

**Саровский физико-технический институт —  
филиал федерального государственного автономного образовательного  
учреждения высшего образования «Национальный исследовательский  
ядерный университет «МИФИ»  
(СарФТИ НИЯУ МИФИ)**



**ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННОЙ ТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ  
Кафедра высшей математики**

**Н.В. Прокофьева**

**МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЗАЧЁТУ ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»**

**(1 семестр)**

***Учебно-методическое пособие***

---



**Утверждено  
Научно-методическим  
Советом СарФТИ**

**13 апреля 2018 г.**

Саров

2018г

Материалы для подготовки к зачёту по дисциплине «Математический анализ» (1 семестр): Учебно-методическое пособие / сост. Н.В. Прокофьева. - СарФТИ НИЯУ МИФИ.– Саров, 2018г. - 36 стр.

Учебно-методическое пособие предназначается для эффективной подготовки студентов СарФТИ НИЯУ МИФИ к зачёту по математическому анализу в первом семестре. Оно содержит программу по дисциплине «Математический анализ – 1», итоговый тренировочный тест среднего уровня сложности, вопросы и типовые задачи зачёта, образец исследования функции, а также справочный материал. Рекомендовано научно-методическим Советом СарФТИ для следующих направлений подготовки бакалавриата: 09.03.02. «Информационные системы и технологии», 15.03.03. «Прикладная механика», 11.03.03. «Конструирование и технология электронных средств», 12.03.01. «Приборостроение», 15.03.05. «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств».

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                      |    |
|----------------------------------------------------------------------|----|
| Программа дисциплины «Математический анализ – 1».....                | 4  |
| . Тренировочный тест по математическому анализу (1 семестр).....     | 8  |
| Вопросы к зачёту по математическому анализу (1 семестр).....         | 13 |
| Образец зачётной карточки по математическому анализу (1 семестр).... | 17 |
| Образец исследования функции .....                                   | 18 |
| Справочный материал.....                                             | 29 |
| Список рекомендуемой литературы.....                                 | 36 |

# **ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ - 1»**

## **Раздел I. Введение в анализ: множества, функции**

1. Логическая символика, кванторы. Необходимое условие, достаточное условие, критерий. Теорема как импликация. Прямая, обратная и противоположная теоремы, связь между ними. Действительные числа, их свойства. Числовые множества. Элементы алгебры множеств. Ограниченные множества.

2. Числовые функции. Способы задания функций. Область определения и множество значений функции. График функции. Сложная и обратная функции. Характеристики функций: четность и нечетность, периодичность, монотонность, ограниченность.

3. Основные элементарные функции. Элементарные функции и их свойства.

## **Раздел II. Предел и непрерывность**

4. Числовые последовательности. Способы задания последовательностей.

5. Предел последовательности и его свойства. Единственность предела последовательности. Ограниченность сходящейся последовательности. Переход к пределу в неравенствах, теорема о трех последовательностях. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их свойства. Свойства пределов, связанные с арифметическими действиями.

6. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса о существовании предела монотонной ограниченной последовательности. Число  $e$ .

7. Теорема Кантора о вложенных отрезках.

8. Окрестности конечной точки и бесконечности. Общее определение предела функции по Коши при произвольном стремлении аргумента.

Расшифровка определения и геометрическая интерпретация предела для конкретных случаев. Связь между пределами функции при двустороннем стремлении и соответствующих односторонних стремлений аргумента. Предел функции по Гейне. Общие свойства предела функции: 1) единственность предела; 2) замена переменной в пределе и предел сложной функции; 3) локальная ограниченность функции, имеющей предел; 4) локальная знакоопределенность функции, имеющей ненулевой предел; 5) предельный переход в неравенстве; 6) предел промежуточной функции.

9. Бесконечно малые функции при данном стремлении аргумента. Теорема о связи функции, ее предела и бесконечно малой, свойства бесконечно малых функций. Арифметические теоремы о пределах. Определение бесконечно большой функции при данном стремлении аргумента. Расшифровка и геометрическая интерпретация для конкретных стремлений. Связь бесконечно большой и бесконечно малой функций.

