперсии групповой скорости внутри резонатора.

Второй вариант пикосекундного параметрического генератора – ПГС бегущей волны – не имеет резонатора: он представляет собой, фактически, усилитель спонтанного излучения (параметрической люминесценции). На нелинейный кристалл, вырезанный таким образом, чтобы выполнялось условие синхронизма, подается пикосекундный импульс накачки. Для повышения его интенсивности перед кристаллом устанавливается фокусирующая линза или сжимающий телескоп. Если интенсивность накачки и длина нелинейного кристалла достаточно велики, то на выходе кристалла возникает импульс излучения, длина волны которого может перестраиваться в широких пределах согласно частотному и фазовому условиям трёхчастотного параметрического взаимодействия. Чаще всего перестройка осуществляется поворотом кристалла или изменением его температуры. За кристаллом помещается оптический фильтр, отсекающий неиспользованную часть излучения накачки. Так как длина реальных кристаллов не превышает 4-5 см, требуется накачка большой интенсивности, что может привести к разрушению кристалла. С другой стороны, наряду с коллинеарным параметрическим

взаимодействием в канале накачки, возникает неколлинеарное взаимодействие, которое существенно расширяет спектр и пространственную расходимость излучения ПГС.

Для того, чтобы увеличить мощность сигнального импульса, и уменьшить расходимость, можно использовать двухкристальную схему (рис. 6.6), в которой первый кристалл играет роль источника затравочного суперлюминесцентного сигнала, а второй используется в качестве усилителя. За счет разнесения кристаллов на определенное расстояние в канал усиления попадает лишь коллинеарная часть суперлюминесценции и таким образом происходят монохроматизация спектра и уменьшение пространственной расходимости. Накачка второго кристалла производится либо независимо, либо частью излучения накачки, которая не использовалась в первом кристалле.

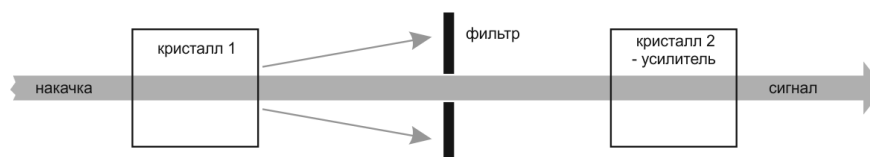


Рисунок 6.6 – Вариант параметрического генератора бегущей волны.

Параметрические генераторы бегущей волны технически просты, но для обеспечения их надежной работы требуются весьма мощные импульсы накачки (как правило, превышающие по интенсивности 1 ГВт/см^2) с близкой к предельной пространственной и временной когерентностью.

Нелинейно-оптические кристаллы

В заключение первой части книги, посвящённой нелинейно-оптическому преобразованию частоты лазерного излучения, обозначим требования, которые предъявляются к кристаллам, используемым в нелинейной оптике. В настоящее время известно большое количество нелинейных кристаллов, обладающие заметной нелинейной восприимчивостью второго порядка. Однако требования, предъявляемые к кристаллам с точки зрения получения необходимых характеристик нелинейных оптических устройств (генераторов гармоник и параметрических генераторов света), существенно сокращают число пригодных для практического использования материалов.

Основному требованию – наличию квадратичной нелинейности (отсутствие центра симметрии) – удовлетворяет достаточно большое число (~ 100) кристаллов, однако лишь относительно небольшое число из них имеет достаточное двулучепреломление для обеспечения условий фазового синхронизма. Отметим также требование высокого оптического качества кристаллов, предопределяемое интерференционной природой квадратично-нелинейных эффектов.

Дополнительные требования, традиционно предъявляемые к кристаллам с первых же шагов нелинейной оптики: стойкость поверхности и объема образца к лазерному излучению, устойчивость и сохраняемость свойств материала во внешней среде (негигроскопичность, твердость, устойчивость к резким изменениям температуры и т. п.). В процессе развития нелинейной оптики выявился еще целый ряд условий, важных с точки зрения достижения высоких коэффициентов преобразования. К ним относятся требования больших значений угловой, температурной и спектральной ширин

синхронизма, малых потерь, отсутствие фоторефрактивного эффекта и нелинейного поглощения, слабого влияния конкурирующих процессов (например, вынужденного комбинационного рассеяния), специальной ориентации и специальной геометрической формы кристаллического образца, неподверженности к появлению центров окраски под действием УФ и более коротковолнового излучений и т. д.

Поскольку современная техника не позволяет синтезировать нелинейные материалы с полным набором требуемых свойств, то необходимо оптимально выбирать нелинейные кристаллы применительно к конкретному нелинейному оптическому устройству с учетом его режимов и характеристик излучения накачки. Например, для генерации гармоник излучения мощных лазерных установок на неодимовом стекле, предназначенных для исследований в области лазерного термоядерного синтеза, используются кристаллы дигидрофосфата калия (KDP), а также дейтерированного KDP (обозначается как DKDP или KD^*P). Несмотря на относительно небольшую нелинейность и гигроскопичность, это практически единственный кристалл, который можно вырастить достаточно больших размеров, хорошего оптического качества и с высокой лучевой прочностью, поскольку он выращивается из раствора, а не из расплава, как многие другие. Кроме того, KDP имеет небольшое линейное и двухфотонное поглощение на длинах волн неодимового лазера и его гармоник; высокий порог ВКР; отсутствие оптически наведенного изменения показателя преломления; малую величину производной дисперсионного двулучепреломления по температуре, что позволяет использовать кристаллы без дополнительного термостатирования.

7. Нелинейный показатель преломления

Если поляризация второго порядка $P^{(2)} = \chi^{(2)}E^2$, которую мы рассматривали в предыдущих главах, проявляется только в кристаллах без центра симметрии, то поляризация третьего порядка в той или иной мере характерна для всех оптических материалов – как анизотропных, так и изотропных. Распространение волны в кубически-нелинейной среде можно представить как *самовоздействие* света, когда показатель преломления среды зависит от интенсивности волны. В результате может возникнуть множество необычных нелинейных эффектов (таких как самофокусировка, фазовая само- и кросс-модуляция, образование оптических солитонов, вынужденное рассеяние, обращение волнового фронта, деполяризация излучения, оптическая бистабильность), часть из которых рассмотрена в данном разделе.

Механизмы возникновения нелинейности третьего порядка

Поляризация третьего порядка выражается через нелинейные восприимчивости и поля следующим образом:

$$P_i^{(3)}(\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3) = \sum_{jkl} \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_4; \omega_1, \omega_2, \omega_3) E_j(\omega_1) E_k(\omega_2) E_l(\omega_3). \quad (7.1)$$

Частный случай – самовоздействие света с частотой ω описывается поляризацией

$$P_i^{(3)}(\omega) = \frac{3}{4} \sum_{jkl} \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega; \omega, \omega, -\omega) E_j(\omega) E_k(\omega) E_l(-\omega), \quad (7.2)$$

или, в более компактной записи,

$$P_i^{(3)} = \frac{3}{4} \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l^*, \quad (7.3)$$

где подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Если отвлечься от тензорной природы диэлектрической восприимчивости, то суммарную поляризацию (линейную и нелинейную) в этом случае можно представить в виде

$$P = P^{(1)} + P^{(3)} = \left(\chi^{(1)} + \frac{3}{4} \chi^{(3)} |E|^2 \right) E. \quad (7.4)$$

Диэлектрическая проницаемость ε и показатель преломления n определяется материальным уравнением, связывающим поля \mathbf{E} , \mathbf{D} , и \mathbf{P} :

$$D = E + 4\pi P = \varepsilon E = n^2 E, \quad (7.5)$$

откуда получаем, что проницаемость и показатель преломления получают нелинейную добавку, пропорциональную квадрату амплитуды электрического поля:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_2}{2} |E|^2 = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 \langle E^2 \rangle, \\ n &= \sqrt{\varepsilon} \approx n_0 + \frac{n_2}{2} |E|^2 = n_0 + n_2 \langle E^2 \rangle, \quad \text{где } n_0 = \sqrt{\varepsilon_0}, \quad n_2 = \frac{3\pi\chi^{(3)}}{n_0}, \end{aligned} \quad (7.6)$$

где n_0 – линейный показатель преломления, а угловые скобки означают усреднение по временному интервалу больше периода колебаний световой волны. Интенсивность зависит от поля как $I = n_0 c |E|^2 / 8\pi$, поэтому

$$n = n_0 + \gamma I, \quad \text{где } \gamma = \frac{4\pi}{n_0 c} n_2 = \frac{12\pi^2 \chi^{(3)}}{n_0^2 c}. \quad (7.7)$$

Коэффициент n_2 принято измерять в единицах СГСЭ. Типичное значение n_2 в стёклах составляет $\sim(1-2) \cdot 10^{-13}$. Коэффициент γ часто называют «нелинейным показателем преломления». Он имеет размерность, обратную размерности интенсивности, т. е. $\text{см}^2/\text{Вт}$. Практическая формула для расчёта нелинейной добавки Δn к показателю преломления:

$$\Delta n = 4.19 \cdot 10^6 \frac{n_2 \text{ [ед. СГСЭ]}}{n_0} I \text{ [ГВт/см}^2\text{]} \quad (7.8)$$

К изменению показателя преломления среды под действием света могут приводить различные физические эффекты (табл. 7.1). Самый «быстрый» из них – *электронная поляризация*, связан с деформацией атомных орбиталей под действием электрического поля (см. также рис. 2.1 а). В стёклах бóльшая часть ($\sim 80-90\%$) нелинейного показателя преломления связана с электронной поляризацией, которая также часто называется оптическим эффектом Керра, по аналогии с обычным, электрооптическим эффектом Керра, квадратичным по полю.

Поляризация вращением в электрическом поле молекул, обладающих дипольным моментом (*ориентационная поляризация*, рис. 2.1 в) характерна для полярных жидкостей. *Электрострикция*¹ – эффект сжатия материала под действием поля (а показатель преломления, в свою очередь, зависит от плотности среды).

Если частота световой волны близка к одной из резонансных частот среды, то часть атомов или молекул среды под воздействием света переходит в реальное возбуждённое состояние. Поляризуемость атома в возбуждённом состоянии может быть иной, чем в основном, поэтому такое перераспределение населённости может приводить к эффективному изменению показателя преломления.

Изменение показателя преломления из-за нагревания среды после поглощения части прошедшего излучения – самый «медленный» процесс, однако приводящий к наиболее значительным фазовым искажениям.

Таблица 7.1 – Типичные значения нелинейного показателя преломления [10].

Механизм	γ , $\text{см}^2/\text{Вт}$	Время отклика, с
Электронная поляризация	10^{-16}	10^{-15}
Ориентация молекул	10^{-14}	10^{-12}
Электрострикция	10^{-14}	10^{-9}
Перераспределение населённости уровней	10^{-10}	10^{-8}
Тепловые эффекты	10^{-6}	10^{-2}

¹ Более подробно эффект электрострикции рассмотрен в главе 8.

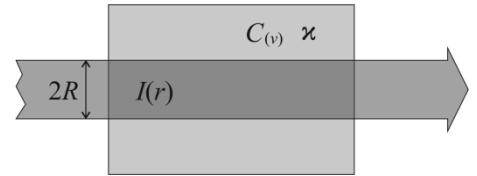
Таблица 7.2 – Нелинейные показатели преломления некоторых материалов [10].

	Материал	n_0	γ , см ² /Вт
кристаллы	Al ₂ O ₃	1,8	$2,9 \cdot 10^{-16}$
	Алмаз	2,42	$1,3 \cdot 10^{-15}$
	GaAs	3,47	$3,3 \cdot 10^{-13}$
	LiF	1,4	$9,0 \cdot 10^{-17}$
стекла	плавленый кварц	1,47	$3,2 \cdot 10^{-16}$
	БК-7	1,52	$3,4 \cdot 10^{-16}$
	неодимовое стекло КГСС-0180	1,53	$3,3 \cdot 10^{-16}$

	Материал	n_0	γ , см ² /Вт
жидкости	CCl ₄	1,45	$1,5 \cdot 10^{-15}$
	CS ₂	1,63	$3,2 \cdot 10^{-14}$
	этанол	1,36	$7,7 \cdot 10^{-16}$
	вода	1,33	$4,1 \cdot 10^{-16}$
газы	воздух	1	$5,0 \cdot 10^{-19}$
	аргон	1	$4,0 \cdot 10^{-19}$

Тепловая нелинейность

Рассмотрим более подробно изменение показателя преломления, связанное с нагреванием среды проходящим через неё лазерным излучением. Для оценки тепловых эффектов поставим следующую модельную задачу: пусть круглый лазерный пучок диаметром $2R$ и интенсивностью $I(r)$ проходит через некоторую среду, обладающую объёмной теплоёмкостью $C_{(v)}$ и теплопроводностью κ . Цилиндрическая симметрия данной задачи позволяет считать изменение температуры T зависящим только от поперечного радиуса: $T = T(r)$. Изменение температуры описывается уравнением теплопроводности:



$$C_{(v)} \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \Delta T = \delta \cdot I(r), \quad (7.9)$$

где δ – коэффициент поглощения света. Если свет лазера – непрерывный, то это уравнение сводится к *стационарному уравнению теплопроводности*:

$$-\kappa \Delta T = \delta I(r). \quad (7.10)$$

Тепловая нелинейность – существенно нелокальный эффект: из-за теплопроводности температура изменяется не только в объёме, где происходит поглощение лазерного излучения, но и в соседних областях.

Нагревание среды вызывает соответствующее изменение показателя преломления. В большом диапазоне изменения температуры эту зависимость можно считать линейной:

$$\Delta n = \left(\frac{dn}{dT} \right) T, \quad (7.11)$$

где (dn/dT) – коэффициент температурной зависимости показателя преломления. Он может быть как положительным, так и отрицательным. Для большинства веществ в конденсированном состоянии он не превышает величины $3 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ (по абсолютной величине, см. табл. 7.3).

Для того, чтобы оценить по порядку величины максимальное изменение температуры T_{\max} в центре пучка (при непрерывном излучении), заменим ΔT на $-T_{\max}/R^2$, и из (7.10) получим, что

$$T_{\max} = \frac{\delta I_{\max} R^2}{\kappa}. \quad (7.12)$$

Изменение показателя преломления в этом случае равно

$$\Delta n = \left(\frac{dn}{dT} \right) \frac{\delta I_{\max} R^2}{\kappa}, \quad (7.13)$$

а нелинейный тепловой коэффициент γ_T (из равенства $\Delta n = \gamma_T I$) равен

$$\gamma_T = \left(\frac{dn}{dT} \right) \frac{\delta R^2}{\kappa}. \quad (7.14)$$

Таблица 7.3 – Тепловые свойства некоторых веществ [10].

Материал	$C_{(v)}$, Дж/см ³ ·К	κ , Вт/м·К	dn/dT , К ⁻¹
Алмаз	1,76	660	
кварцевое стекло	1,67	1,4	$1,2 \cdot 10^{-5}$
Вода	4,2	0,56	
Воздух	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$26 \cdot 10^{-3}$	$-1,0 \cdot 10^{-6}$

При типичных значениях, например, $(dn/dT) = 10^{-5} \text{ К}^{-1}$, $\delta = 0,01 \text{ см}^{-1}$, $R = 1 \text{ мм}$, $\kappa = 1 \text{ Вт/м·К}$ получаем $\gamma_T = 10^{-7} \text{ см}^2/\text{Вт}$ (сравните с характерными значениями γ из таблицы 7.2 – разница на много порядков). Таким образом, тепловая нелинейность – главный источник нелинейных фазовых искажений в непрерывных лазерах.

Если лазерное излучение – импульсное, то следует использовать нестационарное уравнение (7.9). Оценим сначала характерное время τ отклика температуры на внешнее воздействие, заменив $\partial T/\partial t$ на T/τ . Получим $\tau \approx C_{(v)} R^2/\kappa \approx 1 \text{ с}$ (при $C_{(v)} = 1 \text{ Дж/см}^3 \cdot \text{К}$, $\kappa = 1 \text{ Вт/м·К}$, $R = 1 \text{ мм}$), что много больше длительности типичных лазерных импульсов. При импульсном воздействии тепловую нелинейность невозможно описать с помощью коэффициента γ , поскольку температура (и показатель преломления) изменяются в течение импульса. Вместо этого мы выведем условие, при котором тепловая нелинейность $\Delta n = (dn/dT) \cdot T_{\max}$ становится сравнимой по величине с нелинейностью, связанной с электронной поляризацией: $\Delta n = \gamma_{эл} I$.

При длительности лазерного импульса много меньше времени отклика температуры теплопроводностью можно пренебречь, и уравнение (7.9) переходит в

$$C_{(v)} \frac{\partial T}{\partial t} = \delta I(r). \quad (7.15)$$

Заменив $\partial T/\partial t$ на T/τ_p , где τ_p – длительность импульса, получим оценку для максимального изменения температуры:

$$T_{\max} = \frac{\delta I_{\max} \tau_p}{C_{(v)}}, \quad (7.16)$$

и из условия превышения тепловой нелинейности над электронной, получим оценку длительности импульса, при которой тепловые эффекты вносят значительный вклад в изменение показателя преломления:

$$\tau_p \geq \frac{\gamma_{эл} C_{(v)}}{(dn/dT) \delta}. \quad (7.17)$$

При типичных значениях $\gamma_{эл} \approx 3 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2/\text{Вт}$, $C_{(v)} = 1 \text{ Дж}/\text{см}^3 \cdot \text{К}$, $(dn/dT) = 10^{-5} \text{ К}^{-1}$, $\delta = 0,01 \text{ см}^{-1}$, получаем $t_p \geq 3 \text{ нс}$. То есть, при таком соотношении коэффициента поглощения и теплоёмкости, тепловая нелинейность существенна только для наносекундных и более длинных импульсов.

Крупномасштабная самофокусировка

Пусть круглый лазерный пучок с равномерным распределением интенсивности I , распространяется через кубически-нелинейную среду (рис. 7.1). Если $\gamma > 0$, то показатель преломления среды внутри пучка будет больше, чем вне его, и пучок окажется в своего рода нелинейном световоде. Из условия полного внутреннего отражения луча, распространяющегося под дифракционным углом $\theta_0 = 1,22\lambda/(n_0 D)^1$, от границы этого световода, можно вывести условие сохранения диаметра пучка:

$$(n_0 + \gamma I) \cos \theta_0 = n_0, \quad (7.18)$$

а поскольку $\cos \theta_0 \approx 1 - (\theta_0)^2/2$, получим выражение для *критической мощности* самофокусировки ($P = \pi D^2 I/4$):

$$P_{кр} = \frac{\pi (1,22\lambda)^2}{8n_0\gamma} = \frac{c (1,22\lambda)^2}{32n_2}. \quad (7.19)$$

То есть, поведение пучка в нелинейной среде определяется не интенсивностью, а мощностью: если мощность меньше критической, то дифракция сильнее самофокусировки, и пучок расходится. Напротив, если $P > P_{кр}$, то пучок лавинообразно «схлопывается» к оси, пока интенсивность в его центре не превысит порог разрушения оптической среды или порог вынужденного рассеяния. Если же мощность равна критической, то диаметр пучка остаётся неизменным – происходит *самоканализация* излучения.

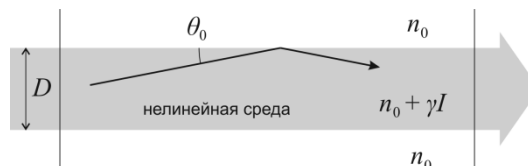


Рисунок 7.1 – Нелинейный волновод.

Рассмотрим процесс самофокусировки с точки зрения деформации волнового фронта, на примере гауссова пучка. Пусть гауссов пучок с плоским волновым фронтом падает на границу нелинейной среды (рис. 7.2). Интенсивность в центре пучка больше, чем на краях, поэтому, если $n_2 > 0$, показатель преломления увеличивается от краёв к

¹ Здесь и далее λ – длина волны света в вакууме. Длина волны в среде равна $\lambda/n \approx \lambda/n_0$.

центру, и центральная часть пучка будет отставать по фазе по сравнению с периферией. Волновой фронт приобретёт вогнутую форму, а поскольку локально свет распространяется в направлении, перпендикулярном волновому фронту, пучок будет сходиться к оси.

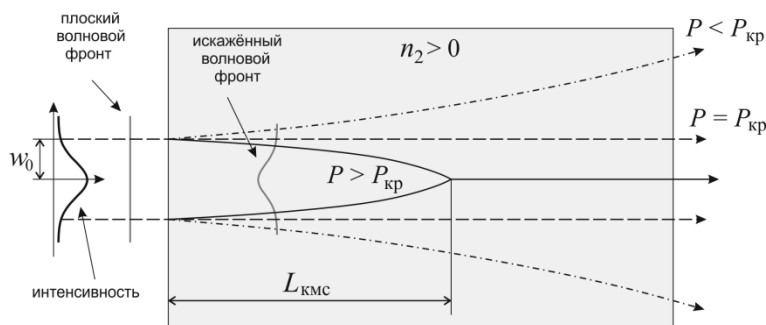


Рисунок 7.2 – Самофокусировка гауссова пучка.

Можно показать, что критическая мощность в случае гауссова пучка равна

$$P_{кр} = \frac{c\lambda^2}{32\pi^2 n_2}, \quad (7.20)$$

а расстояние $L_{кмс}$, на котором пучок схлопывается в точку (*длина самофокусировки*), равно

$$L_{кмс} \approx \frac{kw_0^2}{\sqrt{P/P_{кр} - 1}}. \quad (7.21)$$

Если длина нелинейной среды L меньше $L_{кмс}$, то фокусировка происходит вне среды (*внешняя самофокусировка*), а эффективное фокусное расстояние такой тонкой линзы равно

$$F_{нл} = \frac{\pi^2 n_0 w_0^4}{\lambda^2 L (P/P_{кр} - 1)}. \quad (7.22)$$

Формулы (7.21) - (7.22) приближённо справедливы при небольшом превышении мощности над критической. Если же $P \gg P_{кр}$, то картина крупномасштабной самофокусировки усложняется: различные части пучка могут сфокусироваться на разном расстоянии – возникает *многофокусная* самофокусировка. Если лазерное излучение – импульсное, и его мощность изменяется в течение импульса, то в результате самофокусировки образуются *движущиеся фокусы*.

При $n_2 < 0$ волновой фронт пучка наоборот, приобретает выпуклую форму, и расходимость увеличивается по сравнению с дифракционной – происходит *дефокусировка* излучения. Обычно, дефокусировка бывает в жидкостях при тепловой нелинейности – уменьшение показателя преломления в этом случае обусловлено нагреванием среды под действием лазерного излучения.

В общем виде поведение пучка непрерывного света с комплексной амплитудой $A(\mathbf{r})$, с учётом дифракции и нелинейного самовоздействия, описывается стационарным нелинейным параксиальным волновым уравнением:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} A + \frac{ikn_2}{2n_0} |A|^2 A = 0, \quad (7.23)$$

где $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, $k = 2\pi n_0/\lambda$ (сравните с (1.16)). Это уравнение легко вывести (в приближении медленно меняющихся амплитуд) из общего волнового уравнения (1.7), учитывая, что $\varepsilon = n^2 = (n_0 + n_2|A|^2)^2 \approx (n_0)^2 + n_0 n_2 |A|^2$.