10. Замечательные пределы и их следствия.

11. Сравнение функций при данном стремлении, отношения эквивалентности и «о-малое», связь между ними, их свойства и применение для вычисления пределов. Порядок малости (или роста) одной функции относительно другой при данном стремлении. Главная часть функции стандартного вида при данном стремлении аргумента.

12. Непрерывность функции в точке, равносильные формулировки. Односторонняя непрерывность в точке. Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции. Непрерывность суммы, произведения, частного и композиции двух непрерывных функций. Теорема о непрерывности основных элементарных функций. Непрерывность элементарной функций в области её определения. Локальные свойства функции  $f(x)$ , непрерывной в точке  $x_0$ : локальная ограниченность и локальное знакопостоянство (если  $f(x_0) \neq 0$ ).

13. Непрерывность функции на промежутке. Теоремы о свойствах функции, непрерывной на отрезке. Теорема о непрерывности обратной

функции. Точки разрыва функции и их классификация. Нахождение асимптот графика функций.

### **Раздел III. Дифференциальное исчисление функций одной переменной**

14. Производная функции в точке, ее физический смысл. Уравнение касательной к графику функции. Геометрический смысл производной. Бесконечная производная и её геометрическая интерпретация. Дифференцируемость функции в точке, эквивалентность дифференцируемости существованию в точке конечной производной. Непрерывность дифференцируемой функции. Основные правила нахождения производных: производная постоянной, суммы, произведения и частного; производная сложной и обратной функций.

15. Вывод производных основных элементарных функций. Производные высших порядков. Механический смысл второй производной. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Правила вычисления дифференциалов. Инвариантность формы первого дифференциала. Применение дифференциалов к приближенным вычислениям. Дифференциалы высших порядков. Логарифмическая производная.

16. Локальный экстремум функции, теорема Ферма. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши для дифференцируемых функций.

17. Правило Лопиталя-Бернулли раскрытия неопределенностей вида  $0/0$  и  $\infty/\infty$ . Раскрытие неопределенностей других видов. Сравнение роста показательной, степенной и логарифмической функций в бесконечности.

18. Понятие многочлена Тейлора степени  $n$  для данной функции в точке  $x_0$ . Совпадение значений в точке  $x_0$  функции и её многочлена Тейлора, а также их первых  $n$  производных. Формула Тейлора (Маклорена) с остаточным членом в формах Лагранжа и Пеано. Разложение функций  $e^x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin x$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $(1+x)^\alpha$  по формуле Маклорена. Использование формул Тейлора и Маклорена в приближенных вычислениях и для нахождения пределов.

19. Достаточное условие монотонности дифференцируемой функции на промежутке. Экстремум функции. Необходимое условие экстремума. Стационарные и критические точки функции. Достаточные условия экстремума: (а) по первой производной, (б) по второй производной, (в) по производной высшего порядка.

20. Понятие выпуклости (вверх, вниз) функции (её графика) на промежутке. Достаточное условие выпуклости (графика) дважды дифференцируемой функции. Точки перегиба графика функции. Необходимое условие перегиба графика в точке, достаточное условие. Схема полного исследования и построения графика функции.

21. Схема полного исследования и построения графика функции.

**ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ТЕСТ**  
**ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ**  
**(1 СЕМЕСТР)**

1. Общий член последовательности 3, -5, 7, -9, ... имеет вид...

а)  $a_n = 2n - 1$                       б)  $a_n = (-1)^n \cdot (2n - 1)$                       в)  $a_n = (-1)^{n+1} \cdot (2n + 1)$

г)  $a_n = (-1)^n \cdot (2n + 1)$                       д)  $a_n = (-1)^{n-1} \cdot (2n - 1)$

2. Предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 7}{2x - 1}$  равен...

а) -0,5              б) 0              в) 0,5              г) -1              д)  $\infty$

3. Выберите две периодические функции с периодом 2 из представленных ниже

а)  $y = \operatorname{tg}(x - \pi/2)$               б)  $y = \operatorname{tg}(\pi x/2)$               в)  $y = \cos(\pi x/2)$

г)  $y = \sqrt{3} \operatorname{ctg}(2\pi x)$               д)  $y = \sqrt{3} \sin(2\pi x)$ .