Внешняя самофокусировка часто используется для пассивной синхронизации мод лазеров с ультракороткой длительностью импульса. На рисунке 7.3 показана типичная схема резонатора такого лазера. В перетяжке основной резонаторной моды находится активный элемент (например, кристалл Ti:сапфир). Большая часть поперечного сечения моды обрезается диафрагмой. Но если интенсивность света в резонаторе возрастает, то происходит самофокусировка пучка в активном элементе. В результате диаметр моды резко уменьшается, и пучок проходит через диафрагму без потерь. Таким образом, из шумового спонтанного излучения, после многократного обхода резонатора, выделяется последовательность мощных спектрально-ограниченных импульсов. Малое время отклика электронной поляризации ($\sim 10^{-15}$ с) позволяет получать в таком лазере импульсы фемтосекундной длительности.

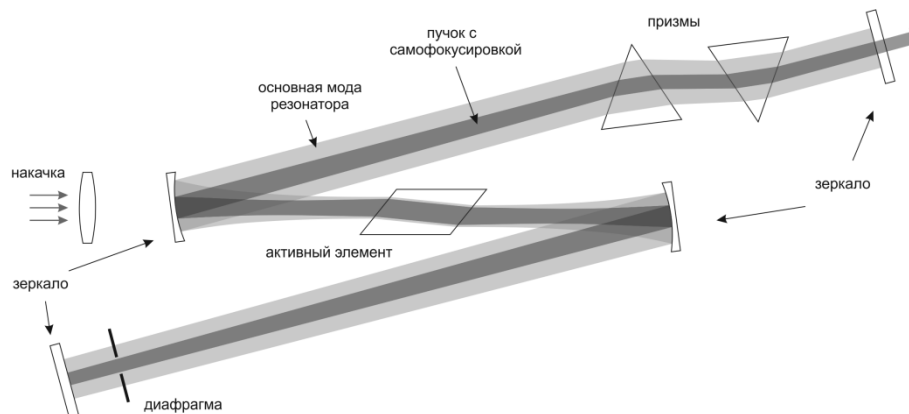


Рисунок 7.3 – Схема резонатора лазера с пассивной синхронизацией мод с помощью керровской линзы.

Ещё одно применение нелинейной рефракции – оптическое ограничение мощности лазерного излучения. Для защиты какого-либо чувствительного элемента (например, фотодетектора) от превышения максимально допустимой мощности падающего на него излучения можно использовать одну из схем, показанных на рис. 7.4. Принцип действия такого ограничителя – разбюстировка схемы в результате самофокусировки или дефокусировки при повышении мощности света.

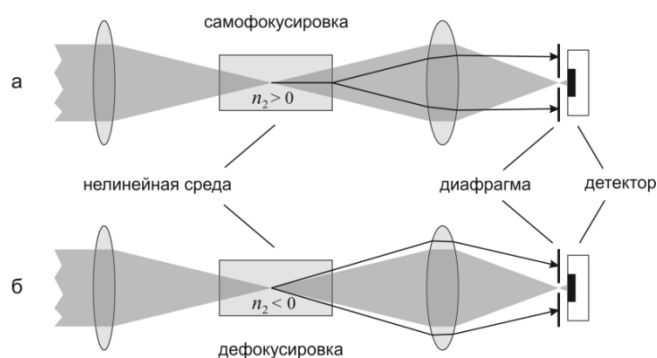


Рисунок 7.4 – Схема ограничителя мощности излучения, основанного на эффекте самофокусировки (а) и дефокусировки (б).

Эффект самофокусировки был теоретически предсказан Г. А. Аскарьяном в 1962 г., а экспериментально впервые наблюдался Н. Ф. Пилипецким и С. Р. Рустамовым в 1965 г. В их опытах были зарегистрированы узкие светящиеся нити в органических жидкостях, облучаемых сфокусированным пучком рубинового лазера.

Мелкомасштабная самофокусировка

Если мощность лазерного пучка в нелинейной среде многократно превышает критическую, то картина самофокусировки меняется. Вместо крупномасштабной самофокусировки пучка как целого (рис. 7.5а) может проявиться *мелкомасштабная самофокусировка*, когда пучок распадается на части (каждая из которых имеет мощность порядка критической), фокусирующиеся по отдельности (рис. 7.5б).

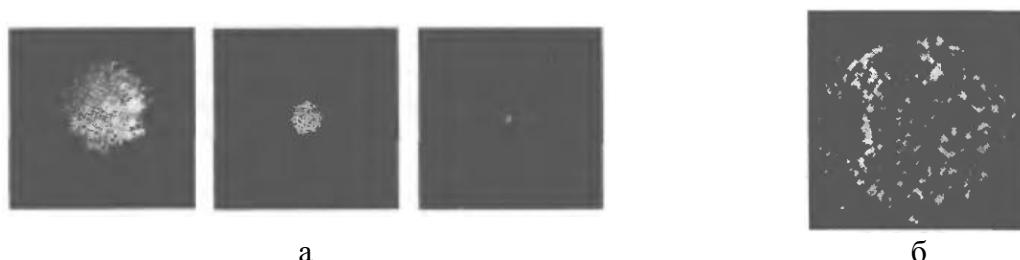


Рисунок 7.5 – Самофокусировка одномодового лазерного пучка в толуоле – распределение интенсивности на выходе при различной длине кюветы (а), самофокусировка многомодового лазерного пучка в сероуглероде (б) [5].

В наглядном виде механизм развития неустойчивостей, приводящих к мелкомасштабной самофокусировке, показан на рисунке 7.6. Начальные небольшие возмущения фазы или интенсивности пучка приводят к *филаментации*, то есть, образованию тонких нитей.

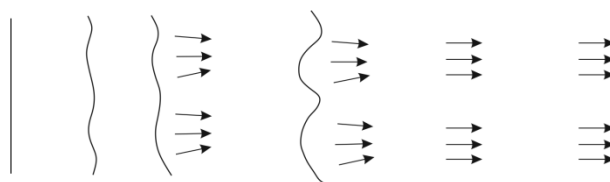


Рисунок 7.6 – Нелинейный рост возмущений волнового фронта и филаментация пучка.

Проведём анализ мелкомасштабной самофокусировки, следуя классической работе Беспалова и Таланова¹, на основе нелинейного парааксиального волнового уравнения. Представим комплексную амплитуду поля в виде

$$A = (A_0 + a)e^{-ibz}, \quad \text{где } b = \frac{kn_2 A_0^2}{2n_0}, \quad (7.24)$$

где $A_0 = \text{const}$ – амплитуда плоской волны, $a = a(x, y, z)$ – малое возмущение поля ($a \ll A_0$). Подставив (7.24) в уравнение (7.23), и оставляя только члены, линейные по a , получим соотношение

$$\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} a + \frac{ikn_2 A_0^2}{2n_0} (a + a^*) = 0. \quad (7.25)$$

Если теперь представить возмущение поля в виде $a = a_1 + ia_2$, то, разделив действительную и мнимую части (7.25), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{1}{2k} \Delta_{\perp} a_2 &= 0, \\ \frac{\partial a_2}{\partial z} + \frac{1}{2k} \Delta_{\perp} a_1 + \frac{kn_2 A_0^2}{n_0} a_1 &= 0. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Если представить амплитуды a_1 и a_2 в виде

$$a_{1,2} = a_{1,2}^0 e^{-i\mathbf{x}\mathbf{p} + \Gamma z}, \quad (7.27)$$

где \mathbf{x} – поперечный волновой вектор: $\mathbf{x} = (x_x, x_y)$, \mathbf{p} – вектор поперечных координат: $\mathbf{p} = (x, y)$, $\mathbf{x}\mathbf{p} = x_x x + x_y y$, то из (7.26) получим дисперсионное уравнение:

$$\Gamma^2 = \frac{x^2}{4k^2} \left(\frac{2n_2 k^2 A_0^2}{n_0} - x^2 \right). \quad (7.28)$$

Нелинейные искажения поля будут нарастать, только если инкремент Γ – действительное число, то есть, если выражение в скобках в (7.28) больше нуля. Это условие даёт диапазон пространственных частот, в пределах которого возможен рост мелкомасштабных возмущений: $0 < x < x_{\text{кр}}$, где критическое значение равно

$$x_{\text{кр}} = k \sqrt{2n_2 A_0^2 / n_0}. \quad (7.29)$$

Тогда частотную зависимость скорости нарастания колебаний амплитуды $\Gamma(x)$ можно записать в виде

$$\Gamma = \frac{x}{2k} \sqrt{x_{\text{кр}}^2 - x^2}. \quad (7.30)$$

¹ Беспалов В. И., Таланов В. И. О нитевидной структуре пучков света в нелинейных жидкостях, Письма в ЖЭТФ, 3, с. 471, 1966.

Инкремент Γ достигает максимального значения Γ_{\max} при $\varkappa = \varkappa_{\max}$, где

$$\begin{aligned}\varkappa_{\max} &= k \sqrt{\frac{n_2 A_0^2}{n_0}} = \frac{\varkappa_{\text{кр}}}{\sqrt{2}}, \\ \Gamma_{\max} &= \frac{n_2 k A_0^2}{2n_0} = \frac{8\pi^2 n_2 I}{n_0 c \lambda}.\end{aligned}\quad (7.31)$$

Нелинейный набег фазы наиболее опасных возмущений, приобретаемый на длине L , называется интегралом распада, или *B-интегралом*:

$$B = \int_0^L \Gamma_{\max} dz = \frac{8\pi^2 n_2}{n_0 c \lambda} \int_0^L I dz. \quad (7.32)$$

Характерный размер этих возмущений равен

$$\Lambda_{\perp} = \frac{2\pi}{\varkappa_{\max}} = \frac{2\pi}{k} \sqrt{\frac{n_0}{n_2 A_0^2}} = \sqrt{\frac{c \lambda^2}{8\pi n_2 I}} \approx 2\sqrt{\pi P_{\text{кр}}/I}, \quad (7.33)$$

а расстояние $L_{\text{ММС}}$, на котором происходит существенный рост амплитуды этих возмущений (в $e^{\pi} \approx 23$ раза), равно

$$L_{\text{ММС}} = \frac{\pi}{\Gamma_{\max}} = \frac{n_0 c \lambda}{8\pi n_2 I}. \quad (7.34)$$

Условие отсутствия нелинейного роста возмущений амплитуды – ограничение накопления *B-интеграла* на каждом оптическом элементе некоторым заранее заданным числом.

Мелкомасштабная самофокусировка – один из основных процессов, ограничивающих энергию излучения мощных лазерных установок на неодимовом стекле [6]. При характерных параметрах излучения ($I \approx 5$ ГВт/см², $n_2 \approx 10^{-13}$ ед. СГС, $\lambda = 1,054$ мкм) получаем $\Lambda_{\perp} \approx 0,5$ мм, $L_{\text{ММС}} \approx 38$ см. На рис. 7.7 показана зависимость $\Gamma(\varkappa)$ (7.28) при данных параметрах.

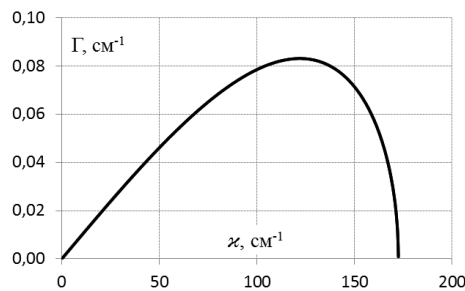


Рисунок 7.7 – Зависимость инкремента возмущений ММС от пространственной частоты.

Отношение длин крупномасштабной и мелкомасштабной самофокусировки равно

$$L_{\text{КМС}}/L_{\text{ММС}} \approx \sqrt{P/P_{\text{кр}}}. \quad (7.35)$$

В мощных лазерах, как правило, $P \gg P_{\text{кр}}$, поэтому мелкомасштабная самофокусировка доминирует. Начальное возмущение амплитуды может возникнуть, например, в

результате дифракции на краях пучка и/или на каких-либо препятствиях: при распространении пучка колебания интенсивности могут довольно сильно превысить средний уровень (рис. 7.8).

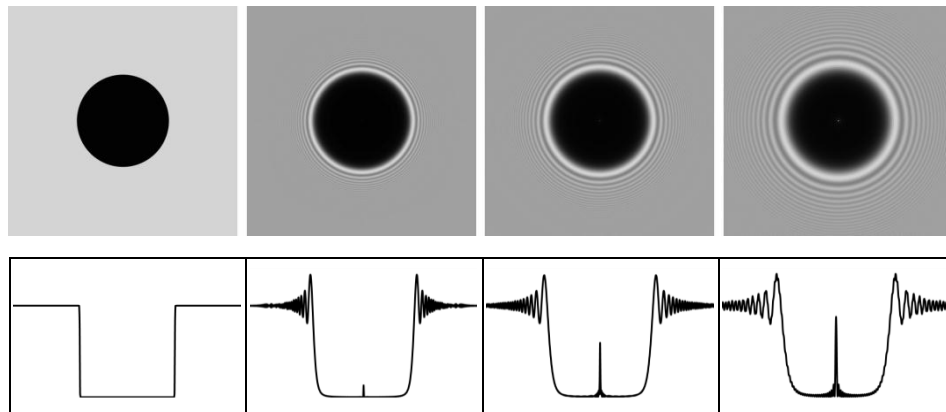


Рисунок 7.8 – Дифракция на круглом препятствии диаметром 1 см ($\lambda = 1$ мкм): распределение интенсивности на расстояниях 0, 50, 100 и 200 см от препятствия.

Для уменьшения дифракционных возмущений применяют аподизацию (сглаживание краёв) пучка и перестроение плоскости изображения между усилительными модулями с помощью телескопов (рис. 7.9). Расстояния между эквивалентными плоскостями зависят от фокусных расстояний линз телескопа как

$$L_2 = \frac{F_2}{F_1}(F_2 + F_1) - L_1 \left(\frac{F_2}{F_1} \right)^2 \quad (7.36)$$

В этих телескопах для подавления мелкомасштабной самофокусировки также производится пространственная фильтрация, то есть, в общей фокальной плоскости линз ставится диафрагма, которая обрезает наиболее опасные с точки зрения развития ММС частоты.

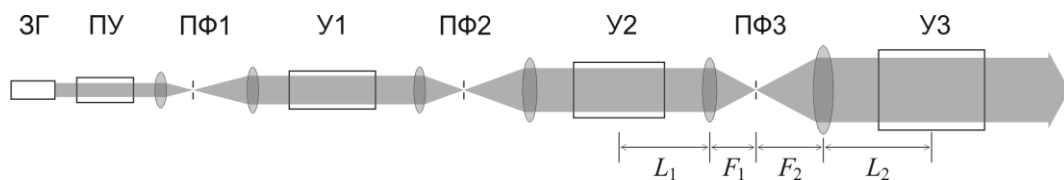


Рисунок 7.9 – Принципиальная схема мощной однопроходной лазерной установки: ЗГ – задающий генератор, ПУ – предусилители, ПФ – пространственные фильтры, У – усилители.

Поворот эллипса поляризации

Одно из интересных проявлений кубической нелинейности – изменение состояния поляризации световой волны при её распространении даже в изотропной среде. Для рассмотрения этого эффекта следует в явном виде записать компоненты тензора нелинейной восприимчивости третьего порядка $\chi^{(3)}$. Можно показать, что в изотропной среде из 81 элемента этого тензора только 21 не равен нулю, причём имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\chi_{1111} &= \chi_{2222} = \chi_{3333}, \\ \chi_{1122} &= \chi_{1133} = \chi_{2211} = \chi_{2233} = \chi_{3311} = \chi_{3322}, \\ \chi_{1212} &= \chi_{1313} = \chi_{2323} = \chi_{2121} = \chi_{3131} = \chi_{3232}, \\ \chi_{1221} &= \chi_{1331} = \chi_{2112} = \chi_{2332} = \chi_{3113} = \chi_{3223},\end{aligned}\tag{7.37}$$

где введено краткое обозначение $\chi_{ijkl} = \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$. Недиагональные элементы (т. е. в которых какой-либо из индексов встречается нечётное число раз) равны нулю, поскольку, например, элемент χ_{1222} соответствовал бы отклику среды в направлении x , когда поле приложено в направлении y , чего, очевидно не может быть в изотропной среде. Легко показать также, что

$$\chi_{1111} = \chi_{1122} + \chi_{1212} + \chi_{1221}.\tag{7.38}$$

Таким образом, в изотропной среде у тензора $\chi^{(3)}$ только 3 независимых параметра, и его можно записать в компактной форме

$$\chi_{ijkl} = \chi_{1122}\delta_{ij}\delta_{kl} + \chi_{1212}\delta_{ik}\delta_{jl} + \chi_{1221}\delta_{il}\delta_{jk}.\tag{7.39}$$

При нелинейном самовоздействии света тензор восприимчивости имеет вид $\chi_{ijkl}(\omega = \omega + \omega - \omega)$, и, поскольку в силу внутренней перестановочной симметрии $\chi_{1122} = \chi_{1212}$, в нём остаётся только 2 независимых элемента:

$$\begin{aligned}\chi_{ijkl}(\omega = \omega + \omega - \omega) &= \chi_{1122}(\omega = \omega + \omega - \omega)(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl}) + \\ &+ \chi_{1221}(\omega = \omega + \omega - \omega)\delta_{il}\delta_{jk}.\end{aligned}\tag{7.40}$$

Подставив этот тензор в выражение (7.3) для нелинейной поляризации, получим

$$P_i = \frac{3}{2}\chi_{1122}E_i(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) + \frac{3}{4}\chi_{1221}E_i^*(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}).\tag{7.41}$$

Введём обозначения для компонентов тензора кубической восприимчивости:

$$A = \frac{3}{2}\chi_{1122}, \quad B = \frac{3}{4}\chi_{1221}.\tag{7.42}$$

Тогда равенство (7.41) можно записать в виде

$$\mathbf{P} = A(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*)\mathbf{E} + \frac{1}{2}B(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}^*.\tag{7.43}$$

Поляризация в данном случае состоит из двух составляющих. Первое из них ведёт себя как амплитуда поля \mathbf{E} , а вторая – как её комплексно-сопряжённая \mathbf{E}^* . Соотношение между коэффициентами A и B , то есть, между компонентами χ_{1122} и χ_{1221} , зависит от того, какой физической механизм отвечает за нелинейную поляризацию. Если мы имеем дело с

нерезонансной электронной поляризацией, то $B/A = 1$. Для электрострикции $B/A = 0$, а при поляризации, связанной с изменением ориентации молекул, $B/A = 6$.

Любую полностью поляризованную волну можно представить в виде суммы двух волн с линейной поляризацией: $\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 E_1 + \mathbf{e}_2 E_2$, где $\mathbf{e}_{1,2}$ – единичные векторы в направлении координатных осей x и y соответственно. Можно также разложить поле на волны с круговой поляризацией:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_+ E_+ + \mathbf{e}_- E_-, \quad \text{где } \mathbf{e}_\pm = \frac{\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2}{\sqrt{2}}. \quad (7.44)$$

Компоненты E_\pm соответствуют правой и левой круговым состояниям поляризации (рис. 7.10). Свойства векторов \mathbf{e}_\pm таковы, что

$$\mathbf{e}_\pm^* = \mathbf{e}_\mp, \quad \mathbf{e}_\pm \cdot \mathbf{e}_\pm = 0, \quad \mathbf{e}_\pm \cdot \mathbf{e}_\mp = 1. \quad (7.45)$$

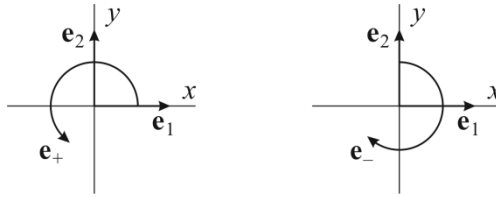


Рисунок 7.10 – Линейная и круговая поляризации.

Получаем:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = |E_+|^2 + |E_-|^2, \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = 2E_+ E_-. \quad (7.46)$$

Аналогично, нелинейная поляризация записывается в виде

$$\mathbf{P}^{NL} = \mathbf{e}_+ P_+ + \mathbf{e}_- P_- \quad (7.47)$$

Из (7.43) следует, что

$$\mathbf{P}^{NL} = A(|E_+|^2 + |E_-|^2)\mathbf{E} + B(E_+ E_-)\mathbf{E}^*, \quad (7.48)$$

то есть,

$$\begin{aligned} P_+ &= A|E_+|^2 E_+ + (A+B)|E_-|^2 E_-, \\ P_- &= A|E_-|^2 E_- + (A+B)|E_+|^2 E_+. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Определив эффективную нелинейную восприимчивость равенством

$$P_\pm = \chi_\pm^{NL} E_\pm, \quad (7.50)$$

получим выражение для неё:

$$\chi_\pm^{NL} = A|E_\pm|^2 + (A+B)|E_\mp|^2. \quad (7.51)$$

Показатели преломления для правой и левой поляризаций будут равны

$$n_\pm = \sqrt{n_0^2 + 4\pi\chi_\pm^{NL}} \approx n_0 + \frac{2\pi}{n_0} [A|E_\pm|^2 + (A+B)|E_\mp|^2], \quad (7.52)$$

а их разница

$$\Delta n = n_+ - n_- = \frac{2\pi}{n_0} B (|E_-|^2 - |E_+|^2). \quad (7.53)$$

зависит только от коэффициента B , но не зависит от A .

В случае линейной поляризации амплитуды правой и левой волн равны между собой: $|E_+| = |E_-|$, и $\Delta n = 0$. При круговой поляризации только одна из компонент, E_+ или E_- не равна нулю. Если же волна имеет эллиптическую поляризацию, то фазовые скорости правой ли левой составляющих отличаются на величину Δn , и при распространении света разность фаз между ними изменяется. Это проявляется в повороте эллипса поляризации: электрическое поле волны на расстоянии z можно представить в виде

$$\begin{aligned} E(z) &= \mathbf{e}_+ E_+ + \mathbf{e}_- E_- = \mathbf{e}_+ A_+ e^{-in_+ \omega z/c} + \mathbf{e}_- A_- e^{-in_- \omega z/c} = \\ &= (\mathbf{e}_+ A_+ y^{-i\theta} + \mathbf{e}_- A_- y^{i\theta}) e^{-i\bar{k}z}, \end{aligned} \quad (7.54)$$

где \bar{k} – модуль «среднего» волнового вектора, а θ – угол поворота поляризации:

$$\bar{k} = \frac{n_+ + n_-}{2} \cdot \frac{\omega}{c}, \quad \theta = \frac{\Delta n}{2} \cdot \frac{\omega}{c} z. \quad (7.55)$$

Заметим, что

$$\mathbf{e}_\pm e^{\mp i\theta} = \frac{\mathbf{e}'_x \pm i\mathbf{e}'_y}{\sqrt{2}}, \quad (7.56)$$

где $\mathbf{e}'_{x,y}$ – орты новой системы координат, повернутой на угол θ (рис. 7.11). Переход к новым координатам производится по обычным формулам:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta - y \sin \theta, \\ y' &= x \sin \theta + y \cos \theta, \end{aligned} \quad (7.57)$$

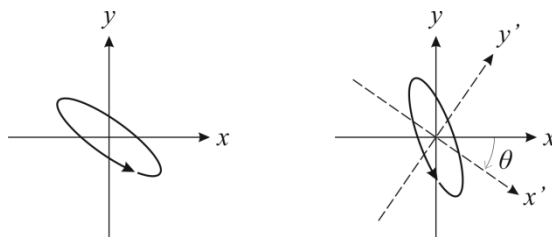


Рисунок 7.11 – Поворот эллипса поляризации в кубически-нелинейной изотропной среде.