4. Формулировкой необходимого условия экстремума функции одной переменной является...

а) теорема Ролля;    б) теорема Ферма;    в) теорема Лагранжа;    г) теорема Коши;  
д) теорема о непрерывности дифференцируемой функции.

5. Выберите правильное утверждение

а) Если функция непрерывна на отрезке, то она имеет обратную функцию.

б) Если функция строго монотонна на отрезке, то она имеет обратную функцию на этом отрезке.

в) Если функция отлична от нуля на отрезке, то она имеет обратную функцию.

г) Если функция ограничена на отрезке, то она имеет обратную функцию.

д) Если функция дифференцируема на отрезке, то она имеет обратную функцию.

6. Выберите правильное утверждение

а) Если функция непрерывна на интервале, то она дифференцируема на нем.

б) Если функция ограничена на отрезке, то она непрерывна на нем.

в) Если функция дифференцируема на интервале, то она непрерывна на нем.

г) Если функция непрерывна на интервале, то она ограничена на нем.



д) Если функция монотонна на отрезке, то она непрерывна на нем.

**7. Выберите правильное утверждение**

а) Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на нем.

б) Если функция непрерывна на отрезке, то она имеет обратную функцию.

в) Если функция отлична от нуля на отрезке, то она имеет обратную функцию.

г) Если функция ограничена на отрезке, то она имеет обратную функцию.

д) Если функция дифференцируема на отрезке, то она имеет обратную функцию.

**8. Выберите правильное утверждение**

а) Если функция непрерывна на интервале, то она дифференцируема на нем.

б) Если функция ограничена на отрезке, то она непрерывна на нем.

в) Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нем наибольшего и наименьшего значений.

г) Если функция непрерывна на интервале, то она ограничена на нем.

д) Если функция монотонна на отрезке, то она непрерывна на нем.

**9. Закон движения материальной точки имеет вид  $x(t) = 1 + 12t + e^{5-t}$ , где**

$x(t)$  - координата точки в момент времени  $t$ . Тогда скорость точки при  $t = 5$  равна...

а) 13      б) 9      в) 65      г) 11      д) 75

**10. Предел  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x - 1}{x^3 + 1}$  равен... (напишите ответ \_\_\_\_\_)**

**11. Предел  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2 + x^2}}{7 + 2x}$  равен... (напишите число \_\_\_\_\_)**

**12. Предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$  равен... (напишите число \_\_\_\_\_)**

**13.  $\frac{d}{dx}(\sin^2(1 - x^2))$  равна...**

а)  $-4x \cdot \cos(1 - x^2) \cdot \sin(1 - x^2)$       б)  $2x \cdot \cos(1 - x^2) \cdot \sin(1 - x^2)$       в)  $4x \cdot \cos(1 - x^2) \cdot \sin(1 - x^2)$

г)  $2\sin(1 - x^2)$       д)  $-2x \cdot \sin(1 - x^2)$

14. Для производной  $y'(x)$  неявной функции, заданной уравнением  $y - e^y = 10$ , справедливо соотношение...

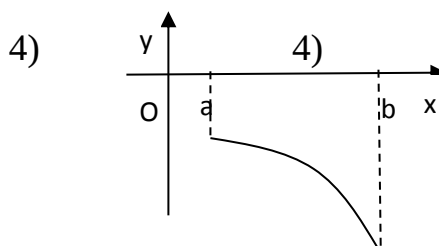
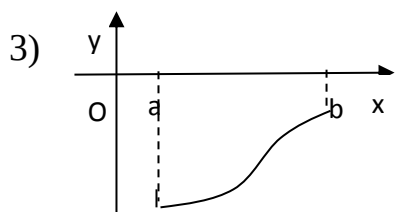
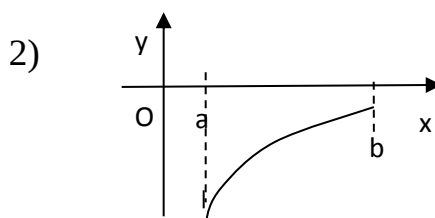
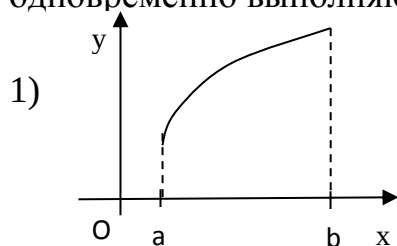
- а)  $y'(x) = e^x$     б)  $y'(x) = 0$     в)  $y'(x) = e^y$     г)  $y'(x) = e^y - 1$     д)  $y'(x) = 1/(1 - e^y)$

15. Если  $y = (x^4 - 7x)e^x$ , то  $y'(0) = \dots$  (напишите число \_\_\_\_\_).

16. Если  $y = x^{3x}$ , то  $y'(1) = \dots$  (напишите число \_\_\_\_\_).

17. Если  $y = -2\ln(2x^3 - 3)$ , то  $y'(1) = \dots$  (напишите число \_\_\_\_\_).

18. Укажите вид графика функции, для которой на всем промежутке  $[a, b]$  одновременно выполняются условия:  $y < 0$ ,  $y' > 0$ ,  $y'' < 0$ .



Варианты ответа:

- а) только 3 и 4    б) только 4    в) только 2    г) только 1    д) только 3

19. Горизонтальной асимптотой графика функции  $y = \frac{9x}{3x+6}$  является прямая...

- а)  $y = 3$     б)  $x = 0$     в)  $y = 1/3$     г)  $x = 3$     д)  $y = -3$

20. Вертикальной асимптотой графика функции  $y = \frac{1+4x}{x-2}$  является прямая...

- а)  $y = 4$     б)  $x = 2$     в)  $y = 1$     г)  $x = -2$     д)  $y = 2$

21. Угловым коэффициентом наклонной асимптоты графика функции  $y = \frac{x^2 - 2}{2x + 3}$

равен...(напишите число\_\_\_\_\_)

22. Минимум функции  $y = 3\ln(x^2 + 1)$  равен... (напишите число\_\_\_\_\_)

23. Функция  $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 20$  имеет локальный минимум при  $x$  равном...  
(напишите число\_\_\_\_\_).

24. График функции  $y = x^3 + 24x^2 + 8x - 27$  имеет точку перегиба при  $x$  равном...  
(напишите число\_\_\_\_\_).

25. Уравнение касательной к графику функции  $y = 1 - x^2$  в точке с абсциссой  $x_0 = 1$  имеет вид...

- а)  $y = 1 - 2x$       б)  $y = 2 + 2x$       в)  $y = 2 - 2x$       г)  $y = 2x - 2$       д)  $y = 1$

26. Функция  $y = \frac{3}{x} + \frac{1}{x+3} + \frac{2x}{x-4} + \operatorname{tg} x$  имеет на отрезке  $[-1; 2]$ ...

- а) одну точку разрыва первого рода и две точки разрыва второго рода;  
б) одну точку разрыва первого рода и три точки разрыва второго рода;  
в) одну точку устранимого разрыва и две точки разрыва второго рода;  
г) одну точку устранимого разрыва и одну точку разрыва второго рода;  
д) две точки разрыва второго рода.

27. Если  $y = x^3 - 1$ , то коэффициент  $a_4$  разложения данной функции в ряд Тейлора по степеням  $(x - 1)$  равен...

- а) 0      б) 3      в) 1      г) 0,25      д) 1/2

28. Множество значений функции  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$  есть промежуток...

- а)  $(0, +\infty)$       б)  $(-\infty, 2)$       в)  $[-1, 1)$       г)  $(0, 1)$       д)  $(-1, 1)$

29. Предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^3 + 5}$  равен...

- а) 0      б)  $+\infty$       в) 1      г) -1      д) 1/2

30. Наибольшее значение функции  $y = x - 4\sqrt{x} + 5$  на отрезке  $[1; 9]$  равно...  
(напишите число\_\_\_\_\_).