Таким образом, даже изотропная нелинейная среда ведёт себя как *оптически активный материал*. Обычно этот эффект вреден, поскольку приводит к деполяризации мощного лазерного излучения, распространяющегося через нелинейную среду (а любая среда в той или иной степени обладает нелинейностью третьего порядка). Измерение угла поворота эллиптической поляризации – эффективный способ определения величины нелинейного коэффициента B (то есть, χ_{1221}).

Распространение оптических импульсов в кубически-нелинейной среде

Интенсивность светового импульса $I(t)$ зависит от времени (рис. 7.12 а). Следовательно, его фаза $\varphi = \omega t - kz = \omega(t - nz/c)$ в кубически нелинейной среде имеет линейную и нестационарную нелинейную составляющую:

$$\varphi(t, z) = \omega_0 t - \frac{\omega_0 n_0}{c} z - \frac{\omega_0 \gamma I(t)}{c} z, \quad (7.58)$$

где ω_0 – несущая (средняя) частота. Мгновенную частоту импульса можно определить как производную фазы по времени:

$$\omega(t, z) \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega_0 - \frac{\omega_0 \gamma z}{c} \frac{\partial I}{\partial t}. \quad (7.59)$$

Следовательно, в нелинейной среде происходит уширение спектра импульса. Зависимость смещения частоты от времени:

$$\delta\omega = -\frac{\omega_0 \gamma z}{c} \frac{\partial I}{\partial t} \quad (7.60)$$

показана на рисунке 7.12б. Если нелинейный коэффициент γ положителен, то частота переднего фронта импульса, где $\partial I/\partial t > 0$, уменьшается, а частота заднего фронта – увеличивается. То есть, передняя часть импульса «краснеет», а задняя – «синееет». Этот эффект – одно из проявлений *самомодуляции* световой волны.

Одно из интересных применений нелинейной фазовой модуляции – сжатие лазерного импульса. Типичная схема такого рода, с использованием оптического волокна в качестве нелинейной среды, приведена на рис. 7.13а. На вход системы подаётся короткий мощный импульс, в волокне происходит самомодуляция и уширение спектра. Вследствие дисперсии низкочастотные компоненты импульса распространяются быстрее, чем высокочастотные, поэтому импульс расширяется во времени, причём на выходе частота возрастает в течение импульса практически линейно (рис. 7.13 б).

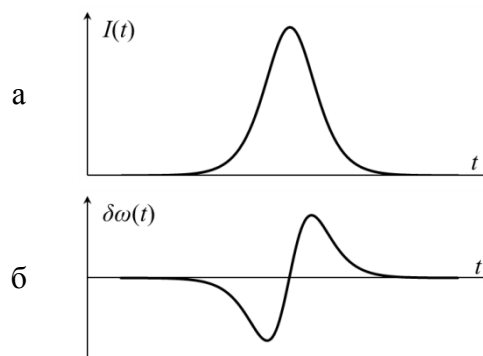


Рисунок 7.12 – Фазовая самомодуляция импульса: зависимость интенсивности от времени (а); смещение частоты (б).

Таким образом, на выходе из волокна мы имеем практически *чирпированный* импульс, то есть, с линейной частотной модуляцией. Далее, с помощью обычного компрессора, состоящего, например, из двух дифракционных решёток (которые вносят задержку по времени, линейно зависящую от частоты), можно сжать этот импульс до

спектрально-ограниченной длительности, которая может быть много меньше исходной. Данный метод позволяет сравнительно легко получать субпикосекундные импульсы.

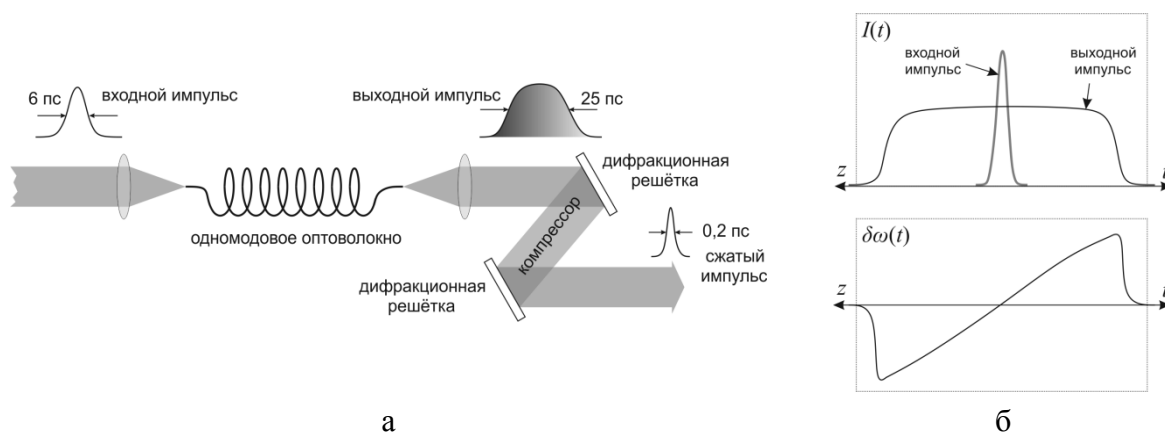


Рисунок 7.13 – Нелинейная компрессия импульсов в оптическом волокне.

Помимо фазовой самомодуляции известен процесс *перекрестной модуляции*, при котором два импульсных лазерных пучка распространяются через какую-либо нелинейную среду. Первый пучок, если его интенсивность достаточно велика, изменяет свойства среды на своём пути (создаёт неоднородное распределение показателя преломления $n(t, x, y, z)$). Второй пучок распространяется через эту модифицированную среду, и приобретает фазовую модуляцию, наведённую первым пучком. Кросс-модуляция – яркий пример нарушения принципа суперпозиции, характерного для линейной оптики. В радиодиапазоне данный эффект наблюдался ещё в 1933 году (т. н. «Люксембург-Горьковский эффект»), когда сигнал мощной радиостанции прослушивался не только на её собственной частоте, но и на частотах других радиостанций (роль нелинейной среды здесь играет ионосфера). В оптике перекрестная модуляция возникает в оптоволоконных линиях связи со спектральным уплотнением каналов.

Оптические солитоны

Исследование процессов распространения импульсов в нелинейной среде проводится на основе нестационарного нелинейного волнового уравнения. Для того, чтобы его написать, нам потребуется линейное нестационарное уравнение (5.42), в которое добавим член, отвечающий за нелинейную поляризацию третьего порядка, т. е. последнее слагаемое в левой части стационарного уравнения (7.23). При этом мы не будем учитывать пространственные явления, связанные с дифракцией (то есть, члены $\sim \Delta_{\perp} A$). В результате получим уравнение

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{ig}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{ik_0 n_2}{2n_0} |A|^2 A = 0. \quad (7.61)$$

Это уравнение можно упростить, перейдя в систему отсчёта, движущуюся с групповой скоростью вдоль оси Z . Для этого заменим время t на переменную τ вида

$$\tau = t - \frac{z}{u}, \quad (7.62)$$

и обозначим амплитуду в новых переменных как $\tilde{A}(\tau, z)$. Тогда

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} - \frac{1}{u} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \tau}, \quad (7.63)$$

и уравнение (7.61) примет вид

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} - \frac{ig}{2} \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial \tau^2} + \frac{ik_0 n_2}{2n_0} |\tilde{A}|^2 \tilde{A} = 0. \quad (7.64)$$

Последнее уравнение называется *нелинейным уравнением Шрёдингера*. Второе слагаемое в нём описывает групповую дисперсию, а третье – нелинейность (третьего порядка). Оба эти процесса влияют на форму и длительность импульса, поэтому, в общем случае, импульс света расплывается во времени при распространении в материальной среде. Однако, при определённых условиях, нелинейность может скомпенсировать дисперсию, и импульс будет распространяться без изменения длительности. Простейшее решение уравнения (7.64) такого типа имеет вид

$$\tilde{A}(\tau, z) = \tilde{A}_0 \frac{e^{i\kappa z}}{\text{ch}(\tau/\tau_p)}, \quad (7.65)$$

причём амплитуда импульса \tilde{A}_0 и пространственная частота κ связаны с длительностью импульса τ_p и параметрами среды g , n_0 и n_2 соотношениями

$$\kappa = \frac{g}{2\tau_p^2}, \quad \tilde{A}_0^2 = -\frac{2gn_0}{\tau_p^2 kn_2}. \quad (7.66)$$

Импульс вида (7.65) - (7.66) называется *оптическим солитоном* (первого порядка).

Солитоны, то есть, уединённые волны, впервые наблюдались в виде волн на поверхности воды. Их образование – характерный нелинейный эффект, проявляющийся в гидродинамике, физике плазмы, оптике, и т. д. С оптическими солитонами связывают надежды на увеличение пропускной способности волоконных линий связи. Дисперсионное расплывание импульсов ограничивает максимальную частоту их повторения, но если дисперсия скомпенсирована нелинейностью, то есть, если импульсы распространяются в солитонном режиме, то расплывания не происходит.

Мощность солитона жестко связана с его длительностью, в соответствии со вторым из соотношений (7.66). При распространении импульса в среде часть его энергии теряется на поглощение, и он выходит из солитонного режима. Поэтому в солитонных линиях связи для компенсации затухания требуется постоянное усиление. Как правило, для этого используется эффект вынужденного комбинационного рассеяния (см. главу 8). Подробно тема солитонов в волоконных световодах освещена в книге [12].

Из соотношения для амплитуды (7.66) видно, что солитонное решение имеет физический смысл, только если групповая дисперсия и нелинейный коэффициент имеют разные знаки: $g \cdot n_2 < 0$. В кварцевом стекле, используемом для изготовления оптических волокон, $n_2 > 0$, поэтому групповая дисперсия должна быть отрицательной. Такой режим реализуется в кварцевых волокнах при длине волны излучения $\lambda_0 \approx 1,55$ мкм (см.

рисунок 7.14, на котором показаны зависимости линейного n и группового $n_g = c/v$ показателей преломления от длины волны).

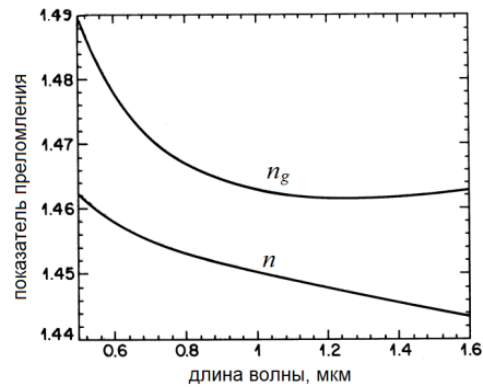


Рисунок 7.14 – Зависимость показателя преломления n и группового показателя n_g в кварцевом стекле от длины волны [12].

Рассмотренный выше солитон появляется в результате того, что нелинейность среды компенсирует групповую дисперсию, поэтому его ещё называют «временным солитоном». Как мы уже знаем, дисперсионное расплывание импульса во времени имеет пространственный аналог: дифракционное расплывание пучка в поперечном направлении. Если нелинейность (в результате самофокусировки) компенсирует дифракцию, то получается пространственный аналог временного солитона – т. н. «пространственный солитон». Это ни что иное, как пучок в режиме самоканализации (рис. 7.1 и 7.2), когда его мощность равна критической.

8. Вынужденное рассеяние

Спонтанное рассеяние

При распространении оптического излучения через какую-либо среду часть света рассеивается в различных направлениях (рис. 8.1а). В совершенно однородной среде рассеяние возникнуть не может. Пояснить данное утверждение можно с помощью следующего мысленного эксперимента. Пусть в однородной среде распространяется плоская монохроматическая волна (рис. 8.1б). Для каждого направления θ и для каждой точки А найдётся точка Б, которая находится на расстоянии $\lambda/(2\sin\theta)$, так что разность фаз между волнами, рассеянными точками А и Б в направлении θ равна $\pi/2$, то есть, эти волны взаимно уничтожаются. Единственное рассеяние, которое может быть в однородной среде – это рассеяние на угол $\theta = 0$. Рассеяние вперёд можно представить себе как поглощение и переизлучение света. Это переизлучение происходит с некоторым запаздыванием относительно исходной волны, поэтому результат суммирования исходной и переизлучённой волн эквивалентен замедлению света в среде. Таким образом, когерентное рассеяние вперёд – причина появления показателя преломления. Если волна ограничена в пространстве (имеет поперечный размер D), то возможно рассеяние на углы $|\theta| < \lambda/2D$, т.е., на *дифракционный угол*.

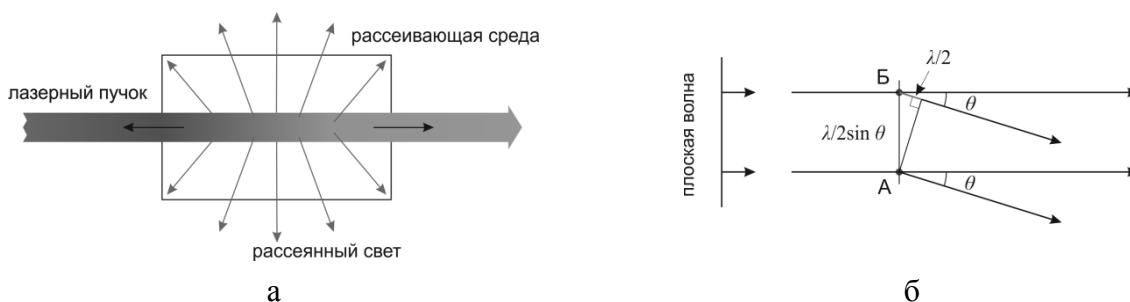


Рисунок 8.1 – Рассеяние света.

Рассеяние происходит на неоднородностях, например, показателя преломления. Угловой и частотный спектр рассеянного излучения зависит от того, какова частота, направление и скорость распространения неоднородности, на которой происходит рассеяние. Типичный спектр спонтанного рассеяния показан на рис. 8.2. Если рассеяние происходит без изменения частоты, оно называется *упругим*, а если частота рассеянного света отличается от исходной частоты, то *неупругим*. Спектральные компоненты рассеяния, частота которых $(\omega_0 - \Omega)$ меньше, чем исходная частота света ω_0 , называются *стоксовыми* компонентами, а компоненты с повышением частоты $(\omega_0 + \Omega)$ – *антискотковыми*.

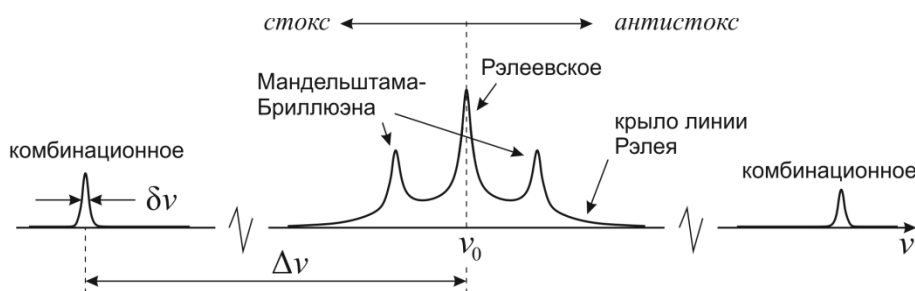


Рисунок 8.2 – Характерный спектр спонтанного рассеяния (не в масштабе).

Один тип неоднородности, присущий любой среде, обусловлен дискретной структурой материи. Рассеяние на отдельном атоме, молекуле, электроне, и т. д. (на любой неоднородности, размер которой много меньше длины волны), называется *Рэлеевским*. Оно квазиупругое, т. е. происходит без изменения частоты. Рэлеевское рассеяние солнечного света в атмосфере Земли – причина того, что небо голубое, а закат – красный (потому что сечение рассеяния пропорционально частоте света в четвёртой степени). Ширина линии Рэлеевского рассеяния определяется эффектом Доплера и зависит от скорости хаотического теплового движения молекул среды.

Рассеяние крыла линии Рэля возникает от флуктуаций ориентации анизотропных молекул. Поскольку процесс переориентации молекул сравнительно быстр, спектральная ширина этого вида рассеяния чрезвычайно велика (см. табл. 8.1). В веществах, молекулы которых не обладают анизотропией поляризуемости, рассеяния крыла линии Рэля не происходит.

Комбинационное (рамановское) рассеяние было открыто в 1928 г. индийским физиком Ч. Раманом, и независимо от него, Л. И. Мандельштамом и Г. С. Ландсбергом. При комбинационном рассеянии световые волны взаимодействуют с колебательными модами молекул среды, т. е. с оптическими фононами. Поскольку оптические фононы имеют высокую частоту, комбинационное рассеяние сопровождается с наиболее значительным сдвигом частоты света (см. табл. 8.1). Спектр колебательных частот у каждого вещества свой, поэтому с помощью комбинационного рассеяния можно идентифицировать вещества и их смеси – на этом основана т. н. рамановская спектроскопия – один из самых распространённых методов физико-химического анализа.

Рассеяние Мандельштама-Бриллюэна было теоретически предсказано Л. И. Мандельштамом в 1918 г., и повторно исследовано Л. Бриллюэном в 1926 г. Это рассеяние на звуковых волнах в среде (акустических фононах).

На рис. 8.3 показана характерная дисперсионная зависимость (то есть, зависимость частоты от волнового вектора $\Omega(q)$) фононов в первой зоне Бриллюэна. При малых q частота акустических фононов (нижняя ветвь) приблизительно линейно зависит от пространственной частоты ($\Omega \sim q$, причём коэффициент пропорциональности равен скорости звука в среде: $\Omega = v_s q$), тогда как частота оптических фононов (верхняя ветвь) практически постоянна ($\Omega \sim const$).

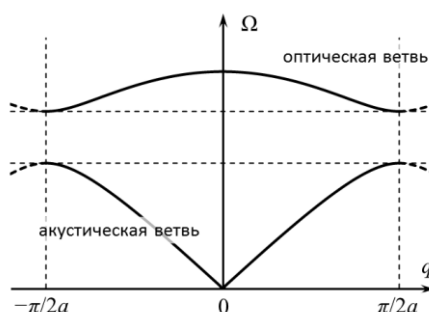


Рисунок 8.3 – Спектр фононов одномерной цепочки атомов двух сортов, с периодом $2a$.

Таблица 8.1 – Характерные параметры различных видов рассеяния.

Вид рассеяния	$\Delta\nu$, см ⁻¹	$\delta\nu$, см ⁻¹	τ , с	g , см/МВт
Комбинационное	10^3	5	10^{-12}	$5 \cdot 10^{-3}$
Мандельштама-Бриллюэна	0,1	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-9}	10^{-2}
Рэлеевское	0	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-8}	10^{-4}
Крыло линии Рэля	0	5	10^{-12}	10^{-3}

Обозначения: $\Delta\nu$ – смещение частоты (ν [см⁻¹] = $1/\lambda$ [см]); $\delta\nu$ – ширина спектра рассеянного излучения; τ – время релаксации; g – коэффициент усиления (для вынужденного рассеяния).

Если интенсивность световой волны достаточно велика, то исходное излучение взаимодействует с рассеянным. В результате их интерференции возникает электромагнитная волна, имеющая ту же частоту, что и колебания среды, вызвавшие рассеяние. Эта волна раскачивает соответствующие флуктуации среды, которые, в свою очередь, усиливают рассеяние, и т. д. Таким образом, рассеяние переходит в нелинейный режим – становится *вынужденным*. Его интенсивность может на много порядков превосходить интенсивность спонтанного рассеяния, но проявляется вынужденное рассеяние только при достаточно большой интенсивности излучения. Каждый тип спонтанного рассеяния имеет вынужденный аналог, но до создания лазеров вынужденные рассеяния не наблюдались, в силу слабости нелазерных источников света. *Вынужденное комбинационное рассеяние* (ВКР) было открыто в 1962 г., *вынужденное рассеяние Мандельштама-Бриллюэна* (ВРМБ) – в 1964 г.

Спонтанное рассеяние Мандельштама-Бриллюэна

Флуктуации диэлектрической проницаемости $\Delta\varepsilon$, на которых происходит спонтанное рассеяние, могут возникать в результате флуктуаций плотности среды $\Delta\rho$:

$$\Delta\varepsilon = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} \Delta\rho. \quad (8.1)$$

Изменение плотности, в свою очередь, определяется флуктуациями давления p и энтропии s :

$$\Delta\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p} \right)_s \Delta p + \left(\frac{\partial\rho}{\partial s} \right)_p \Delta s. \quad (8.2)$$

Флуктуации энтропии приводят к Рэлеевскому рассеянию (без сдвига частоты). Рассеяние же на флуктуациях давления (т. е., на звуковых волнах) – это рассеяние Мандельштама-Бриллюэна. Рассмотрим более подробно последний случай.

Пусть имеется плоская монохроматическая световая волна с частотой ω_0 и волновым вектором \mathbf{k}_0 :

$$E_0(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \left[A_0 e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r})} + A_0^* e^{-i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r})} \right]. \quad (8.3)$$

Звуковая волна с частотой Ω и волновым вектором \mathbf{q} есть волна давления $p(t, \mathbf{r})$ в среде:

$$p(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \left[p_0 e^{i(\Omega t - \mathbf{q}\mathbf{r})} + \text{к.с.} \right]. \quad (8.4)$$

Колебания давления вызывают колебания плотности среды, и, следовательно, колебания диэлектрической проницаемости $\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon(t, \mathbf{r})$:

$$\Delta\varepsilon(t, \mathbf{r}) = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} \right)_T \rho(t, \mathbf{r}) = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial p} \right)_T p(t, \mathbf{r}). \quad (8.5)$$

Рассеянная волна $E(t, \mathbf{r})$ подчиняется волновому уравнению:

$$\Delta E - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (8.6)$$

где P – часть поляризации, связанная с колебаниями плотности среды:

$$P(t, \mathbf{r}) = \frac{\Delta\varepsilon(t, \mathbf{r})}{4\pi} E_0(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial p} \right)_T p(t, \mathbf{r}) E_0(t, \mathbf{r}). \quad (8.7)$$

Подставив выражения (8.7) и (8.3) в уравнение (8.6) получим

$$\Delta E - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial p} \right)_T \frac{1}{4} \left[(\omega_0 - \Omega)^2 A_0 p_0^* e^{i(\omega_0 - \Omega)t - i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{q})\mathbf{r}} + \right. \\ \left. + (\omega_0 + \Omega)^2 A_0 p_0 e^{i(\omega_0 + \Omega)t - i(\mathbf{k}_0 + \mathbf{q})\mathbf{r}} + \text{к.с.} \right]. \quad (8.8)$$

Первое слагаемое в скобках в правой части (8.8) соответствует стоксовой компоненте, а второе – антистоксовой. Так возникает дублет Мандельштама-Бриллюэна – пара спектральных линий вблизи центрального Рэлеевского пика (рис. 8.2). Фактически здесь проявляется эффект Доплера: при отражении света от бегущей звуковой волны происходит смещение частоты.