31. Остаточный член формулы Маклорена порядка  $n$  в форме Пеано для функции  $y = e^x$  имеет вид...

- а)  $o(x^n)$     б)  $R_n(x)$     в)  $R_n(x,0)$     г)  $\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$     д)  $\frac{e^{\theta x}}{n!} x^{n+1} (1-\theta)^n$

32. Областью определения функции  $y = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  является...

- а)  $(0, +\infty)$     б)  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$     в)  $(-1, 1)$     г)  $[-1, 1]$     д)  $(1, +\infty)$

33. Предел  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x+3}{x-2} \right)^{x+3}$  равен...

- а) 0    б)  $+\infty$     в)  $e^4$     г)  $e^3$     д)  $e^5$

34. На числовой прямой дана точка  $x = 5,1$ . Тогда её « $\varepsilon$ -окрестностью» может являться интервал ...

- а)  $(4,9; 5,3)$     б)  $(4,9; 5,5)$     в)  $(5,1; 5,4)$     г)  $(4,8; 5,1)$     д)  $(5; 5,3)$

35. Дифференциал функции  $y = 10x^3 + 2x$  в точке  $x = 2$  при  $\Delta x = 0,1$  равен...  
(напишите ответ \_\_\_\_\_)

36. Функция  $f(x) = \sqrt[5]{\lg(\sin x^2)}$  является композицией нескольких функций

- а) четырех    б) трех    в) пяти    г) двух    д) шести

## ВОПРОСЫ К ЗАЧЁТУ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

### (1 семестр)

1. Запишите с помощью кванторов определения следующих понятий: а) множества, ограниченного сверху (снизу); б) неограниченного множества.
2. Дайте определение функции. Какие функции называются основными элементарными? Какие функции называются элементарными?
3. Дайте определение чётной и нечётной функции. Может ли функция быть четной, если её областью определения является промежуток  $(-1; 1]$ ?
4. Четной или нечетной функцией является произведение: а) двух нечетных функций; б) двух четных функций; в) четной и нечетной функций?
5. Приведите пример функции с областью определения  $(0; +\infty)$ , которая является: а) ограниченной снизу; б) ограниченной сверху; в) ограниченной.
6. Какая функция называется периодической?
7. Дайте определение сложной функции. Найдите функции  $f(\varphi(x))$ ,  $\varphi(f(x))$ , если  $f(x) = 2x^2 - 1$  и  $\varphi(x) = \sqrt{3x - 1}$ .
8. Что называется графиком функции? Закончите фразу: «График функции  $y = f(x - a) + b$  может быть получен из графика функции  $y = f(x)$  при помощи следующих геометрических преобразований: ...».
9. Закончите фразу: «График функции  $y = Af(ax)$  может быть получен из графика функции  $y = f(x)$  при помощи следующих геометрических преобразований: ...».
10. Дайте определение того, что последовательность  $\{a_n\}$  является:  
а) возрастающей; б) убывающей; в) ограниченной сверху (снизу); г) ограниченной; д) монотонной.
11. Приведите пример последовательности, которая: а) ограничена снизу, но не является ограниченной сверху; б) ограничена сверху, но не является ограниченной снизу.

12. Что называется окрестностью точки? Какая окрестность называется проколотой?

13. Приведите пример ограниченной последовательности, которая не является сходящейся.

14. Сформулируйте, что означает утверждение: «последовательность не является сходящейся».

15. Какая последовательность называется бесконечно малой (б.м)? Сформулируйте все свойства б.м.

16. Какая последовательность называется бесконечно большой?

17. Сформулируйте с помощью кванторов следующие утверждения:

$$а) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \quad б) \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A; \quad в) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty,$$

$$г) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad д) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A.$$

Сделайте соответствующие рисунки.

18. Какая связь между бесконечно большой и бесконечно малой функциями при  $x \rightarrow \infty$ .

19. Всякая ли бесконечно большая функция является неограниченной? А всякая ли неограниченная функция является бесконечно большой?