Таблица 8.2 – Скорость звука в некоторых средах.

Материал	v_s , см/с
Плавленый кварц	$5,97 \cdot 10^5$
Вода	$1,50 \cdot 10^5$
Этанол	$1,21 \cdot 10^5$
CS ₂	$1,15 \cdot 10^5$
CCl ₄	$0,93 \cdot 10^5$
Воздух	$3,31 \cdot 10^4$
He	$9,65 \cdot 10^4$

Частота ω и волновой вектор \mathbf{k} стоксовой волны равны

$$\omega = \omega_0 - \Omega, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_0 - \mathbf{q}. \quad (8.9)$$

Дисперсионное соотношение для световой волны имеет вид $\omega = kc/n$, а для звуковой: $\Omega = v_s q$. Абсолютные значения волновых векторов падающей и рассеянной волн мало отличаются между собой ($k \approx k_0$), поэтому (рис. 8.4)

$$2k_0 \sin \theta/2 = q. \quad (8.10)$$

Следовательно, сдвиг по частоте рассеянной волны зависит от угла рассеяния θ как

$$\Omega = 2n\omega_0 \frac{v_s}{c} \sin \frac{\theta}{2}. \quad (8.11)$$

Максимальный сдвиг по частоте образуется, когда рассеяние происходит назад, то есть, при $\theta = 180^\circ$:

$$\Omega_{\max} = 2n\omega_0 \frac{v_s}{c}. \quad (8.12)$$

При характерных значениях $\omega_0/2\pi = 3 \cdot 10^{14}$ Гц ($\lambda = 1$ мкм), $n = 1,5$, $v_s = 10^5$ см/с, получаем $\Omega_{\max}/2\pi = 3$ ГГц. Волны на таких частотах обычно называют «гиперзвуковыми».

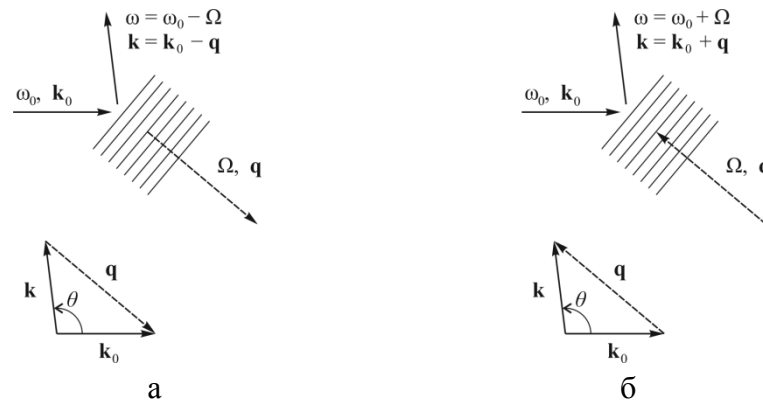


Рисунок 8.4 – Рассеяние Мандельштама-Бриллюэна: возникновение стоксовой (а) и антистоксовой (б) волны.

Звуковые волны в среде подчиняются акустическому волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Gamma \Delta \frac{\partial p}{\partial t} - v_s^2 \Delta p = 0, \quad (8.13)$$

где p – изменение давления, Γ – коэффициент, определяющий затухание волны, Δ – лапласиан, v_s – скорость звука. Подставив в это уравнение волну давления в виде

$$p = \frac{1}{2} [p_0 e^{i(\Omega t - qz)} + \text{к.с.}], \quad (8.14)$$

получим дисперсионное соотношение для звука:

$$q^2 = \frac{\Omega^2}{v_s^2 + i\Gamma\Omega}, \quad (8.15)$$

или

$$q \approx \frac{\Omega}{v_s} + i \frac{\Gamma}{2v_s}. \quad (8.16)$$

Если подставить (8.16) в (8.14), получим, что интенсивность звука, пропорциональная $|p|^2$, экспоненциально падает с расстоянием:

$$|p(z)|^2 = |p(0)|^2 \exp\left(-\frac{\Gamma q^2}{v_s} z\right), \quad (8.17)$$

то есть, величина $\Gamma q^2/v_s$ – это коэффициент поглощения звука.

Используя (8.10) напомним выражение для спектральной ширины линии рассеянного света:

$$\delta\omega = \Gamma q^2 = 4\Gamma k_0^2 \sin^2(\theta/2) = 4n^2\Gamma \frac{\omega_0^2}{c^2} \sin^2(\theta/2). \quad (8.18)$$

Электрострикция

Вынужденное рассеяние возникает в результате обратного действия световой волны на флуктуации среды. В случае ВРМБ это происходит, главным образом, вследствие *электрострикции*: механического сжатия среды под действием электрического поля. Плотность энергии W электрического поля E в среде с проницаемостью ε равна

$$W = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}. \quad (8.19)$$

Следовательно, изменение этой энергии из-за колебаний плотности равно

$$\Delta W = \frac{E^2}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \Delta \rho. \quad (8.20)$$

Давление p в элементе объёма среды V производит работу $p\Delta V/V = -p\Delta\rho/\rho$. Приравняв эту работу величине ΔW , получим выражение для избыточного давления в среде под действием поля E , вызванное электрострикционной деформацией:

$$p = \frac{1}{8\pi} \gamma_e E^2, \quad (8.21)$$

где $\gamma_e = \rho(\partial\varepsilon/\partial\rho)$ – *электрострикционный коэффициент*. Данная формула справедлива для статического поля, а в поле световой волны в ней следует заменить E^2 на $\langle |E|^2 \rangle$, где угловые скобки означают усреднение по времени $\langle \dots \rangle$ периода световой волны. Величину γ_e можно оценить по формуле $\gamma_e = (n^2 - 1)(n^2 + 2)/3$, т. е. электрострикционный коэффициент конденсированных сред имеет величину порядка единицы.

Для сфокусированного солнечного луча ($E \sim 10^5$ В/см) избыточное давление достигает примерно 10^{-3} кг/см², в то время как в сфокусированном лазерном луче ($E \sim 10^8 - 10^9$ В/см) $p \sim 10^5$ кг/см². Видно, что лазерное излучение может вызвать гигантские импульсы давления в среде¹, так что электрострикция, не играющая роли в обычных условиях, здесь становится определяющим явлением.

¹ Это – один из механизмов разрушения оптических элементов под воздействием лазерного излучения.

ВРМБ-усиление

Рассмотрим ВРМБ-усилитель (рис. 8.5а): пусть в среде распространяются в противоположных направлениях две плоские световые волны: накачка $E_1(t, z)$ и усиливаемая волна $E_2(t, z)$:

$$E_1(t, z) = \frac{1}{2} \left[A_1 e^{i(\omega_1 t - k_1 z)} + \text{к.с.} \right], \quad E_2(t, z) = \frac{1}{2} \left[A_2 e^{i(\omega_2 t + k_2 z)} + \text{к.с.} \right], \quad (8.22)$$

причём $\omega_1 - \omega_2 = \Omega$, $k_1 + k_2 = q$. Если частота волны E_2 попадает в полосу усиления ВРМБ, то есть, если $|\Omega - \Omega_B| < \delta\omega = \Gamma q^2$ (где $\Omega_B = v_s q$ – собственная частота акустического фоновна с волновым вектором q), то волна E_2 будет усиливаться.

Усреднённый по времени квадрат их суперпозиции будет иметь слагаемое на частоте Ω :

$$\langle |E_1 + E_2|^2 \rangle_\Omega = \frac{1}{2} \left[A_1 A_2^* e^{i(\Omega t - qz)} + \text{к.с.} \right]. \quad (8.23)$$

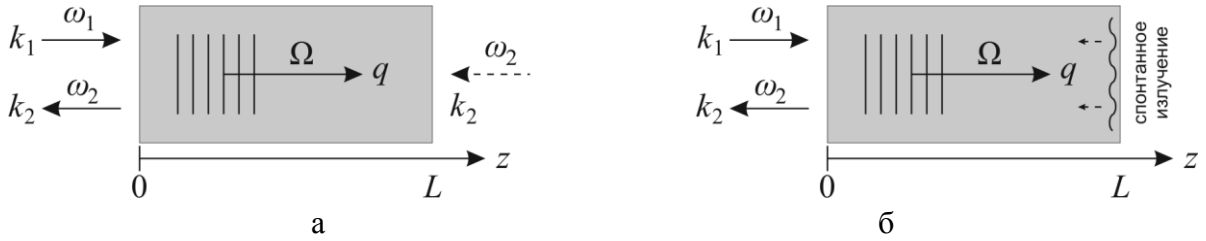


Рисунок 8.5 – ВРМБ-усилитель (а); ВРМБ-генератор (б).

Следовательно, волна электрострикционного давления на той же частоте имеет вид

$$p = -\frac{\gamma_e}{16\pi} \left[A_1 A_2^* e^{i(\Omega t - qz)} + \text{к.с.} \right]. \quad (8.24)$$

Плотность среды $\rho(t, z)$ подчиняется акустическому волновому уравнению, аналогичному (8.13), но с вынуждающей силой \mathbf{f} :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \Gamma \Delta \frac{\partial \rho}{\partial t} - v_s^2 \Delta \rho = \nabla \mathbf{f}, \quad (8.25)$$

где $\mathbf{f} = \nabla p$. То есть,

$$\nabla \mathbf{f} = \Delta p = \frac{\gamma_e q^2}{16\pi} \left[A_1 A_2^* e^{i(\Omega t - qz)} + \text{к.с.} \right]. \quad (8.26)$$

Запишем возникающую акустическую волну плотности в виде плоской волны:

$$\rho(t, z) = \rho_0 + \frac{1}{2} \left[\delta\rho(t, z) e^{i(\Omega t - qz)} + \text{к.с.} \right], \quad (8.27)$$

где ρ_0 – средняя плотность, $\delta\rho$ – амплитуда возмущения плотности. Подставив (8.27) в (8.25), и пренебрегая всеми производными больше первого порядка (т. е. в приближении медленно меняющихся амплитуд), получим выражение

$$2i\Omega \frac{\partial}{\partial t} \delta\rho + (\Omega_B^2 - \Omega^2 + iq^2 \Gamma \Omega) \delta\rho + 2iqv_s^2 \frac{\partial}{\partial z} \delta\rho = \frac{\gamma_e q^2 A_1 A_2^*}{8\pi}. \quad (8.28)$$

Последним слагаемым в левой части уравнения (8.28) как правило можно пренебречь, поскольку он связан с распространением фононов, а гиперзвуковые фононы быстро затухают. В стационарных условиях производная по времени обращается в ноль, и в этом случае легко записать выражение для амплитуды колебаний плотности:

$$\delta\rho = \frac{\gamma_e q^2}{8\pi} \frac{A_1 A_2^*}{\Omega_B^2 - \Omega^2 + iq^2 \Gamma \Omega}. \quad (8.29)$$

Подставим это выражение в волновое уравнение (8.6), учитывая, что поляризация в этом случае равна $P = (\Delta\varepsilon/4\pi) \cdot E$, $\Delta\varepsilon = (\partial\varepsilon/\partial\rho) \cdot \delta\rho = (\gamma_e/\rho) \cdot \delta\rho$, E – суперпозиция полей (8.22). Поляризация будет иметь компоненты на частотах ω_1 и ω_2 :

$$P = \frac{1}{2} \left[P_1 e^{i(\omega_1 t - k_1 z)} + P_2 e^{i(\omega_2 t + k_2 z)} + \text{к.с.} \right], \quad \text{где } P_1 = \frac{\gamma_e}{8\pi\rho_0} \delta\rho A_2, \quad P_2 = \frac{\gamma_e}{8\pi\rho_0} \delta\rho^* A_1. \quad (8.30)$$

Подставляя (8.30) и (8.22) в (8.6), и, как всегда, отбрасывая производные амплитуд второго порядка, получим уравнения на A_1 и A_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{n}{c} \frac{\partial A_1}{\partial t} &= -\frac{i\omega\gamma_e}{4\pi n c \rho_0} \delta\rho A_2, \\ -\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{n}{c} \frac{\partial A_2}{\partial t} &= -\frac{i\omega\gamma_e}{4\pi n c \rho_0} \delta\rho^* A_1, \end{aligned} \quad (8.31)$$

где мы пренебрегаем отличием частоты ω_1 от ω_2 ($\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega$), а также отличием показателя преломления этих волн. В стационарном процессе производных по времени нет, и эти уравнения сводятся к

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dz} &= \frac{-i\omega\gamma_e^2 q^2 |A_2|^2}{32\pi n c \rho_0 (\Omega_B^2 - \Omega^2 - iq^2 \Gamma \Omega)} A_1, \\ \frac{dA_2}{dz} &= \frac{i\omega\gamma_e^2 q^2 |A_1|^2}{32\pi n c \rho_0 (\Omega_B^2 - \Omega^2 + iq^2 \Gamma \Omega)} A_2. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Далее, от амплитуд перейдём к интенсивностям: $I = (nc/8\pi)|A|^2$

$$\begin{aligned} \frac{dI_1}{dz} &= -\frac{\omega\gamma_e^2 q^4 \Gamma \Omega}{2n^2 c^2 \rho_0 \left[(\Omega_B^2 - \Omega^2)^2 + q^4 \Gamma^2 \Omega^2 \right]} I_1 I_2, \\ \frac{dI_2}{dz} &= -\frac{\omega\gamma_e^2 q^4 \Gamma \Omega}{2n^2 c^2 \rho_0 \left[(\Omega_B^2 - \Omega^2)^2 + q^4 \Gamma^2 \Omega^2 \right]} I_1 I_2, \end{aligned} \quad (8.33)$$

или, в более краткой форме,

$$\frac{dI_1}{dz} = -g I_1 I_2, \quad \frac{dI_2}{dz} = -g I_1 I_2 \quad (8.34)$$

где g – коэффициент усиления:

$$g = g_0 \frac{(\Gamma_B/2)^2}{(\Omega_B - \Omega)^2 + (\Gamma_B/2)^2}, \quad g_0 = \frac{\omega^2 \gamma_e^2}{n v_s c^3 \rho_0 \Gamma_B}, \quad (8.35)$$

где $\Gamma_B = q^2\Gamma$ – величина, обратная времени жизни фонона τ_B . При выводе формулы (8.35) сделано предположение, что $\Omega_B \approx \Omega$.

При постоянной интенсивности накачки ($I_1 = \text{const}$) второе из уравнений (8.34) имеет решение

$$I_2(z) = I_2(L)e^{gI_1(L-z)}, \quad (8.36)$$

то есть, стоксова волна экспоненциально усиливается. Оценим характерное значение резонансного коэффициента усиления g_0 для, например, сероуглерода CS_2 . При $\lambda = 1$ мкм, $n = 1,67$, $v_s = 1,1 \cdot 10^5$ см/с, $\rho_0 = 1,26$ г/см³, $\gamma_e = 2,4$, $\tau_B = 1/\Gamma_B = 4 \cdot 10^{-9}$ с, получаем $g_0 = 1,5 \cdot 10^{-14}$ см·с/эрг, или 0,15 см/МВт.

Усиление антистоксовой волны рассматривается с помощью тех же уравнений, только надо положить E_2 волной накачки, а E_1 – антистоксовой волной.

Рассмотрим теперь усиление стоксовой волны при ВРМБ с учётом истощения накачки. Из уравнений (8.34) следует, что $dI_1/dz = dI_2/dz$ (это закон сохранения энергии, поскольку мы пренебрегаем поглощением в среде). Следовательно,

$$I_1(z) = I_2(z) + C. \quad (8.37)$$

Подставив это соотношение во второе из уравнений (8.34), получим дифференциальное уравнение на I_2 :

$$\frac{dI_2}{I_2(I_2 + C)} = -g dz. \quad (8.38)$$

Проинтегрировав это выражение, получим

$$\ln \left\{ \frac{I_2(z)[I_2(0) + C]}{I_2(0)[I_2(z) + C]} \right\} = -Cgz \quad (8.39)$$

Постоянную C можно выразить через разность интенсивностей на левом краю среды: $C = I_1(0) - I_2(0)$, поэтому окончательно уравнение на $I_2(z)$ записывается в виде

$$I_2(z) = \frac{I_2(0)[I_1(0) - I_2(0)]}{I_1(0) \exp\{gz[I_1(0) - I_2(0)]\} - I_2(0)}. \quad (8.40)$$

Зная интенсивность рассеянного излучения $I_2(z)$, интенсивность накачки можно найти из соотношения $I_1(z) = I_2(z) + I_1(0) - I_2(0)$. Обычно известны граничные значения $I_1(0)$ и $I_2(L)$, а требуется найти $I_2(0)$, поэтому следует решать уравнение (8.40) как неявное относительно $I_2(0)$. На рисунке 8.6 показаны решения при различных значениях входного сигнала. Видно, что даже если входная интенсивность усиливаемой стоксовой волны на правой границе среды ничтожно мала по сравнению с интенсивностью накачки, при достаточно большом коэффициенте усиления возможно практически полное перераспределение энергии от накачки в стоксово излучение.

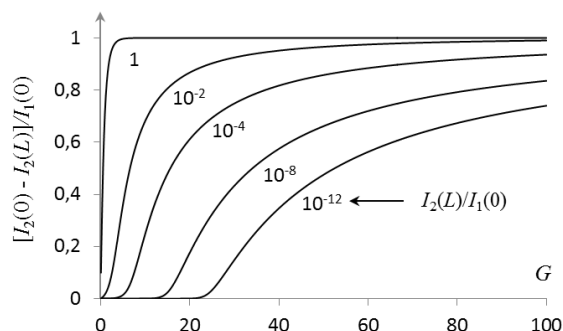


Рисунок 8.6 – Зависимость выходной интенсивности стоксовой волны при ВРМБ от коэффициента усиления $G = gI_1(0)L$ при различных значениях входного сигнала.

Параметры процесса ВРМБ в ряде газов, жидкостей, и твёрдых тел представлены в таблице 8.3. Для того, чтобы рассчитать значения для другой частоты накачки, следует вспомнить, что $\Omega_B \sim q$, $\Gamma_B \sim q^2$, то есть, $\Omega_B \sim \omega$, $\Gamma_B \sim \omega^2$, а g_0 не зависит от частоты.

Таблица 8.3 – ВРМБ в некоторых средах (при $\lambda = 0,694$ мкм) [10, 11].

Материал	$\Omega_B/2\pi$, ГГц	$\Gamma_B/2\pi$, МГц	g_0 , см/ГВт
Плавленый кварц	25,8	78	4,5
Вода	5,69	317	4,8
CS ₂	5,85	52,3	150
CCl ₄	4,39	520	6
CH ₄ (10 атм.)	1,32	247	8
Xe (10 атм.)	0,5	58	1,4

ВРМБ-генерация

Рассмотрим теперь ситуацию, когда стоксова волна E_2 не подаётся в нелинейную среду извне, а возникает из спонтанного рассеяния самой волны накачки, дошедшей до границы среды $z = L$, как на рисунке 8.5б. Из всего спектра спонтанного излучения усиливается стоксова частота, соответствующая максимальному ВРМБ-усилению: $\omega_2 = \omega_1 - \Omega$, где $\Omega = 2\omega_1 n v_s / c$. Такая система представляет собой уже не усилитель, а ВРМБ-генератор.

Интенсивность спонтанного рассеяния составляет (по порядку величины) $10^{-11} \dots 10^{-13}$ от интенсивности накачки, то есть, $I_2(L) = (10^{-11} \dots 10^{-13}) \times I_1(L)$. Следовательно, для того, чтобы усиленный ВРМБ-сигнал при $z = 0$ составлял заметную долю от накачки, требуется усиление $G = gI_1(0)L$ такое, чтобы $e^G \approx 10^{11} \dots 10^{13}$, то есть пороговое усиление должно быть $G_{th} \approx 25 \dots 30$.

ВРМБ-генератор – это своего рода «нелинейное зеркало», то есть, можно ввести величину – коэффициент отражения – равную отношению выходной интенсивности $I_2(0)$ стоксовой волны к падающей интенсивности $I_1(0)$ накачки: $R = I_2(0)/I_1(0)$. Тогда уравнение (8.40) можно переписать в виде

$$\frac{I_2(L)}{I_1(0)} = \frac{R(1-R)}{\exp[G(1-R)] - R}. \quad (8.41)$$

Слагаемым $-R$ в знаменателе правой части (8.41) можно пренебречь. $I_1(L)$ связано с $I_1(0)$ соотношением $I_1(L) = (1-R)I_1(0)$, и уравнение (8.41) можно привести к виду

$$\frac{I_2(L)}{I_1(L)} = \frac{R}{\exp[G(1-R)]} \quad (8.42)$$

$I_2(L)$ можно выразить через $I_1(L)$ по формуле $\exp(-G_{th}) = I_2(L)/I_1(L)$, и из (8.42) получим неявное уравнение на коэффициент отражения R в зависимости от коэффициента усиления G и порогового коэффициента усиления G_{th} :

$$G(1-R) - G_{th} - \ln R = 0. \quad (8.43)$$

Решение $R(G)$ этого уравнения (при $G_{th} = 25$) показано на рис. 8.7 а. Несмотря на то, что вынужденное рассеяние по сути своей – беспороговый эффект, то есть, происходит при любой интенсивности накачки, в реальности интенсивность рассеянного излучения при $G < G_{th}$ ничтожно мала. Если же усиление существенно превышает пороговый уровень (например, при $G > 3G_{th}$), зависимость $R(G)$ можно аппроксимировать функцией $R = 1 - G_{th}/G$, то есть, при достаточно высокой интенсивности накачки практически вся её энергия может перейти в стоксово излучение.

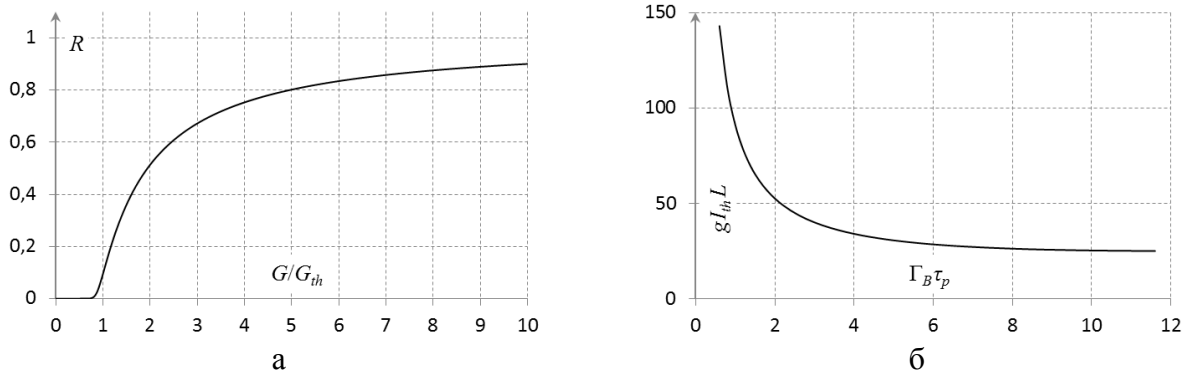


Рисунок 8.7 – Зависимость коэффициента отражения ВРМБ-генератора от коэффициента усиления $G = gI_1(0)L$, при $G_{th} = 25$ (а), зависимость пороговой интенсивности от длительности импульса (б).

Для того, чтобы повысить выходную мощность ВРМБ-генератора, следует увеличить интенсивность накачки (например, сфокусировав лазерный пучок в ВРМБ-активное вещество), или увеличив длину взаимодействия (направив, например, излучение накачки в оптический волновод).

Оценим минимальную мощность P_{th} лазера, необходимую для возбуждения ВРМБ при фокусировке пучка. Пусть гауссов пучок мощностью P фокусируется в ВРМБ-среде, и имеет размер в перетяжке w_0 . Характерная интенсивность на оси в перетяжке равна

$I = P/\pi w_0^2$, а длина перетяжки – $L = 2\pi w_0^2/\lambda$. Коэффициент усиления $G = gIL = 2gP/\lambda$, т. е.,

$$P_{th} = \frac{\lambda G_{th}}{2g}. \quad (8.44)$$

Например, для лазера с длиной волны 1,06 мкм, фокусирующегося в сероуглерод (CS₂, $g = 0,15$ см/МВт) при $G_{th} = 25$ имеем $P_{th} \approx 9$ кВт. В других средах коэффициент усиления существенно меньше, поэтому пороговая мощность, как минимум, на порядок больше.

Вынужденное рассеяние Мандельштама-Бриллюэна – взаимодействие световой и звуковой волн – довольно инерционный процесс, поскольку в звуковой волне происходит колебание атомов, масса которых много больше массы электронов. Характерное время отклика ВРМБ для различных сред составляет $\tau_B \sim 10^{-9} \dots 10^{-7}$ с (то есть, в наносекундном диапазоне). Это время определяется коэффициентом затухания звуковой волны Γ , частотой излучения накачки ω_0 и углом рассеяния θ :

$$\tau_B \approx \frac{1}{\Gamma_B} = \frac{1}{q^2 \Gamma} = \left(\frac{c}{2n\omega_0 \sin \theta/2} \right)^2 \frac{1}{\Gamma}. \quad (8.45)$$

Если длительность лазерного импульса $\tau_p < 30\tau_B$, то вынужденное рассеяние происходит в нестационарном (переходном) режиме. Это проявляется, прежде всего, в увеличении пороговой интенсивности. На рис. 8.7 б показана зависимость пороговой интенсивности $I_{th} = G_{th}/gL$ от соотношения длительности лазерного импульса и времени установления звуковых колебаний $\Gamma_B \tau_p \approx \tau_p/\tau_B$. Поскольку типичные лазерные импульсы имеют длительности в наносекундном (при модуляции добротности) или пикосекундном (при синхронизации мод) диапазоне, то процесс ВРМБ, как правило, происходит именно в нестационарном режиме.

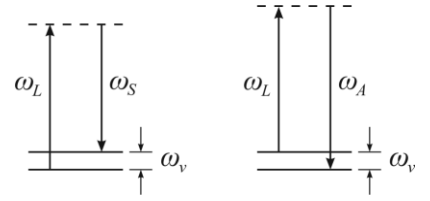
При малых углах рассеяния θ (рассеяние вперёд) время $\tau_B \sim \theta^{-2}$ становится очень большим. Этим объясняется отсутствие вынужденного рассеяния в попутном направлении. В общем случае ВРМБ зависит от нескольких характерных временных масштабов, таких как время прохождения излучения накачки через область взаимодействия, время жизни фонона, длительность импульса накачки, величина, обратная ширине спектра накачки. Этим определяется богатство динамических эффектов при ВРМБ. Один из таких эффектов – укорочение импульса стоксового излучения по сравнению с длительностью импульса накачки.

Таким образом, для процесса ВРМБ характерна избирательность:

- по частоте излучения (усиливаются только частоты, попадающие в спектральный диапазон $(\omega_0 - \Omega) \pm \delta\omega$);
- по направлению рассеяния (оно происходит, главным образом, в обратном направлении);
- по поляризации (потому что интерференционная световая волна, раскачивающая акустические колебания, может возникнуть только если излучения накачки и рассеянной волны имеют одинаковую поляризацию);
- по длительности импульса.

Вынужденное комбинационное рассеяние

Комбинационное (рамановское) рассеяние возникает в результате взаимодействия световой волны с собственными колебаниями атомов среды. Спонтанное рассеяние можно представить в виде поглощения молекулой вещества фотона с частотой ω_L , перехода её на виртуальный уровень, а затем перехода на уровень, соответствующий энергии $\hbar\omega_v$ какой-либо колебательной моды с собственной частотой ω_v . При этом излучается фотон на стоксовой частоте $\omega_S = \omega_L - \omega_v$. Антистоксово рассеяние – это поглощение света и переизлучение в основное состояние молекулой, которая была изначально в колебательно-возбуждённом состоянии. Соответственно, частота антистоксова рассеяния равна $\omega_A = \omega_L + \omega_v$. Интенсивность антистоксовой компоненты спонтанного рассеяния отличается от интенсивности стоксовой, поскольку заселённость уровня с энергией $\hbar\omega_v$ меньше заселённости основного состояния в $\exp(-\hbar\omega_v/kT)$ раз (больцмановский фактор). Типичные значения рамановского сдвига по частоте (см. таблицу 8.4) много больше комнатной температуры, поэтому интенсивность антистоксового рассеяния на много порядков меньше, чем стоксового.



Вынужденное комбинационное рассеяние отличается от спонтанного тем, что при нём излучение накачки взаимодействует со стоксовым излучением, порождая интерференционную волну, частота которой равна частоте собственных колебаний молекул среды. Тем самым интерференционная волна резонансно усиливает эти колебания, что увеличивает рассеяние, и т. д. Если интенсивность спонтанного рамановского рассеяния весьма мала (сечение рассеяния на единицу объёма составляет порядка 10^{-6} см^{-1} , то есть, на расстоянии 1 см только 10^{-6} от исходного излучения перейдёт в стоксовую компоненту), то при ВКР в рассеянное излучение может перейти большая часть накачки. Спонтанное комбинационное рассеяние происходит во всех направлениях, тогда как при вынужденном рассеянии стоксово излучение направлено в узком телесном угле в прямом и обратном направлении вдоль оси пучка накачки.

В отличие от ВРМБ, сдвиг по частоте и ширина линии комбинационного рассеяния не зависят от частоты излучения накачки, а являются характеристиками рассеивающей среды ($\omega_v \approx \text{const}$, см. различие между спектрами акустических и оптических фононов на рис. 8.3).

Рассмотрим комбинационное рассеяние в приближении классического нелинейного осциллятора (как в главе 2). Дипольный момент \mathbf{p} молекулы рассеивающего вещества зависит от напряжённости электрического поля \mathbf{E} как

$$\mathbf{p}(t) = \alpha \mathbf{E}(t), \quad (8.46)$$

где α – поляризуемость молекулы. Допустим, что поляризуемость зависит от смещения x заряда:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_0 x(t), \quad (8.47)$$

где α_0 – линейная поляризуемость (рис. 8.8).

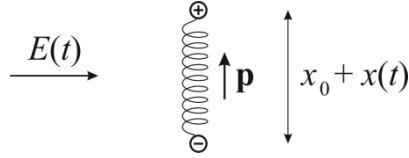


Рисунок 8.8 – Диполь, осциллирующий под действием переменного электрического поля.

Показатель преломления, связанный с ансамблем когерентно колеблющихся молекул, равен

$$n(t) = \sqrt{\varepsilon(t)} = \sqrt{1 + 4\pi N\alpha(t)}, \quad (8.48)$$

где N – количество молекул в единице объёма среды. Энергия взаимодействия диполя с электрическим полем равна

$$W = \frac{1}{2} \langle \mathbf{p}(t, z) \cdot \mathbf{E}(t, z) \rangle = \frac{1}{2} \alpha \langle E^2(t, z) \rangle, \quad (8.49)$$

где усреднение производится по времени равному периоду колебаний поля. Сила, действующая со стороны электрического поля на диполь равна производной энергии взаимодействия по координате x :

$$F = \frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_0 \langle E^2(t, z) \rangle. \quad (8.50)$$

Например, если поле состоит из двух частотных компонент, то молекула будет подвергаться воздействию на частоте биений между этими компонентами.

Уравнение движения осциллятора массой m с коэффициентом затухания γ под действием вынуждающей силы F :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_v^2 x = \frac{F(t)}{m}, \quad (8.51)$$

где ω_v – собственная частота осциллятора. Представим поле в виде суперпозиции двух частотных компонент: лазерного излучения с частотой ω_L и стоксовой волны с частотой ω_S :

$$E(t, z) = \frac{1}{2} \left[A_L e^{i(\omega_L t - k_L z)} + A_S e^{i(\omega_S t - k_S z)} + \text{к.с.} \right]. \quad (8.52)$$

Сила, действующая на диполь на разностной частоте $\Omega = \omega_L - \omega_S$ равна

$$F(t, z) = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_0 \left[A_L A_S^* e^{i(\Omega t - Kz)} + \text{к.с.} \right], \quad (8.53)$$

где $K = k_L - k_S$. Подставим в уравнение (8.51) пробное решение $q(t)$ в виде

$$x(t) = \frac{1}{2} x(\Omega) e^{i(\Omega t - Kz)} + \text{к.с.} \quad (8.54)$$

Тогда получим уравнение на амплитуду колебаний $x(\Omega)$:

$$(\omega_v^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega)x = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_0 A_L A_S^*, \quad (8.55)$$

то есть,

$$x(\Omega) = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_0 A_L A_S^* \frac{1}{\omega_v^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega}. \quad (8.56)$$

Поляризация среды равна произведению плотности N молекул на дипольный момент p каждой из них:

$$P(t, z) = Np(t, z) = N\alpha(t, z)E(t, z) = N \left[\alpha_0 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_0 x(t, z) \right] E(t, z). \quad (8.57)$$

Нелинейная часть поляризации

$$P^{NL}(t, z) = \frac{N}{4} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_0 \left[x(\Omega) e^{i(\Omega t - Kz)} + \text{к.с.} \right] \cdot \left[A_L e^{i(\omega_L t - k_L z)} + A_S e^{i(\omega_S t - k_S z)} + \text{к.с.} \right] \quad (8.58)$$

имеет составляющую на стоксовой частоте ω_S :

$$P^{NL}(t, z) = \frac{1}{2} P(\omega_S) e^{i(\omega_S t - k_S z)} + \text{к.с.}, \quad (8.59)$$

$$\text{где } P(\omega_S) = \frac{1}{2} N \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_0 x^*(\Omega) A_L = \frac{N}{4m} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_0^2 \frac{|A_L|^2 A_S}{\omega_v^2 - \Omega^2 - 2i\gamma\Omega}.$$

Амплитуда поляризации связана с полем через восприимчивость третьего порядка χ_R :

$$P(\omega_S) = \frac{3}{2} \chi_R(\omega_S) |A_L|^2 A_S, \quad (8.60)$$

то есть, восприимчивость в комбинационном процессе равна

$$\chi_R(\omega_S) = \frac{N}{6m} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_0^2 \left[\omega_v^2 - (\omega_L - \omega_S)^2 - 2i\gamma(\omega_L - \omega_S) \right]^{-1}. \quad (8.61)$$

Частотная зависимость действительной и мнимой частей нелинейной восприимчивости $\chi_R = \chi_R' + i\chi_R''$ показаны на рис. 8.9 а.

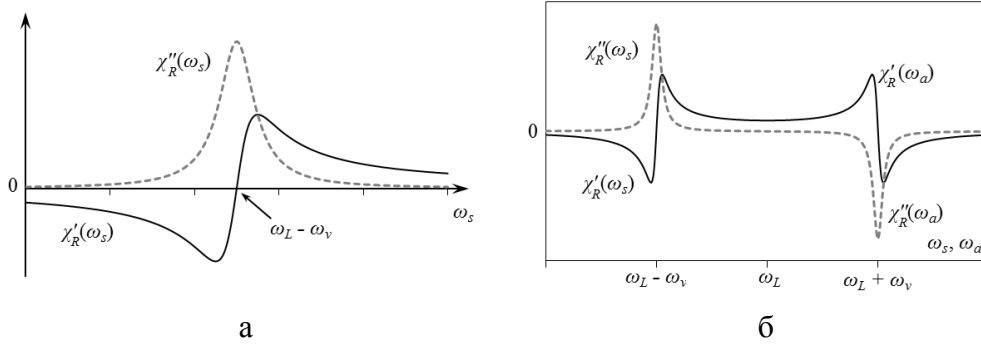


Рисунок 8.9 – Зависимость действительной и мнимой частей рамановской восприимчивости от частоты для стоксовой (а) и стоксовой-антистоксовой (б) компонент.

Амплитуда стоксовой волны подчиняется волновому уравнению (1.26):

$$-\Delta E + \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P^{\text{NL}}}{\partial t^2}. \quad (8.62)$$

Подставив в него выражения поля и поляризации (8.52) и (8.60), в приближении медленно меняющейся амплитуды (то есть, как всегда, пренебрегая второй производной A_S по координате z), получим уравнение

$$\frac{dA_S}{dz} = -3\pi i \frac{\omega_s}{n_s c} \chi_R(\omega_s) |A_L|^2 A_S. \quad (8.63)$$

Поскольку мнимая часть восприимчивости положительна, то стоксова волна экспоненциально усиливается. Усиление рассеянного излучения не зависит от его фазы (т. е., от k_s), то есть, при ВКР условие фазового синхронизма выполняется автоматически. Причина этого – в том, что частота оптических фононов, на которых происходит рассеяние, практически не зависит от их волнового вектора.

Аналогично можно вывести уравнение для амплитуды антистоксовой волны $A_a(z)$. Формально можно просто заменить в выражении для восприимчивости ω_s на ω_a :

$$\chi_R(\omega_a) = \frac{N}{6m} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q} \right)_0^2 \left[\omega_v^2 - (\omega_L - \omega_a)^2 - 2i\gamma(\omega_L - \omega_a) \right]^{-1}, \quad (8.64)$$

а уравнение (8.63) сохранит свой вид:

$$\frac{dA_a}{dz} = -3\pi i \frac{\omega_a}{n_a c} \chi_R(\omega_a) |A_L|^2 A_a. \quad (8.65)$$

При этом, поскольку $\omega_a > \omega_L$, мнимая часть восприимчивости $\chi_R(\omega_a)$ отрицательна, то есть, антистоксова волна экспоненциально затухает. Поэтому, в большинстве случаев, антистоксово излучение примерно на порядок слабее, чем стоксово. Однако, при определённых условиях, генерация антистоксова излучения возможна (при так называемом четырёхволновом взаимодействии стоксовой и антистоксовой компонент, см., например, [10]).

Для того, чтобы учитывать истощение волны накачки при генерации или усилении стоксова излучения, следует дополнить уравнение (8.63) уравнением на A_L :

$$\frac{dA_L}{dz} = -3\pi i \frac{\omega_L}{n_L c} \chi_R(\omega_L) |A_S|^2 A_L, \quad \text{где } \chi_R(\omega_L) = \chi_R^*(\omega_S), \quad (8.66)$$

которое выводится аналогично. Перейдя от амплитуд к интенсивностям, по формуле $dI/dz = nc/8\pi(A^* \cdot dA/dz + A \cdot dA^*/dz)$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dI_S}{dz} &= \frac{48\pi^2 \omega_S}{n_L n_S c^2} \text{Im } \chi_R(\omega_S) I_L I_S, \\ \frac{dI_L}{dz} &= \frac{48\pi^2 \omega_L}{n_L n_S c^2} \text{Im } \chi_R(\omega_L) I_L I_S, \end{aligned} \quad (8.67)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{dI_S}{dz} &= g_S I_L I_S, \quad \text{где } g_S = \frac{48\pi^2 \omega_S}{n_L n_S c^2} \text{Im } \chi_R(\omega_S) \\ \frac{dI_L}{dz} &= -\frac{\omega_L}{\omega_S} g_S I_L I_S. \end{aligned} \quad (8.68)$$

Из этих уравнений, в частности, следует сохранение числа фотонов:

$$\frac{1}{\omega_S} \frac{dI_S}{dz} + \frac{1}{\omega_L} \frac{dI_L}{dz} = 0. \quad (8.69)$$

Мы видим, что уравнения (8.68), описывающие изменение интенсивности накачки и рассеянного излучения при ВКР очень похожи на уравнения (8.34) для ВРМБ. Разница в знаке dI_1/dz обусловлена тем, что при ВРМБ мы рассматривали рассеянное излучение, распространяющееся в отрицательном направлении, а в ВКР – в положительном. Поэтому анализ решений этой системы может быть практически без изменений перенесён на случай комбинационного рассеяния. Совершенно аналогично вводится понятие пороговой интенсивности накачки: $g_S I_{L(th)} L \approx 25$. Различие между ВРМБ и ВКР с формальной точки зрения – в том, как зависит коэффициент усиления от частоты накачки и частоты и направления рассеянного излучения.

В табл. 8.4 приведены коэффициенты усиления стоксова излучения различных комбинационно активных сред.

Таблица 8.4 – Свойства комбинационного рассеяния некоторых материалов [10].

Материал	$\Delta\nu$, см ⁻¹	$\delta\nu$, см ⁻¹	g_s , см/ГВт
SiO ₂	467		0,8
Ba ₂ NaNb ₅ O ₁₅	650		6,7
жидкий O ₂	1552	0,117	14,5 ± 4
жидкий N ₂	2326,5	0,067	16 ± 5
бензол	992	2,15	2,8
CS ₂	655,6	0,50	24
толуол	1003	1,94	1,2
CH ₄ (10 атм.)*	2916		0,66
N ₂ (10 атм.)*	2326		0,071
O ₂ (10 атм.)*	1555		0,016

Обозначения: $\Delta\nu$ – смещение рассеянного излучения по частоте, $\delta\nu$ – ширина спектра рассеянного излучения, g_s – коэффициент усиления стоксового излучения. Все величины измерены при длине волны накачки 694 нм (кроме обозначенных * - они при $\lambda_L = 500$ нм)

Вынужденное рассеяние в лазерной технике

Часто вынужденное рассеяние бывает нежелательным явлением, которое приводит к нелинейным потерям излучения и ограничивает эффективность мощных лазеров. Например, в лазерах на неодимовом стекле может развиваться как ВРМБ, так и ВКР [6]. В стационарном случае, при длительности импульсов более 20 нс, погонный инкремент усиления ВРМБ выше, и оно будет доминировать над ВКР. Сделаем оценку плотностей энергии, при которых может проявляться ВРМБ в усилителе на неодимовом стекле. Пусть усиление лазерного излучения происходит в линейном режиме, т. е. по закону $I(z) = I_0 \exp(\alpha z)$, где α – коэффициент лазерного усиления. Полный инкремент ВРМБ равен

$$G_{SBS} = \int_0^L gI(z) dz = \frac{gI_0}{\alpha} (e^{\alpha L} - 1) = \frac{gI_{out}}{\alpha} (1 - e^{-\alpha L}), \quad (8.70)$$

где $I_{out} = I_0 \exp(\alpha L)$ – интенсивность на выходе усилителя длиной L . Приравняв инкремент пороговому значению $G_{th} = 25$, получим оценку пороговой выходной плотности энергии $Q_{th}(L) = I_0 \tau_p$:

$$Q_{th}(L) \approx \frac{25\alpha\tau_p}{g(1 - e^{-\alpha L})}. \quad (8.71)$$

При $\tau_p = 20$ нс и типичных параметрах лазерных усилителей $\alpha = 0,035$ см⁻¹, $L = 60$ см, $g = 10^{-3}$ см/МВт, получаем $Q_{th} = 20$ Дж/см². Методы подавления ВРМБ – уменьшение длины активной среды, увеличение коэффициента усиления, разнесение фрагментов усиливающей среды на расстояние $L > c\tau_p/2n$, увеличение ширины спектра усиливаемого излучения.

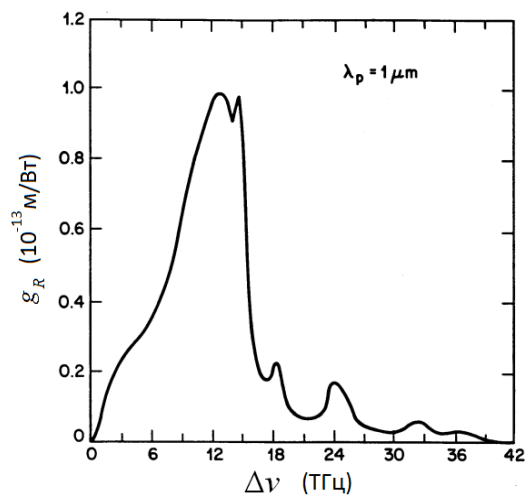
ВКР и ВРМБ проявляются не только в мощных импульсных лазерных установках, но и, например, в промышленных непрерывных волоконных лазерах. Оно ограничивает максимальную длину таких лазеров.

На основе вынужденного рассеяния Мандельштама-Бриллюэна действует один из способов обращения волнового фронта (см. главу 9).

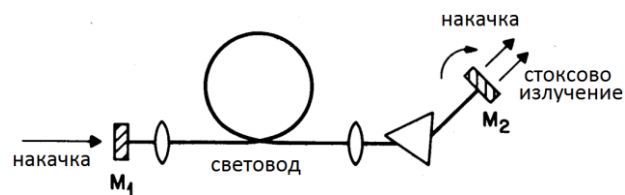
Вынужденное рассеяние, как и любой процесс вынужденного излучения, можно использовать для когерентного усиления света, или лазерной генерации, если соответствующий усилитель поместить в резонатор. В волоконно-оптической технике получили распространение ВКР- и ВРМБ-лазеры и усилители. Так, ВРМБ-усилитель можно использовать для узкополосного селективного усиления спектральных компонент сигнала в оптоволоконных линиях связи со спектральным уплотнением каналов [12]. Если разность частот соседних каналов больше, а скорость передачи меньше, чем ширина полосы усиления $\Delta\nu_B$, то, перестраивая лазер накачки, можно избирательно усиливать данный канал.

Ещё одно возможное применение ВРМБ – волоконные датчики. Согласно формуле (8.12), сдвиг частоты зависит от показателя преломления, который зависит от условий среды, таких как температура или натяжение волокна. Отслеживая изменения бриллюэновского смещения по частоте вдоль волокна можно контролировать распределение температуры или натяжения на достаточно большом расстоянии, на котором отношение сигнала ВРМБ к шуму достаточно велико. Был создан волоконный датчик, позволяющий регистрировать изменения температуры с точностью 1°C и с пространственным разрешением 5 м на длине волокна 32 м.

ВКР, как и спонтанное комбинационное рассеяние, широко используется в спектроскопии. Ещё одно применение – изменение частоты лазерного излучения (генерация стоксовой волны на большей длине волны), с возможностью перестроения частоты в пределах полосы усиления. Специфическое применение ВКР – «очистка» излучения от фазовых искажений. Поскольку усиление стоксового излучения не зависит от фазы волны накачки, то, усиливая затравочный стоксов пучок высокого качества накачкой с фазовыми aberrациями, получается излучение без искажений.