20. Докажите, что если функция  $\alpha(x)$  бесконечно мала при  $x \rightarrow +\infty$ , то функция  $2\alpha^2(x) + \alpha(x) \cdot \sin(4x)$  бесконечно мала при  $x \rightarrow +\infty$ .

21. Какие бесконечно малые называются эквивалентными? Приведите примеры эквивалентно малых при  $x \rightarrow 0$ ; при  $x \rightarrow \infty$ ; при  $x \rightarrow \pi$ .

22. Как используются эквивалентно малые при вычислении пределов?

23. Какие пределы называются замечательными?

24. При вычислении пределов функций с какими видами неопределенностей можно встретиться? Какие существуют приемы раскрытия неопределенностей?

25. Дайте определение непрерывности функции в точке и на отрезке.

26. Какая точка для функции  $f(x)$  называется точкой её разрыва? Какие типы точек разрыва вы знаете?

27. В каком случае справедливо равенство  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow a} f(x))$ ?

28. Функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Следует ли отсюда, что уравнение  $f(x) = 0$ : а) имеет корень на отрезке  $[a, b]$ ; б) имеет единственный корень на отрезке  $[a, b]$ ?
29. Что такое приращение аргумента и приращение функции?
30. Сформулируйте определение производной.
31. Сформулируйте определения левой и правой производных в точке.
32. Приведите пример функции, которая имеет разные левую и правую производные. Обоснуйте.
33. Опираясь на понятие левой и правой производных в точке, сформулируйте необходимое и достаточное условие существования производной в точке.
34. Какова связь между непрерывностью функции в точке и существованием конечной производной в этой точке?
35. Какая функция называется дифференцируемой в точке?
36. Сформулируйте необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке.
37. Что такое дифференциал функции? аргумента?
38. Какова связь между дифференциалом и приращением функции?
39. Представьте производную через дифференциалы аргумента и функции.
40. Приведите правила вычисления производных и дифференциалов.
41. Приведите таблицу производных.
42. В чём заключается инвариантность формы первого дифференциала?
43. Запишите уравнение касательной и нормали к кривой.
44. В чём заключается геометрический смысл производной?
45. Как ведёт себя функция в точке, в которой и левая, и правая производные бесконечны?
46. В чём заключается геометрический смысл дифференциала?
47. Сформулируйте определение производной второго порядка.
48. Сформулируйте правило Лопиталя. На какие типы неопределённостей распространяется правило Лопиталя?

49. Каков алгоритм нахождения производной функции, заданной в неявном виде?
50. Как найти первую и вторую производную функции, заданной параметрически?
51. Сформулируйте достаточное условие возрастания (убывания) функции.
52. Дайте определение экстремума функции.
53. Сформулируйте необходимое условие экстремума функции.
54. Сформулируйте достаточное условие (первое и второе) экстремума функции.
55. Каков алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.
56. Дайте определение выпуклости и вогнутости функции.
57. Сформулируйте достаточное условие выпуклости (вогнутости) функции.
58. Дайте определение точки перегиба функции.
59. Сформулируйте необходимое и достаточное условия перегиба функции.
60. Дайте определение асимптот графика функции (вертикальные, горизонтальные, наклонные).
61. Какова общая схема исследования функции?
62. Проведите сравнение показательной, логарифмической и степенной функций по скорости роста при  $x \rightarrow +\infty$ .
63. Приведите в общем виде формулы Тейлора и Маклорена разложения функции в степенной ряд.
64. Разложите функции  $e^x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin x$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $(1+x)^\alpha$  в степенной ряд по формуле Маклорена.



**ОБРАЗЕЦ ЗАЧЁТНОЙ КАРТОЧКИ**  
**ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ**

**(1 семестр)**

1. Доказать, что последовательность  $\left\{\frac{1}{2n+3}\right\}$  является бесконечно малой.
2. Вычислить следующие пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1}$  ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-2x}$  ; в)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 3x}{\sin^2 7x}$

3. Найти производную  $y'(x)$  следующих функций:

а)  $y = \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} + x^{5/x}$

б)  $y = \ln(3\cos x + 6^x) + x^5 \cdot \log_2^4(1 + 5x)$

в)  $y = \arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^4}$

г)  $y^2 \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos y = 0$

4. Провести полное исследование функции и построить её график:

$y = (x - 1)e^{2x}$ .