а



б

Рисунок 8.10 – Спектр усиления стоксового излучения ВКР в кварцевом стекле (а); схема комбинационного перестраиваемого волоконного лазера (б) [12].

Рамановские лазеры и усилители используются в волоконно-оптических системах связи, особенно в области аномальной групповой дисперсии, когда такие системы могут генерировать и поддерживать солитонные импульсы.

9. Обращение волнового фронта

Принцип обращения волнового фронта

Создание мощных лазерных систем с расходимостью, близкой к дифракционной – одна из важнейших задач лазерной техники. Однако, при прохождении света через активную среду лазера, излучение приобретает фазовые искажения – абберации волнового фронта, которые ограничивают яркость лазера. Для компенсации аббераций часто применяется приём, известный как *обращение волнового фронта*. Рассмотрим принцип этого явления с точки зрения волновой теории света.

Электрическое поле монохроматической электромагнитной волны можно записать в виде

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{i\omega t} + \text{к.с.} = \frac{1}{2} \mathbf{e} A(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{i\omega t} + \text{к.с.} \quad (9.1)$$

Тогда поле излучения, отражённого от ОВФ-зеркала, имеет вид

$$\mathbf{E}_c(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} r \mathbf{e}^* A^*(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{i\omega t} + \text{к.с.}, \quad (9.2)$$

где r – коэффициент отражения по амплитуде. Часть математического выражения этой волны, зависящая от пространственных переменных, является комплексно-сопряжённой относительно падающей волны $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$. Из выражения (9.2) следует, что сопряжённая волна $\mathbf{E}_c(t, \mathbf{r})$ обладает следующими свойствами:

- а) Волновой вектор излучения меняет свой знак: $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$, то есть, каждый луч света меняет своё направление на противоположное (рис. 9.1 а).
- б) Комплексная амплитуда $A(\mathbf{r})$ переходит в $A^*(\mathbf{r})$ – это и есть обращение, то есть, изменение знака волнового фронта (по отношению к направлению движения волны) – рис. 9.1 б.
- в) Единичный вектор поляризации \mathbf{e} преобразуется в \mathbf{e}^* . Например, если свет имеет круговую поляризацию, при которой $\mathbf{e}_{\pm} = (\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y) / \sqrt{2}$, правая поляризация остаётся правой, и наоборот. Обычное зеркало изменяет направление круговой поляризации на противоположное.

Реальные способы обращения волнового фронта, как правило, обладают не всеми вышеперечисленными свойствами, или они выполняются только с той или иной степенью точности.

Возникновение обращённой волны в форме (9.2) с математической точки зрения эквивалентно изменению направления времени ($t \rightarrow -t$):

$$\mathbf{E}_c(t, \mathbf{r}) = r \mathbf{E}(-t, \mathbf{r}). \quad (9.3)$$

Все уравнения физики, в том числе и волновое уравнение (1.5), описывающее распространение света, симметричны относительно обращения времени, поэтому сопряжённая волна $\mathbf{E}_c(t, \mathbf{r})$ удовлетворяет волновому уравнению так же, как и исходная, и поэтому может существовать.

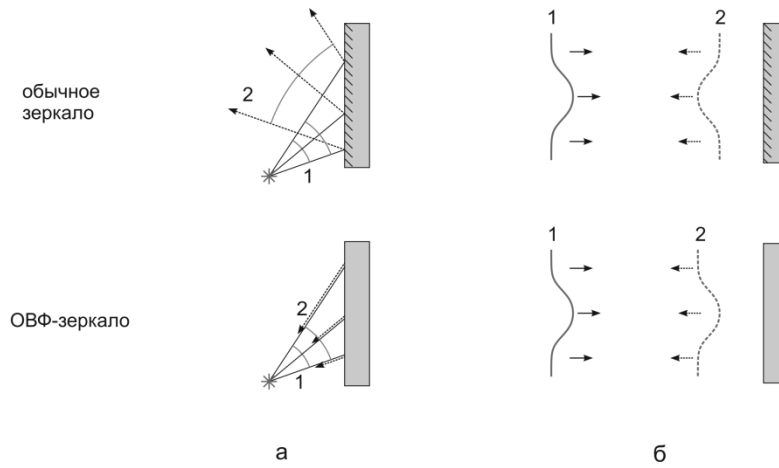


Рисунок 9.1 – Действие обычного зеркала и ОВФ-зеркала с точки зрения лучей (а) и волновых фронтов (б). 1 – падающее излучение, 2 – отражённое излучение.

Обращение волнового фронта применяется для исправления aberrаций оптической системы. Пусть исходная волна вида

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{e} A(\mathbf{r}) e^{i(\omega t - kz)} + \text{к.с.} \quad (9.4)$$

проходит через область с неоднородным показателем преломления $n(\mathbf{r}) = \sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}$ (рис. 9.2), например, через участок турбулентной атмосферы, или активную среду лазерного усилителя.

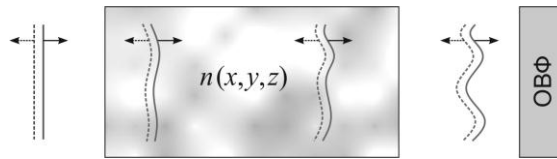


Рисунок 9.2 – Исправление aberrаций оптической системы с помощью ОВФ-зеркала.

Электрическое поле в этой области должно подчиняться волновому уравнению

$$\Delta \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) - \frac{\varepsilon(\mathbf{r})}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(t, \mathbf{r})}{\partial t^2} = 0, \quad (9.5)$$

то есть, амплитуда поля (в параксиальном приближении) удовлетворяет уравнению,

$$\left[\Delta_{\perp} - 2ik \frac{\partial}{\partial z} + \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right] A(\mathbf{r}) = 0. \quad (9.6)$$

Очевидно, что комплексно-сопряжённое от этого выражения также должно быть справедливо:

$$\left[\Delta_{\perp} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} + \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right] A^*(\mathbf{r}) = 0. \quad (9.7)$$

Но последнее уравнение описывает сопряжённую волну

$$\mathbf{E}_c(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{e}^* A^*(\mathbf{r}) e^{i(\omega t + kz)} + \text{к.с.}, \quad (9.8)$$

распространяющуюся в противоположном направлении ($-z$), и волновой фронт которой всюду совпадает с фронтом исходной волны. Это значит, что на выходе из неоднородной среды отражённая волна будет иметь такую же форму волнового фронта, как и на входе.

Один из способов коррекции aberrаций, часто применяющийся в адаптивной оптике – использование деформируемого зеркала. Если на пути пучка света поставить зеркало, поверхность которого в точности повторяет форму волнового фронта (рис. 9.3), то в каждой точке пучка отражение от зеркала происходит по нормали к ВФ, и отражённая волна будет иметь обращённый волновой фронт. Такой «механический» способ имеет свои ограничения: деформируемое зеркало не может исправить искажения ВФ, пространственный масштаб которых меньше удвоенного расстояния между актюаторами ($\sim 1/10$ апертуры пучка), а также быстро меняющиеся во времени aberrации, частота которых превосходит частоту отклика адаптивной системы ($\sim 0,1 - 1$ кГц). Адаптивное зеркало всегда обладает гистерезисом формы, а также вносит дополнительные высокочастотные искажения волнового фронта. В любом случае, традиционная адаптивная система технически очень сложна: как правило, она состоит из датчика волнового фронта, деформируемого зеркала и электронной системы управления. Однако обращение волнового фронта может происходить автоматически в ряде нелинейных процессов, таких, например, как вынужденное рассеяние.



Рисунок 9.3 – Исправление искажений волнового фронта с помощью деформируемого зеркала (DM) – двухпроходный и однопроходный варианты.

Реальное обращение ВФ всегда неидеально. Помимо обращённой волны $\mathbf{E}_c(t, \mathbf{r})$ в отражённом излучении присутствует необращённая компонента. Мерой качества ОВФ служит коэффициент обращения (коэффициент корреляции):

$$H = \frac{\iint |E_L(\mathbf{r}) E_S(\mathbf{r})|^2 d^2\mathbf{r}}{\iint |E_L(\mathbf{r})|^2 d^2\mathbf{r} \cdot \iint |E_S(\mathbf{r})|^2 d^2\mathbf{r}}, \quad (9.9)$$

где E_L – поле падающей, а E_S – поле отражённой волны. При идеальном обращении, когда $E_S(\mathbf{r}) = \text{const} \cdot E_L(\mathbf{r})^*$, коэффициент H равен единице, если же поля полностью некоррелированы, то $H = 0$.

Величина H полезна при теоретическом рассмотрении процесса обращения, но её очень трудно как-либо экспериментально зарегистрировать, поэтому на практике для оценки качества ОВФ измеряется отношение

$$h = \frac{\max\{I_S\}/P_S}{\max\{I_L\}/P_L}, \quad (9.10)$$

где $I(x, y)$ и P – распределение интенсивности пучка в дальней зоне и мощность пучка в случае непрерывного излучения, или плотность энергии и энергия импульса в случае

импульсного излучения ($P = \iint I(x,y) dx dy$). Величина h – это отношение нормированной интенсивности центрального дифракционного максимума отражённого излучения, после того, как оно прошло второй раз через неоднородную среду, к этой же величине для исходного излучения, падающего на неоднородную среду. Если на входе в среду с абберациями имеется излучение с идеальным (плоским или сферическим) волновым фронтом, то величина h – это известный в оптике параметр – *число Штреля*. Любое искажение рассеянного поля по сравнению с точно обращенным приводит к уменьшению отношения величины $\max\{I_S\}/\max\{I_L\}$ к P_S/P_L и, соответственно, к уменьшению коэффициента обращения.

Для измерения величины h требуется регистрировать распределения интенсивности пучка в дальней зоне (например, с помощью камеры). Обычно технически проще измерять мощность пучка в пределах определённого угла. В этом случае используется параметр обращения $h_{\text{угл}}$:

$$h_{\text{угл}} = \frac{(P_\theta/P)_S}{(P_\theta/P)_L}, \quad (9.11)$$

где P и P_θ – полная энергия излучения и энергия, идущая в угол измерения θ , обычно близкий к дифракционному.

Ещё один параметр, характеризующий эффективность обращения ВФ – коэффициент отражения R , показывающий, какая часть упавшего на ОВФ-зеркало излучения преобразовалась в обращённую волну.

Эффект возникновения фазово-сопряжённой волны может сопутствовать различным нелинейно-оптическим процессам. Мы рассмотрим два из них: ОВФ при вырожденном четырёхволновом взаимодействии и при вынужденном рассеянии.

ОВФ при вырожденном четырёхволновом взаимодействии в кубически-нелинейной среде

Рассмотрим принцип действия объёмной голограммы. Пусть в записывающую среду падает распространяющаяся вдоль оси z предметная волна A_3 , которую без ограничения общности можно считать плоской (поскольку произвольное поле можно представить в виде суперпозиции плоских волн): $A_3(\mathbf{r}) = a \exp(-ikz)$, и плоская же опорная волна, распространяющаяся под углом α к оси z : $A_1(\mathbf{r}) = a \exp[-ik(\sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot z)]$ – рис. 9.4а (для простоты мы предполагаем, что эти волны имеют одинаковую амплитуду).

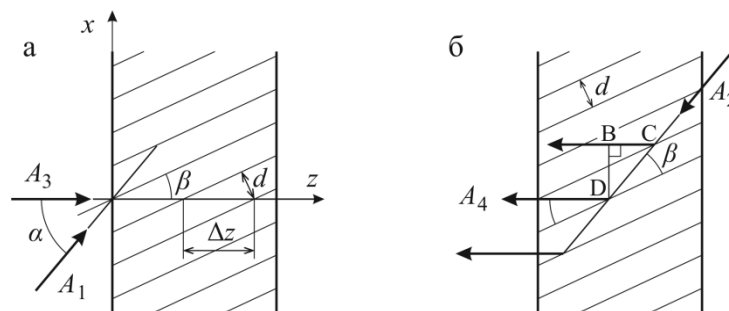


Рисунок 9.4 – Запись (а) и восстановление (б) предметной волны в объёмной голограмме.

Суперпозиция предметной и опорной волны порождает интерференционное распределение интенсивности в объёме записывающей среды:

$$I(\mathbf{r}) \propto |A_1 + A_3|^2 = 4a^2 \cos^2 \left[\frac{k}{2} \sin \alpha \cdot x - \frac{k}{2} (1 - \cos \alpha) \cdot z \right]. \quad (9.12)$$

Максимумы интенсивности располагаются вдоль плоскостей

$$x \sin \alpha - z(1 - \cos \alpha) = m\lambda, \quad (9.13)$$

где m – целое число. Эти плоскости составляют с осью z угол β , такой, что

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad (9.14)$$

т. е., $\beta = \alpha/2$ – плоскости интерференционных максимумов располагаются по биссектрисе угла между направлениями предметной и опорной волн. Расстояние Δz между плоскостями вдоль направления z равно

$$\Delta z = \frac{\lambda}{1 - \cos \alpha} = \frac{\lambda}{2 \sin^2 \alpha/2}. \quad (9.15)$$

Расстояние d между плоскостями равно

$$d = \Delta z \cdot \sin \alpha/2 = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha/2}. \quad (9.16)$$

Распределение интенсивности записывается в фоточувствительном слое – в случае амплитудной голограммы в нём изменяется поглощение пропорционально $I(\mathbf{r})$, а в случае фазовой голограммы – показатель преломления $n(\mathbf{r}) \sim I(\mathbf{r})$.

При восстановлении предметной волны на голограмму подаётся считывающая плоская волна A_2 . Если она имеет то же направление распространения, что и опорная волна A_1 , то брэгговское отражение от слоёв приведёт к восстановлению предметной волны. Если же считывающая волна направлена в противоположную сторону, то появится отражённая волна A_4 , которая является обращённой относительно предметной волны (рис. 9.4б). Разность оптического пути между волнами, отразившимися от соседних слоёв, равна

$$\begin{aligned} \Delta l &= CD - BC = CD - CD \cdot \cos \alpha = \frac{d}{\sin \beta} (1 - \cos \alpha) = \\ &= \frac{\lambda}{2 \sin^2 \alpha/2} (1 - \cos \alpha) = \lambda. \end{aligned} \quad (9.17)$$

То есть, если считывающая волна имеет ту же длину волны, что и предметная и опорная, то отражённые от слоёв волны имеют относительно друг друга набег фазы, кратный 2π . Таким образом, объёмная голограмма действует как фильтр – эффективное отражение происходит только света на исходной частоте.

Принцип обращения волнового фронта с помощью вырожденного четырёхволнового взаимодействия очень похож на описанный выше голографический процесс, котором запись и восстановление голограммы совмещены во времени.

Предметная волна A_3 (которая в данном контексте называется сигнальной) интерферирует с волной накачки A_1 , порождая интерференционное распределение интенсивности в нелинейной среде (рис. 9.5), и, соответственно, распределение показателя преломления. Возникает *динамическая объёмная нелинейная фазовая голограмма*. Одновременно считывающая волна A_2 (вторая волна накачки) рассеивается на этой голограмме, и появляется обращённая волна A_4 .

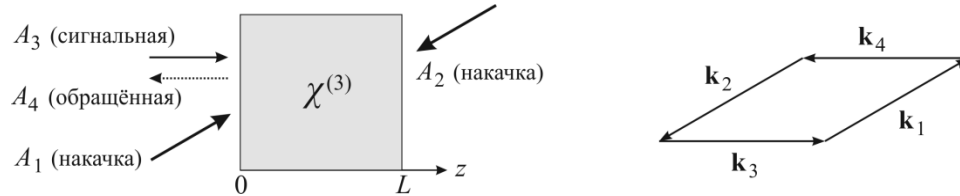


Рисунок 9.5 – ОВФ с помощью вырожденного 4-волнового взаимодействия.

Взаимодействие называется вырожденным в том смысле, что все четыре волны имеют одинаковую частоту. При этом, если волны накачки A_1 и A_2 распространяются строго в противоположных направлениях, в данном процессе условие фазового синхронизма выполняется автоматически: $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 = 0$ (рис. 9.5). В общем случае, необязательно, чтобы волны накачки были плоскими – достаточно, чтобы они были обращёнными относительно друг друга.

Выведем уравнения, описывающие взаимодействие четырёх волн одинаковой частоты в кубически-нелинейной среде с нелинейной восприимчивостью $\chi^{(3)}$. Поля этих волн имеют вид

$$E_i(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} A_i(\mathbf{r}) e^{i(\omega t - \mathbf{k}_i \mathbf{r})} + \text{к.с.}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (9.18)$$

Нелинейная поляризация равна

$$P^{NL} = \chi^{(3)} (E_1 + E_2 + E_3 + E_4)^3. \quad (9.19)$$

Это выражение в правой части содержит великое множество слагаемых, но нас будут интересовать только те из них, которые зависят от координат и времени $\sim \exp(i\omega t - i\mathbf{k}_i \mathbf{r})$, то есть, которые могут служить источниками для исходных волн $E_1 \dots E_4$:

$$P = \frac{1}{2} e^{i\omega t} \sum_{i=1}^4 P_i e^{-i\mathbf{k}_i \mathbf{r}} + \text{к.с.}, \quad (9.20)$$

причём каждая амплитуда P_i есть сумма членов вида $\chi^{(3)} A_j A_k A_l^*$, где $\chi^{(3)} = \chi^{(3)}(\omega = \omega + \omega - \omega)$. Из уравнений (9.18) - (9.20) получаем:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{3}{4} \chi^{(3)} (A_1^2 A_1^* + 2A_1 A_2 A_2^* + 2A_1 A_3 A_3^* + 2A_1 A_4 A_4^* + 2A_3 A_4 A_2^*), \\ P_2 &= \frac{3}{4} \chi^{(3)} (A_2^2 A_2^* + 2A_2 A_1 A_1^* + 2A_2 A_3 A_3^* + 2A_2 A_4 A_4^* + 2A_3 A_4 A_1^*), \\ P_3 &= \frac{3}{4} \chi^{(3)} (A_3^2 A_3^* + 2A_3 A_1 A_1^* + 2A_3 A_2 A_2^* + 2A_3 A_4 A_4^* + 2A_1 A_2 A_4^*), \\ P_4 &= \frac{3}{4} \chi^{(3)} (A_4^2 A_4^* + 2A_4 A_1 A_1^* + 2A_4 A_2 A_2^* + 2A_4 A_3 A_3^* + 2A_1 A_2 A_3^*). \end{aligned} \quad (9.21)$$

Далее, предположим, что поля E_3 и E_4 много слабее волн накачки, и уберём из уравнений (9.21) слагаемые, в которых амплитуды слабых волн встречаются более одного раза:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \frac{3}{4} \chi^{(3)} (A_1^2 A_1^* + 2A_1 A_2 A_2^*), \\
 P_2 &= \frac{3}{4} \chi^{(3)} (A_2^2 A_2^* + 2A_2 A_1 A_1^*), \\
 P_3 &= \frac{3}{4} \chi^{(3)} (2A_3 A_1 A_1^* + 2A_3 A_2 A_2^* + 2A_1 A_2 A_4^*), \\
 P_4 &= \frac{3}{4} \chi^{(3)} (2A_4 A_1 A_1^* + 2A_4 A_2 A_2^* + 2A_1 A_2 A_3^*).
 \end{aligned}
 \tag{9.22}$$

Видно, что в данном приближении нелинейная поляризация, соответствующая волнам накачки (P_1 и P_2), образуется в результате взаимодействия только волн накачки, тогда как поляризация, соответствующая сигнальной и обращённой волнам (P_3 и P_4) зависит от амплитуд всех взаимодействующих волн.

Электрическое поле должно подчиняться волновому уравнению

$$\Delta E - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}
 \tag{9.23}$$

В системе координат (x', y', z') , повернутой в направлении распространения волны накачки, поля накачки будут иметь вид $E_{1,2} = 1/2 A_{1,2} \exp(i\omega t \pm kz') + \text{к.с.}$ Подставив их в волновое уравнение, получим уравнения

$$\left(\Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \mp 2ik \frac{\partial}{\partial z'} - k^2 + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} \right) A_{1,2} = -\frac{4\pi\omega^2}{c^2} P_{1,2}.
 \tag{9.24}$$

Если пренебречь зависимостью амплитуды от поперечных координат и второй производной амплитуды по продольной координате, и учитывая (9.22), уравнения приходят к виду

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial A_1}{\partial z'} &= -i\kappa_1 A_1 & \text{где} & & \kappa_1 &= \frac{3\pi\omega}{2nc} \chi^{(3)} \left[|A_1|^2 + 2|A_2|^2 \right], \\
 \frac{\partial A_2}{\partial z'} &= i\kappa_2 A_2 & & & \kappa_2 &= \frac{3\pi\omega}{2nc} \chi^{(3)} \left[|A_2|^2 + 2|A_1|^2 \right].
 \end{aligned}
 \tag{9.25}$$

Поскольку $\kappa_{1,2}$ – действительные величины, то волны накачки подвергаются фазовой модуляции, но их амплитуды остаются неизменными. Уравнения (9.25) описывают процесс *перекрёстной фазовой модуляции*. Интересно, что каждая из волн накачки влияет на свою фазу в 2 раза слабее, чем на фазу другой волны. Таким образом, интенсивности волн A_1 и A_2 постоянны, следовательно, величины κ – константы. Тогда уравнения (9.25) легко решаются:

$$A_{1,2} = A_{1,2}(0) \exp(\mp \kappa_{1,2} z').
 \tag{9.26}$$

Если интенсивности волн накачки одинаковы, то $\kappa_1 = \kappa_2$, и произведение $A_1(z') \cdot A_2(z') = A_1(0) \cdot A_2(0) = \text{const}$. Теперь можно написать уравнения для амплитуд сигнальной и обращённой волн, в предположении, что они являются плоскими волнами, т. е. $A_{3,4}(x, y, z) = A_{3,4}(z)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_3}{\partial z} &= -\frac{3\pi i \omega}{nc} \chi^{(3)} \left[\left(|A_1|^2 + |A_2|^2 \right) A_3 + A_1 A_2 A_4^* \right], \\ \frac{\partial A_4}{\partial z} &= \frac{3\pi i \omega}{nc} \chi^{(3)} \left[\left(|A_1|^2 + |A_2|^2 \right) A_4 + A_1 A_2 A_3^* \right].\end{aligned}\quad (9.27)$$

Для удобства эти уравнения можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_3}{\partial z} &= -i\kappa_3 A_3 - i\kappa A_4^* \\ \frac{\partial A_4}{\partial z} &= i\kappa_3 A_4 + i\kappa A_3^*\end{aligned}\quad \text{где} \quad \begin{aligned}\kappa_3 &= \frac{3\pi\omega}{nc} \chi^{(3)} \left(|A_1|^2 + |A_2|^2 \right), \\ \kappa &= \frac{3\pi\omega}{nc} \chi^{(3)} A_1 A_2.\end{aligned}\quad (9.28)$$

После замены переменных $A_3 = A'_3 \exp(-i\kappa_3 z)$, $A_4 = A'_4 \exp(i\kappa_3 z)$ получаем систему

$$\begin{aligned}\frac{\partial A'_3}{\partial z} &= -i\kappa A'_4 \\ \frac{\partial A'_4}{\partial z} &= i\kappa A'_3\end{aligned}\quad (9.29)$$

Эти уравнения показывают, почему вырожденное четырёхволновое взаимодействие приводит к обращению волнового фронта: волна A'_4 порождается только полем, сопряжённым амплитуде волны A'_3 . Продифференцировав второе из уравнений (9.29), и подставив в него первое уравнение, получим

$$\frac{\partial^2 A'_4}{\partial z^2} = -\kappa^2 A'_4. \quad (9.30)$$

Общее решение этого уравнения: $A'_4(z) = B \cos(|\kappa| z) + C \sin(|\kappa| z)$, где B и C – константы, зависящие от граничных условий $A'_{3,4}(0)$ и $A'_{3,4}(L)$, где L – длина области взаимодействия. В частном случае, когда известно значение амплитуды падающей сигнальной волны $A'_3(0)$, а обращённая волна изначально отсутствует: $A'_4(L) = 0$, решение для амплитуд

$$\begin{aligned}A'_3(z) &= A'_3(0) \left[\text{tg}(|\kappa| L) \cdot \sin(|\kappa| z) + \cos(|\kappa| z) \right], \\ A'_4(z) &= i \frac{\kappa}{|\kappa|} A'^*_3(0) \left[-\text{tg}(|\kappa| L) \cdot \cos(|\kappa| z) + \sin(|\kappa| z) \right].\end{aligned}\quad (9.31)$$

Амплитуды $A'_3(L)$ и $A'_4(0)$ на выходе из нелинейной среды равны

$$\begin{aligned}A'_3(L) &= \frac{A'_3(0)}{\cos(|\kappa| L)}, \\ A'_4(0) &= -i \frac{\kappa}{|\kappa|} A'^*_3(0) \text{tg}(|\kappa| L).\end{aligned}\quad (9.32)$$

Из (9.32) следует, что амплитуда сигнальной волны на выходе – $A_3'(L)$ – всегда больше, чем на входе, а амплитуда обращённой волны $A_4'(0)$ формально может принять любое, сколь угодно большое значение. То есть, «коэффициент отражения» $R = |A_4(0)/A_3(0)|^2$ такой системы ОВФ может быть больше единицы. Причина этого в том, что источником энергии обращённой волны является мощное излучение накачки.

ОВФ при вырожденном 4-волновом взаимодействии было открыто в 1977 г. На рис. 9.6 показана схема типичного эксперимента по наблюдению данного эффекта. В ней волны накачки A_1 и A_2 получаются от одного источника с помощью возвратного зеркала. Если это зеркало было расположено так, чтобы отражённое излучение накачки распространялось строго в обратном направлении (то есть, если поле E_2 являлось обращённым относительно E_1), то отражённая от нелинейной среды волна, проходя в обратном направлении через аббератор (случайную фазовую пластинку), восстанавливала свой первоначальный волновой фронт, и давала чёткое изображение тестового объекта на камере. Если же возвратное зеркало было разюстировано, то эффект пропадал.

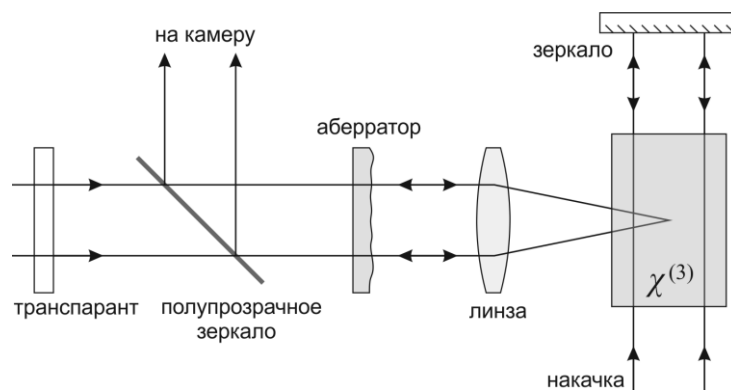


Рисунок 9.6 – Схема эксперимента по обращению волнового фронта при вырожденном четырёхволновом взаимодействии.

ОВФ при вынужденном рассеянии

Более распространённый способ обращения волнового фронта, который не требует введения волн накачки – ОВФ с помощью вынужденного рассеяния (ОВФ-ВР). Эффект генерации обращённой волны может проявляться при различных видах вынужденного рассеяния, но практическое значение имеет только ВР Мандельштама-Бриллюэна. В главе 8 мы показали, что при ВРМБ наименьшим порогом, как правило, обладает рассеяние обратном направлении (на угол $\theta = \pi$). Ещё в первых экспериментах по наблюдению ВРМБ, в 1960-е годы, было замечено, что рассеянное назад излучение имеет расходимость, близкую к расходимости возбуждающего лазера. В большинстве случаев оно отражается строго назад, проходит обратно через оптическую систему, и попадает в апертуру лазера накачки. В то время данный эффект объясняли тем, что геометрия рассеивающей среды (ограниченная в поперечном и вытянутая в продольном направлении) обуславливает рассеяние преимущественно в обратном направлении, а рассеяние на углы $\theta \neq \pi$ подавлено. Только в 1971 году в ФИАНе В. В. Рагульским с сотр.

были проведены эксперименты¹, показавшие, что при ВРМБ в действительности возникает обращённая волна. В этой же работе Б. Я. Зельдович предложил полуколичественную теорию, объясняющую ОВФ при ВРМБ.

Схема этого эксперимента показана на рис. 9.7. Излучение рубинового лазера (энергия импульса 140 мДж, длительность 110 нс, расходимость 10^{-4}) проходило через аббератор – случайную фазовую пластину², после которой приобретало расходимость $\sim 3 \cdot 10^{-4}$ рад, т. е. в 300 раз бóльшую. С помощью линзы излучение вводилось в многомодовый волновод прямоугольного сечения 4×4 мм, длиной 1 м, заполненный сжатым метаном под давлением 130 атм. В процессе распространения по световоду различные угловые компоненты накачки интерферируют, образуя спекл-структуру с равномерным освещением световода. В сжатом метане возникало ВРМБ с коэффициентом отражения по энергии $R \approx 0,25$.

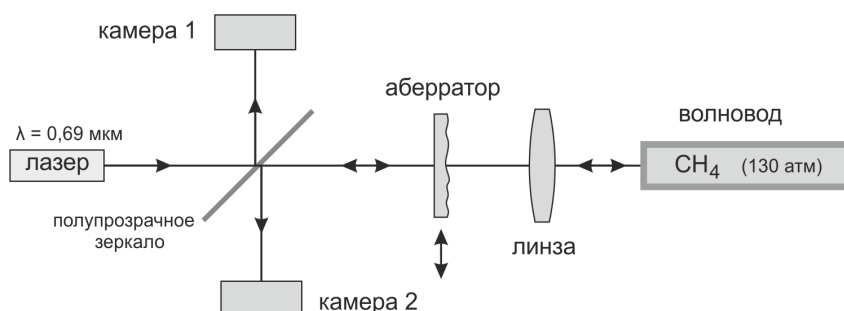


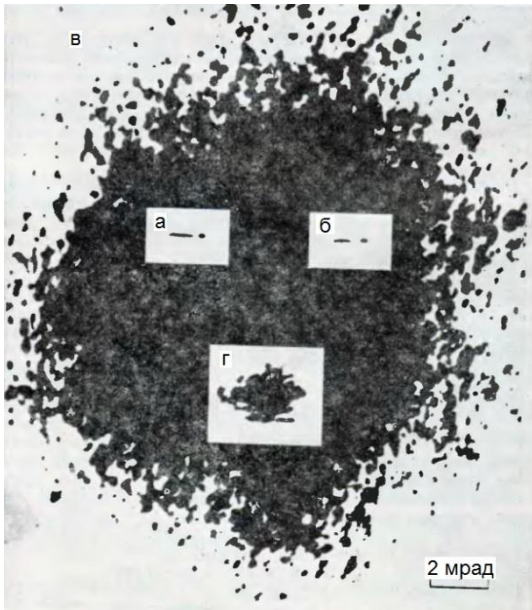
Рисунок 9.7 – Схема эксперимента для наблюдения ОВФ при ВРМБ.

Камерами 1 и 2 регистрировалось (в дальней зоне) распределения излучения лазера накачки и обратного стоксового излучения, соответственно. Изображения этих распределений показаны на рис. 9.8. Отражённая от ВРМБ-зеркала стоксова волна, прошедшая обратно через аббератор, давала распределение в ДЗ (б), практически идентичное ДЗ исходного лазерного излучения (а). Это доказывает, что стоксово излучение в данном случае являлось обращённым по отношению к накачке. В отсутствие аббератора обращение не происходило (г).

Яркость отражённой волны в дальней зоне составила примерно 0,25 от яркости исходного пучка, то есть, коэффициент обращения h был близок к единице.

¹ Зельдович Б. Я., Поповичев В. И., Рагульский В. В., Файзуллоев Ф. С., О связи между волновыми фронтами отражённого и возбуждающего света при вынужденном рассеянии Манделъштата-Бриллюэна. Письма в ЖЭТФ, т. 15, №3, с. 160; т. 15, №6, с. 363 (1972).

² Обычно в качестве аббератора используется стеклянная пластина, протравленная в плавиковой кислоте.



- а) лазерное излучение накачки (камера 1)
- б) рассеянное стоксово излучение, прошедшее обратно через аббератор (камера 2);
- в) обратное излучение, при замене ВРМБ-кюветы на обычное плоское зеркало;
- г) то же, что и б), но в отсутствие аббератора.

Рисунок 9.8 – Распределение плотности энергии в дальней зоне лазерного излучения в эксперименте, схема которого показана на рис. 9.7.

Механизм ОВФ при вынужденном рассеянии носит принципиально иную природу, чем в случае параметрических трёх- или четырёхволновых взаимодействий. Например, в случае вырожденного четырёхволнового взаимодействия, амплитуда обращённой волны $A_4(\mathbf{r})$ пропорциональна произведению

$$A_4(\mathbf{r}) \propto \chi^{(3)} A_1 A_2 A_3^*, \quad (9.33)$$

то есть, $A_4(\mathbf{r}) \propto A_3^*(\mathbf{r})$ – отражённая волна порождается комплексно-сопряжённой сигнальной волной. Аналогично, при трёхволновом взаимодействии в квадратично-нелинейной среде (то есть, например, при генерации разностной частоты), при выполнении условия фазового синхронизма, имеем

$$A_2(\mathbf{r}) \propto \chi^{(2)} A_3 A_1^*, \quad (9.34)$$

где A_3 – накачка, A_1 – сигнальная, A_2 – отражённая волна, $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ (см., например, уравнения (3.9) или (6.1)). В этом случае также генерируется сопряжённая по пространству волна (для полного ОВФ требуется её отражение от обычного зеркала, см. [2]).

При вынужденном же рассеянии, обратное стоксово излучение зависит только от интенсивности накачки, но не от фазы: $A_2 \propto |A_1|^2 A_2$ (где A_1 – амплитуда падающего, а A_2 – рассеянного света; см., например, уравнения (8.32) или (8.63)). То есть, отражённая от ВР-зеркала волна не должна нести информации о волновом фронте накачки.

Объяснение того, что в результате ВРМБ возникает обращённая волна состоит в следующем. Лазерное поле накачки $E_L(x, y, z)$, с сильными искажениями волнового фронта, при распространении в световоде (или при фокусировке) создаёт сильно неоднородное распределение интенсивности $I_L(x, y, z)$. Пусть пучок диаметром D вводится в ВРМБ-активную среду линзой с фокусным расстоянием F (рис. 9.9). Характерный размер локальных интерференционных неоднородностей (спеклов) в поперечном сечении равен

$\Delta x = F \cdot \lambda / D = \lambda / \Delta \theta$, где $\Delta \theta = D / F$ – угловая апертура фокусировки. Каждый такой спекл, как источник излучения, имеет расходимость $\lambda / \Delta x = \Delta \theta$, поэтому размер спекла Δz в продольном направлении определяется выражением $\Delta z \cdot \Delta \theta = \Delta x$, т. е. $\Delta z = \lambda / \Delta \theta^2$.

Эффективный инкремент G_{eff} стоксовой волны $E_S(x, y, z)$, распространяющейся в обратном направлении, зависит от того, насколько сильно перекрываются поля накачки и отражённой волны. Для того, чтобы найти G_{eff} , следует усреднить локальный инкремент $dG(\mathbf{r}) = g_0 I_L(\mathbf{r}) dz$ по поперечному сечению области ВРМБ-взаимодействия, и проинтегрировать его по длине этой области:

$$G_{\text{eff}} = g_0 \frac{\iiint I_L(\mathbf{r}) I_S(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}}{\iint I_S(\mathbf{r}) dx dy}. \quad (9.35)$$

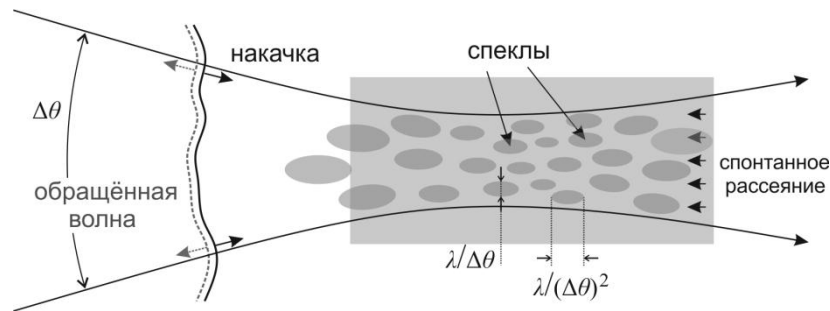


Рисунок 9.9 – Возникновение обращённой волны в результате ВРМБ.

Генерация стоксовой волны начинается со спонтанных шумов, среди которых есть волны всевозможных пространственных конфигураций. Наибольшим эффективным инкрементом обладает та из них, которая лучше всего перекрывается при своём распространении назад с волной накачки. Очевидно, что в точности соответствует этому условию обращённая волна $E_S(\mathbf{r}) \sim A_L^*(\mathbf{r}) e^{+i\mathbf{k}\mathbf{r}}$: её пространственное распределение в области взаимодействия такое же, как у волны накачки, то есть, максимумы интенсивности совпадают с максимумами интенсивности накачки. Поэтому эффективный инкремент усиления для обращённой волны будет существенно больше, чем у любой другой, и на выходе из ОВФ-зеркала она будет преобладать над всеми остальными.

Можно показать, что если рассеянное поле $E_S(\mathbf{r})$ полностью некоррелировано с полем накачки $E_L(\mathbf{r})$, то среднее по пространству их интенсивностей удовлетворяет соотношению

$$\langle I_L(\mathbf{r}) I_S(\mathbf{r}) \rangle = \langle I_L(\mathbf{r}) \rangle \langle I_S(\mathbf{r}) \rangle. \quad (9.36)$$

Если же стоксова волна полностью коррелирована с накачкой, то есть, является обращённой по отношению к ней: $E_S(\mathbf{r}) = r \cdot E_L(\mathbf{r})$, то

$$\langle I_L(\mathbf{r}) I_S(\mathbf{r}) \rangle = |r|^2 \langle I_L^2(\mathbf{r}) \rangle = 2 |r|^2 \langle I_L(\mathbf{r}) \rangle^2. \quad (9.37)$$

Таким образом, эффективный инкремент G_{eff} обращённой волны, который пропорционален коэффициенту корреляции, будет в среднем в 2 раза больше, чем инкремент необращённой волны. Поскольку пороговый инкремент G_{th} вынужденного рассеяния примерно равен 30, то мощность обращённой волны на выходе будет равна $P_S = P_{S0} \cdot \exp(G_{th})$, а необращённой – $P_{S0} \cdot \exp(G_{th}/2)$, где P_{S0} – мощность затравочного

(шумового) стоксового излучения. То есть, мощность обращённой волны в $\exp(G_{th}/2) \approx 10^6$ раз больше, чем любой другой. Этой разницы в усилении оказывается достаточно, чтобы из затравочных шумов на стоксовой частоте выделить по мощности или энергии лишь обращенную составляющую.

Практическое применение ОВФ¹

Преимущество ОВФ-ВР состоит в том, что в нём реализуется *самообращение* волнового фронта. Недостатком данного метода является пороговый характер вынужденного рассеяния, вследствие чего требуется высокая мощность обращаемого излучения. Пороговый характер ВРМБ также приводит к искажению временной формы импульса при обращении. В лазерных установках для изучения взаимодействия мощного излучения с веществом (в частности, для лазерного термоядерного синтеза) очень важно точное воспроизведение специальной формы импульса и равенство энергии импульса в различных каналах, поэтому применение ОВФ-ВР в таких установках затруднено. С другой стороны, обращение ВФ с помощью вынужденного рассеяния улучшает контраст импульса.

В голографических методах (таких, как вырожденное четырёхволновое взаимодействие) требование высокой мощности переносится на волны накачки, а обращаемая волна может быть слабой. Достоинством этих методов является также возможность обращения сигнала с коэффициентом отражения больше единицы, то есть, с усилением. Главный недостаток голографических методов заключается в жёстких требованиях к оптическому качеству нелинейной среды и к пространственной структуре опорных волн.

Типичная схема лазерной системы типа «задающий генератор – усилитель», в которой реализуется коррекция aberrаций с помощью ОВФ, показана на рис. 9.10.

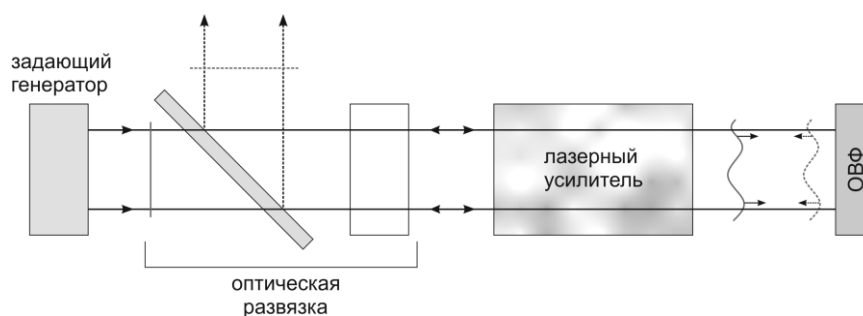


Рисунок 9.10 – Схема двухпроходной лазерной системы с коррекцией искажений волнового фронта с помощью ОВФ-зеркала.

Обращение волнового фронта может использоваться для *самонаведения* лазерного излучения на мишень. Принципиальная схема такой системы показана на рис. 9.11. Маломощный лазер подсвечивает мишень; рассеянное мишенью излучение частично перехватывается апертурой усилителя, затем волновой фронт пучка обращается, и излучение, пройдя ещё раз через усилитель, возвращается на мишень.

¹ Данный раздел представляет собой сокращённую версию §4.3 из книги [6].

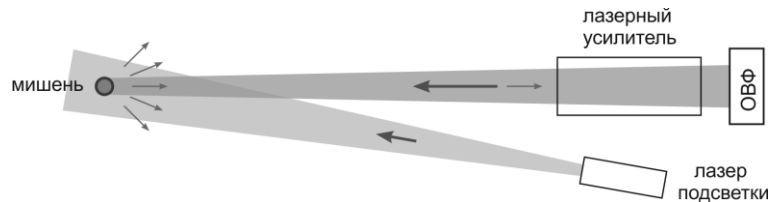


Рисунок 9.11 – Самонаведение лазера на мишень с помощью ОВФ.

В качестве ОВФ-зеркала обычно используется одна из систем, показанных на рис. 9.12. В первой схеме обращённая стоксова волна возникает в световоде, в качестве которого используются тонкие и длинные кварцевые трубки (диаметром 2 – 5 мм и длиной 50 – 100 см), заполненные ВРМБ-активным веществом (например, CS_2 или TiCl_4), а также газообразные светопроводы с зеркальными стенками. Применяются также кварцевые или стеклянные волоконные светопроводы длиной от нескольких до десятков метров и диаметром 100—400 мкм с низким порогом ВРМБ.

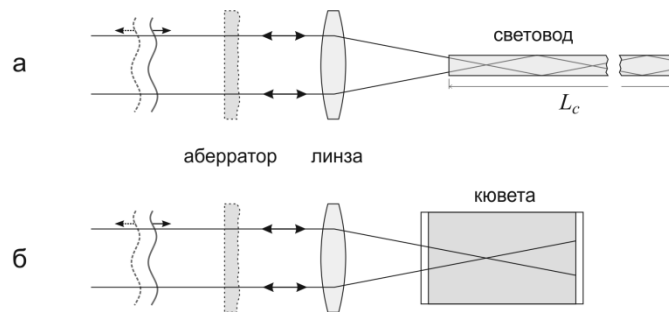


Рисунок 9.12 – ОВФ-зеркала с генерацией обращённой волны в световоде (а) и с фокусировкой лазерного пучка в объём ВРМБ-активной среды (б).

Для реализации дискриминационного механизма ОВФ при ВРМБ в световоде необходимо выполнить несколько условий. Первое условие – большое усиление на длине световода L_c . Второе условие – неоднородное распределение поля накачки на входе в светопровод – вытекает из необходимости хорошего перемешивания пучка накачки на длине взаимодействия L_c , чтобы прошедшее через любую точку входного сечения световода излучение освещало весь противоположный торец световода. Отсюда получается ограничение расходимости входного излучения снизу: $\theta \gg d_c/L_c$, где d_c – диаметр световода.

Для создания необходимой неоднородности и, соответственно, расходимости излучения накачки лазерный пучок пропускается через фазовый аббератор. В качестве последнего обычно используется стеклянная пластинка, протравленная в плавиковой кислоте, которая вносит в излучение угловую расходимость много больше дифракционной. Заметное усиление стоксова пучка при ВРМБ должно происходить на всей длине световода, а не на длине дифракционного расплывания неоднородностей $\Delta z = \lambda/\Delta\theta^2$. В этом случае излучение будет сфазировано на всей апертуре световода, что и необходимо для реализации ОВФ. Таким образом, инкремент усиления на длине продольной корреляции должен быть мал: $gI_L \cdot \Delta z \ll 1$:

$$gI_L \lambda / \Delta\theta^2 \ll 1. \quad (9.38)$$

На пороге ВРМБ $gI_L L_c = G_{th}$, и это условие переписывается в виде $\Delta\theta^2 \gg G_{th}\lambda/L_c$. Если данное условие не выполнено, то в отражённом излучении возрастает доля необращённой компоненты, и качество ОВФ ухудшается. Таким образом, для реализации ОВФ в светопроводе необходимо уширять угловой спектр накачки примерно в $10^2 - 10^3$ раз над дифракционной расходимостью.

Светопровод позволяет поддерживать высокую плотность мощности накачки на большой длине взаимодействия, поэтому порог ВР оказывается сравнительно низким. Другое важное преимущество схемы со светопроводом состоит в том, что различные угловые компоненты накачки хорошо перемешиваются: наличие нескольких отражений от стенок светопровода позволяет добиться ОВФ с полностью когерентной огибающей. Однако, применение светопроводов для ОВФ часто ограничивается лучевой стойкостью последних. Второй способ создания ВРМБ-зеркала – фокусировка излучения накачки в объём рассеивающей среды (рис. 9.12б). Условия реализации ОВФ при фокусировке принципиально не отличаются от условий в светопроводе. Различие заключается лишь в изменении количественных требований на угловую расходимость пучка. Это связано с тем, что в отличие от светопровода при ОВФ сфокусированных пучков важную роль играют дифракционные потери обращенной к накачке стоксовой волны и зависимость коэффициента «бриллюэновского» усиления от поперечной координаты. Оптимальная структура обращенного поля устанавливается на основе баланса между процессами дифракции и усиления. Для сфокусированных пучков условия реализации эффекта ОВФ несколько ухудшаются по сравнению со светопроводом – превышение инкремента для обращенной структуры поля над инкрементом для необращенной $\approx 1,7$ вместо 2 у светопровода. Условие на угловую расходимость пучка снизу связано с тем же требованием малости усиления на длине продольной коррекции $gI_L \Delta z \ll 1$,

В отражённом от ОВФ-зеркала излучении всегда присутствует необращённая компонента. Качество коррекции aberrаций можно повысить, применяя пространственную фильтрацию отражённого света.

Рассмотрим, каким образом основные параметры лазерного излучения (ширина спектра, длительность и энергия импульса, степень деполяризации) влияют на возбуждение ВРМБ и качество обращения волнового фронта.

Длительность импульса. Порог ВРМБ возрастает при укорочении длительности импульса вследствие нестационарности процессов рассеяния (см. главу 8, раздел «ВРМБ-генерация»). С укорочением длительности импульса и возрастанием пороговой мощности ВРМБ усиливается конкуренция со стороны других нелинейных процессов типа оптического пробоя, самофокусировки, ВКР, обладающих существенно меньшими (на порядок и более) временами релаксации. Практически из-за этого не удается отражать при ВРМБ импульсы короче 1 – 5 нс. В то же время нестационарность рассеяния слабо сказывается на точности ОВФ дифракционно-ограниченных или близких к ним пучков. Для длинных лазерных импульсов ($\tau_p > 1$ мкс) также существуют конкурирующие с обратным ВРМБ нелинейные процессы: ВРМБ под малыми углами в попутном направлении и вынужденное тепловое рассеяние (ВТР), времена релаксации которых существенно превышают время релаксации гиперзвука для обратного ВРМБ.

Ширина спектра. Пороговый инкремент, а вместе с ним пороговая мощность зависят от ширины частотного спектра накачки $\Delta\omega_L$. Физической причиной такой зависимости является рассогласование временной структуры лазерной и стоксовой волн на длине $l = 2/(|v|\Delta\omega_L)$, вследствие чего они уже эффективно не интерферируют и усиление падает. В этой формуле $v = 1/u_L - 1/u_s$ – расстройка групповых скоростей взаимодействующих волн. В частности, для обратного вынужденного рассеяния $v = 2/u_L$. Если усиление на длине l велико, т. е. $g \cdot I_L \gg |v|\Delta\omega_L$, то преобразование успеет произойти еще до рассогласования временных структур и порог не зависит от ширины спектра накачки. В обратном случае инкремент падает, а пороговая интенсивность или мощность растут пропорционально превышению ширины спектра волны накачки над шириной линии спонтанного рассеяния, что может привести к возбуждению конкурирующих с ВРМБ паразитных эффектов (пробой, самофокусировка, ВКР и др.). Ширина спектра не влияет на точность ОВФ, если пространственная структура поля накачки не меняется во времени.

Поляризация. Деполяризация излучения в активных элементах лазеров, особенно работающих в импульсно-периодическом режиме, является еще одной причиной, влияющей на точность ОВФ. Если падающее на ВРМБ-зеркало излучение имеет неоднородную по поперечному сечению поляризацию, то каждая ортогональная поляризационная компонента накачки с соответствующей ей поляризационной компонентой стоксова излучения возбуждает в среде свою собственную гиперзвуковую решетку. Рассеяние волны с данной поляризационной компонентой не только на своей, но и на чужой решетке и является одной из причин снижения точности ОВФ. Второй причиной является нелинейная селекция наиболее сильной поляризационной компоненты, имеющей наибольший инкремент нарастания.

Список обозначений и сокращений

АЭ	активный элемент
ВКР	вынужденное комбинационное рассеяние
ВР	вынужденное рассеяние
ВРМБ	вынужденное рассеяние Манделъштама-Бриллюэна
ВРГВГ	внутрирезонаторная генерация второй гармоники
ВФ	волновой фронт
ГВГ	генерация второй гармоники
ГРЧ	генерация разностной частоты
ГСЧ	генерация суммарной частоты
ДАЭ	диафрагменный апертурный эффект
ДЗ	дальняя зона
ИК	инфракрасный
КМС	крупномасштабная самофокусировка
КПД	коэффициент полезного действия (эффективность)
ММС	мелкомасштабная самофокусировка
ОВФ	обращение волнового фронта
ПГС	параметрический генератор света
РДС-кристалл	кристалл с регулярной доменной структурой

<i>A</i>	комплексная амплитуда электрического поля (1.8)
B	магнитная индукция (1.1)
<i>C</i>	теплоёмкость (7.9)
<i>c</i>	скорость света в вакууме (1.1)
D	электрическая индукция (1.1), (1.2)
<i>d</i>	тензор диэлектрической восприимчивости второго порядка (2.33)
E	напряжённость электрического поля (1.1)
e	единичный вектор поляризации (1.8), (7.44)
<i>e</i>	элементарный заряд (1.29).
<i>F</i>	сила (2.4), (8.26), (8.50)
<i>G</i>	инкремент усиления (8.41), (8.70)
<i>g</i>	дисперсия групповой скорости (5.39), пространственная частота (3.24), коэффициент усиления ПГС (6.3), коэффициент усиления ВР (8.35)
H	напряжённость магнитного поля (1.1), (1.2)
<i>H</i>	коэффициент обращения ВФ (9.9)
<i>I</i>	интенсивность (1.14)
j	плотность тока (1.1)
k	волновой вектор (1.8)
<i>L</i>	длина (нелинейной среды) (1.43)
<i>L_c</i>	длина когерентности (1.46), длина резонатора (6.9)
<i>m</i>	масса (2.2)
<i>N</i>	плотность (число частиц в единице объёма) (2.13)
<i>n</i>	показатель преломления (1.37)

n_2	нелинейный коэффициент показателя преломления (7.6)
n_o, n_e	главные значения (обыкновенное и необыкновенное) показателя преломления в одноосном кристалле (4.4)
$n^e(\theta)$	необыкновенный показатель преломления в одноосном кристалле (4.5)
P	поляризация (дипольный момент единицы объема среды) (1.2), (2.1)
P	мощность (1.22)
p	дипольный момент (2.1), (8.46)
p	давление (8.4)
q	волновой вектор акустической волны (8.4)
R	радиус кривизны волнового фронта (1.20)
r	радиус-вектор (1.8)
r_0	боровский радиус (1.29)
S	вектор Пойнтинга (1.12)
T	температура (4.22), (7.9)
t	время
u	групповая скорость (5.38)
V	объем
v_s	скорость звука (8.11)
W	плотность энергии электромагнитного поля (1.12)
w	радиус пучка (1.20)
α	поляризуемость (8.47)
β	угол анизотропии (4.7)
Γ	инкремент пространственных колебаний (7.28), коэффициент затухания акустической волны (8.13)
γ	коэффициент затухания (2.2), нелинейный к-т показателя преломления (7.7)
γ_e	электрострикционный коэффициент (8.21)
δ	коэффициент поглощения по интенсивности (5.2), (7.9)
ε	диэлектрическая проницаемость (1.4)
η	КПД (эффективность преобразования) (3.39)
θ_c	угол синхронизма (4.11)
θ_0	дифракционный угол (1.23), (7.18)
κ	пространственная частота (3.18), (7.27), теплопроводность (7.9)
λ	длина волны (1.20)
ν	частота (6.9)
ρ	плотность (массы(8.1), заряда (1.1))
σ	коэффициент нелинейной связи (3.17)
τ_p	длительность импульса (5.45)
χ	электрическая восприимчивость (1.3)
$\chi_{ijk...}^{(n)}$	тензор электрической восприимчивости n -го порядка (1.25)
ω	циклическая частота (1.8)
Ω	циклическая частота акустической волны (8.4)

Векторные величины обозначаются жирным шрифтом, скалярные величины – курсивом.

Пример: $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Дифференциальные операторы

$$\nabla \equiv \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix}, \quad \Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Дивергенция:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

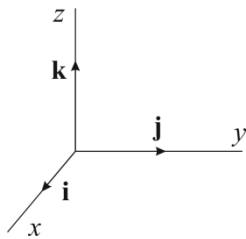
Градиент:

$$\operatorname{grad} A \equiv \nabla A \equiv \begin{bmatrix} \partial A/\partial x \\ \partial A/\partial y \\ \partial A/\partial z \end{bmatrix}$$

Ротор (циркуляция векторного поля):

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A} \equiv \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial A_z/\partial y - \partial A_y/\partial z \\ \partial A_x/\partial z - \partial A_z/\partial x \\ \partial A_y/\partial x - \partial A_x/\partial y \end{bmatrix}$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} – единичные векторы в направлении осей x , y , и z :



Лапласиан:

$$\Delta A \equiv \nabla^2 A \equiv \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$$

Приложение А – Единицы СИ и СГС в электродинамике

Физическая величина	Символ	Размерность		Единицы СИ	Кэф-фициент	Единицы СГС
		СИ	СГС			
Длина	l	l	l	метр (м)	10^2	см
Время	t	t	t	секунда (с)	1	с
Масса	m	m	m	килограмм (кг)	10^3	грамм (г)
Сила	F	ml/t^2	ml/t^2	ньютон (Н)	10^5	дина
Энергия	W	ml^2/t^2	ml^2/t^2	джоуль (Дж)	10^7	эрг
Интенсивность	I	m/t^3	m/t^3	ватт/м ²	10^3	эрг/см ² ·с
Заряд	q	q	$m^{1/2}l^{3/2}/t$	кулон (Кл)	$3 \cdot 10^9$	(ед. СГС)
Эл. потенциал	U	ml^2/t^2q	$m^{1/2}l^{1/2}/t$	вольт (В)	$1/3 \cdot 10^{-2}$	(ед. СГС)
Эл. ток	I	q/t	$m^{1/2}l^{3/2}/t^2$	ампер (А)	$3 \cdot 10^9$	(ед. СГС)
Сопротивление	R	ml^2/tq^2	t/l	Ом	$1/9 \cdot 10^{-11}$	с ² /см
Ёмкость	C	t^2q^2/ml^2	l	фарад (Ф)	$3 \cdot 10^{11}$	см
Индуктивность	L	ml^2/q^2	t^2/l	Генри (Гн)	$1/9 \cdot 10^{-11}$	с ² /см
Напряжённость электр. поля	E	ml/t^2q	$m^{1/2}/l^{1/2}t$	В/м	$1/3 \cdot 10^{-4}$	(ед. СГС)
Электрическая индукция	D	q/l^2	$m^{1/2}/l^{1/2}t$	Кл/м ²	$12\pi \cdot 10^5$	(ед. СГС)
Поляризация	P	q/l^2	$m^{1/2}/l^{1/2}t$	Кл/м ²	$3 \cdot 10^5$	(ед. СГС)
Напряжённость магн. поля	H	$q/l t$	$m^{1/2}/l^{1/2}t$	А/м	$4\pi \cdot 10^{-3}$	эрстед (Э)
Магнитная индукция	B	m/tq	$m^{1/2}/l^{1/2}t$	тесла (Тл)	10^4	гаусс (Гс)
Намагниченность	M	$q/l t$	$m^{1/2}/l^{1/2}t$	А/м	10^{-3}	эрстед

В данной таблице множители в коэффициентах перевода, пропорциональные тройке (3, 9, 1/3, 1/9), получаются в результате округления величины скорости света в вакууме до $3 \cdot 10^8$ м/с.

В СИ размерности составляющих электромагнитного поля различны:

$$[E] = \text{В/м}, \quad [D] = [P] = \text{Кл/м}^2, \quad [H] = [M] = \text{А/м}, \quad [B] = \text{Тл}.$$

В системе СГС все поля имеют одинаковую размерность, но по историческим причинам их единицы называются по-разному:

$$[E] = [D] = [H] = [B] = [P] = [M] = \text{ед. напр. СГС/см} = \text{ед. заряда СГС/см}^2 = \text{Гс} = \text{Э} = (\text{эрг/см}^3)^{1/2}$$

Приложение Б – Физические константы

Физическая величина	Символ	Значение	ед. СГС	ед. СИ
Постоянная Больцмана	k	1,3807	10^{-16} эрг/К	10^{-23} Дж/К
Число Авогадро	N_A	6,0221	10^{23} моль ⁻¹	
Элементарный заряд	e	4,8032	10^{-10} ед. СГС	
		1,6022		10^{-19} Кл
Масса электрона	m_e	9,1094	10^{-28} г	10^{-31} кг
Масса протона	m_p	1,6726	10^{-24} г	10^{-27} кг
Постоянная Планка	h $\hbar = h/2\pi$	6,6261	10^{-27} эрг·с	10^{-34} Дж·с
		1,0546		
Скорость света в вакууме	c	2,9979	10^{10} см/с	10^8 м/с
Боровский радиус	$r_0 = \hbar^2/me^2$	5,2918	10^{-9} см	10^{-11} м
Постоянная тонкой структуры	$\alpha = e^2/\hbar c^2$ α^{-1}	$7,2974 \cdot 10^{-3}$		
		137,04		
Длина волны фотона с энергией 1 эВ		1,2398	10^{-4} см	10^{-6} м
Частота фотона с энергией 1 эВ		2,4180	10^{14} Гц	
Волновое число фотона с энергией 1 эВ		8,0655	10^3 см ⁻¹	10^5 м ⁻¹
Энергия = 1 эВ		1,6022	10^{-12} эрг	10^{-19} Дж
Температура $kT = 1$ эВ		1,1604	10^4 К	

Константы, специфические для СИ:

Электрическая постоянная	ε_0	$8,8542 \cdot 10^{-12}$	Ф/м
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$	Гн/м

Приложение В – Уравнения электродинамики в системах СИ и СГС

Уравнение	СИ	СГС
Закон Кулона	$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}$	$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r}$
Уравнение Лоренца	$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$	$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$
Уравнения Максвелла	$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho,$ $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$ $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$ $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho,$ $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$ $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$ $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$
Материальные уравнения	$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$	$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$ $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}$
Материальные уравнения (линейные)	$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E}, \quad \mathbf{M} = \chi_m^{(1)} \mathbf{H}$ $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon^{(1)} \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu^{(1)} \mathbf{H}$ $\epsilon^{(1)} = 1 + \chi^{(1)}, \quad \mu^{(1)} = 1 + \chi_m^{(1)}$	$\mathbf{P} = \chi^{(1)} \mathbf{E}, \quad \mathbf{M} = \chi_m^{(1)} \mathbf{H}$ $\mathbf{D} = \epsilon^{(1)} \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu^{(1)} \mathbf{H}$ $\epsilon^{(1)} = 1 + 4\pi\chi^{(1)}, \quad \mu^{(1)} = 1 + 4\pi\chi_m^{(1)}$
Материальное уравнение (нелинейное)	$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\chi^{(1)} \mathbf{E} + \chi^{(2)} \mathbf{E}^2 + \chi^{(3)} \mathbf{E}^3 + \dots)$	$\mathbf{P} = \chi^{(1)} \mathbf{E} + \chi^{(2)} \mathbf{E}^2 + \chi^{(3)} \mathbf{E}^3 + \dots$
Плотность энергии электромагнитного поля	$w = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$	$w = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$
Вектор Пойнтинга	$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$	$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$
Интенсивность электромагнитной волны с амплитудой поля E	$I = \frac{n}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2$	$I = \frac{nc}{8\pi} E^2$

Приложение Г – Краткий русско-английский нелинейный словарь

Восприимчивость	χ	Susceptibility	
Проницаемость	ε	Permittivity	
Показатель преломления	n	Refractive index	
Генерация второй гармоники	ГВГ	Second-harmonic generation	SHG
Генерация суммарной частоты	ГСЧ	Sum-frequency generation	SFG
Генерация разностной частоты	ГРЧ	Difference-frequency generation	DFG
Оптическое выпрямление	ОВ	Optical rectification	OR
Параметрический генератор света	ПГС	Optical parametric oscillator	OPO
Накачка		Pump	
Сигнальная волна		Signal wave	
Холостая волна		Idler wave	
Фазовый синхронизм		Phase matching	PM
Двойное лучепреломление		Birefringence	
Одноосный кристалл		Uniaxial crystal	
Двухосный кристалл		Biaxial crystal	
Кристалл с регулярной доменной структурой	РДС	Periodically poled nonlinear crystal	PPNC
Самофокусировка		Self-focusing	
Фазовая самомодуляция		Self-phase modulation	SPM
Перекрестная фазовая модуляция		Cross-phase modulation	XPM
Вынужденное комбинационное рассеяние	ВКР	Stimulated Raman scattering	SRS
Вынужденное рассеяние Мандельштама-Бриллюэна	ВРМБ	Stimulated Brillouin scattering	SBS
Обращение волнового фронта	ОВФ	Phase conjugation	
Вырожденное четырёхволновое взаимодействие		Degenerate four-wave mixing	
Насыщающееся поглощение		Saturable absorption	

Предметный указатель

<p>В-интеграл..... 93</p> <p>Вектор Пойнтинга..... 8</p> <p>Вектор поляризации..... 8</p> <p>Волновое уравнение..... 7</p> <p style="padding-left: 20px;">нелинейное 10, 34, 60, 67, 90</p> <p style="padding-left: 20px;">параксиальное 9</p> <p>Волновой вектор..... 8</p> <p>Гауссов пучок 9, 63</p> <p>Генерация второй гармоники..... 12</p> <p>Генерация третьей гармоники..... 13</p> <p>Групповая скорость..... 67</p> <p>Групповой синхронизм..... 68</p> <p>Двойное лучепреломление 47</p> <p>Дисперсия групповой скорости 67</p> <p>Дифракционная длина 60</p> <p>Диэлектрическая восприимчивость..... 7</p> <p>Диэлектрическая проницаемость..... 7</p> <p>Длина когерентности 18</p> <p>Интенсивность..... 9</p> <p>Комплексная амплитуда 8</p> <p>Коэффициент обращения 124</p> <p>Кристаллическая решётка 28</p> <p>Кристаллы с регулярной доменной структурой 54</p> <p>Критическая мощность самофокусировки.. 88</p> <p>Магнитная индукция..... 6</p> <p>Материальные уравнения..... 7</p> <p>Мгновенная частота..... 98</p> <p>Напряжённость магнитного поля 6</p> <p>Напряжённость электрического поля..... 6</p> <p>Нелинейное уравнение Шрёдингера 100</p> <p>Оптическое выпрямление..... 12</p> <p>Параметрическая люминесценция..... 75</p> <p>Параметрический генератор света..... 75</p> <p style="padding-left: 20px;">бегущей волны 81</p> <p style="padding-left: 20px;">с синхронной накачкой..... 81</p> <p>Плоская монохроматическая волна..... 7</p> <p>Плотность энергии электромагнитного поля 8</p> <p>Показатель преломления 7</p> <p style="padding-left: 20px;">групповой 80, 101</p> <p style="padding-left: 20px;">индикатриса..... 47</p> <p style="padding-left: 20px;">необыкновенной волны 47</p> <p>Правило Миллера..... 24</p>	<p>Приближение заданного поля накачки</p> <p style="padding-left: 20px;">ГСЧ.....36</p> <p>Расстройка волновых векторов.....17, 35</p> <p style="padding-left: 20px;">при ГВГ40</p> <p>Самовоздействие света..... 13, 84</p> <p>Симметрия тензора восприимчивости</p> <p style="padding-left: 20px;">Клейнмановская.....26</p> <p style="padding-left: 20px;">относительно внутренних перестановок .25</p> <p style="padding-left: 20px;">полная перестановочная.....26</p> <p>Сокращённая запись тензора</p> <p style="padding-left: 20px;">восприимчивости.....26</p> <p>Солитон оптический100</p> <p>Субгармоника.....74</p> <p>Сферическая волна9</p> <p>Угол анизотропии48, 59</p> <p>Угол синхронизма.....49</p> <p>Уравнения Максвелла.....6</p> <p>Фазовая самомодуляция.....98</p> <p>Циклическая частота8</p> <p>Число Штреля.....125</p> <p>Ширина синхронизма</p> <p style="padding-left: 20px;">спектральная65, 71</p> <p style="padding-left: 20px;">температурная.....53, 71</p> <p style="padding-left: 20px;">угловая61, 71</p> <p>Электрическая индукция.....6</p> <p>Электрострикция.....85, 107</p> <p>Эллипсоид показателя преломления.....46</p> <p>Эллиптический синус Якоби43</p> <p>Эффект группового запаздывания импульсов</p> <p style="padding-left: 20px;">.....65</p> <p style="padding-left: 20px;">время запаздывания.....68</p> <p style="padding-left: 20px;">квазистатическая длина взаимодействия 68</p> <p>Эффект дисперсионного расплывания</p> <p style="padding-left: 20px;">импульсов.....65</p> <p style="padding-left: 20px;">время дисперсионного расплывания69</p> <p style="padding-left: 20px;">длина дисперсионного расплывания69</p> <p>Эффект Керра оптический85</p> <p>Эффективная апертурная длина59</p> <p>Эффективная длина нелинейного</p> <p style="padding-left: 20px;">взаимодействия.....42</p> <p>Эффективность преобразования частоты ...40, 43</p>
--	---

Литература

1. Дмитриев В. Г., Тарасов Л. В. Прикладная нелинейная оптика. М.: Физматлит, 2004.
2. Дмитриев В. Г. Нелинейная оптика и обращение волнового фронта. М.: Физматлит, 2003.
3. Гурздян Г. Г., Дмитриев В. Г., Никогосян Д. Н. Нелинейно-оптические кристаллы. Свойства и применение в квантовой электронике. М.: Радио и связь, 1991.
4. Цернике Ф., Мидвинтер Дж. Прикладная нелинейная оптика. М.: Мир, 1976.
5. Шен И. Р. Принципы нелинейной оптики. М.: Наука, 1989.
6. Мак А. А., Сомс Л. Н., Фромзель В. А., Яшин В. Е. Лазеры на неодимовом стекле. М.: Наука, 1990.
7. Зельдович Б. Я., Пилипецкий Н. Ф., Шкунов В. В. Обращение волнового фронта. М.: Наука, 1985.
8. Ахманов С. А., Никитин С. Ю. Физическая оптика. М.: Наука, 2004.
9. Ярив А., Юх П. Оптические волны в кристаллах. М.: Мир, 1987.
10. Boyd R. W. Nonlinear optics, 2nd ed. – 2003, 3rd ed. – 2007¹.
11. Sutherland R. L. Handbook of nonlinear optics, 2nd ed., 2003.
12. Агравал Г. Нелинейная волоконная оптика. М.: Мир, 1996.

¹ Второе издание – в системе СГС, третье – в системе СИ.