5. Дополнительные вопросы преподавателя (см. стр. 11-14).

## **ОБРАЗЕЦ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЯ ЕЁ ГРАФИКА**

Для чего нужно исследование функции, если есть множество сервисов, которые построят график онлайн для самых сложных функций? Для того, чтобы узнать свойства и особенности данной функции: как она ведет себя на бесконечности, насколько быстро меняет знак, как плавно или резко возрастает или убывает, куда направлены «горбы» выпуклости, где не определены значения и т.п. Затем на основании этих «особенностей» строится эскиз графика.

### **Схема исследования функции**

1. Найти ООФ.
2. Выяснить, будет ли функция чётной или нечётной.
3. Выяснить, будет ли функция периодической (только для тригонометрических функций).
4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
5. Найти точки разрыва функции и определить их характер.
6. Найти асимптоты графика функции, исследовать поведение функции вблизи граничных точек области определения и на бесконечности.
7. Определить интервалы возрастания, убывания и экстремумы функции; вычислить значение функции в точках максимума и минимума.
8. Определить интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции, найти значения функции в точках перегиба.
9. На основании полученных результатов построить эскиз графика функции.

**Пример 1.** Провести полное исследование и построить график функции

$$y = \frac{x^2}{x-1}.$$

**Решение.** 1) Функция существует всюду, кроме точки  $x = 1$ , т.е. область определения функции  $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ .

2) Функция не является ни чётной, ни нечётной, т.к.  $f(-x) = \frac{(-x)^2}{-x-1} = -\frac{x^2}{x+1}$  и

$f(-x) \neq f(x)$ ,  $f(-x) \neq -f(x)$ . Следовательно, график данной функции не является симметричным относительно оси  $Oy$  или начала координат.

3) Функция непериодична.

4) а)  $f(x) \cap Ox$ :  $\frac{x^2}{x-1} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(x) \cap Ox = O(0;0)$ .

б)  $f(x) \cap Oy$ :  $f(0) = 0 \Rightarrow f(x) \cap Oy = O(0;0)$ .

5) В точке  $x = 1$  функция имеет разрыв 2-го рода, т.к.

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty.$$

6) а) Так как точка  $x = 1$  – точка разрыва второго рода, то прямая  $x = 1$  – вертикальная асимптота.

б) Исследуем поведение кривой при  $x \rightarrow \pm \infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x-1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{поделим и числитель,} \\ \text{и знаменатель дроби на } x^2 \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{поделим и числитель,} \\ \text{и знаменатель дроби на } x^2 \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = +\infty.$$

Следовательно, горизонтальных асимптот нет.

**в)** Выясним, имеет ли функция наклонную асимптоту вида  $y = kx + b$ .

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \Rightarrow$$

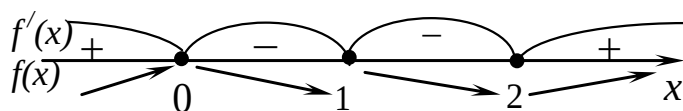
$\Rightarrow y = x + 1$  – наклонная асимптота при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

7) Находим первую производную  $y' = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

и приравниваем её к нулю:  $\frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0$ .

Критические точки функции 1-го рода:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$ . В точке  $x = 1$  и сама функция, и производная не определены.

Методом интервалов найдём интервалы монотонности функции и точки экстремума:



Функция убывает на интервалах  $(0; 1)$  и  $(1; 2)$  и возрастает на интервалах  $(-\infty; 0)$  и  $(2; +\infty)$ . Точка  $x = 0$  – точка максимума;  $x = 2$  – точка минимума.

$$y_{\max} = y(0) = 0, \quad y_{\min} = y(2) = 4.$$

**8)** Чтобы исследовать график на выпуклость и вогнутость, найдём  $y''$ :

$$y'' = \left( \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)((x-1)^2 - (x^2-2x))}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

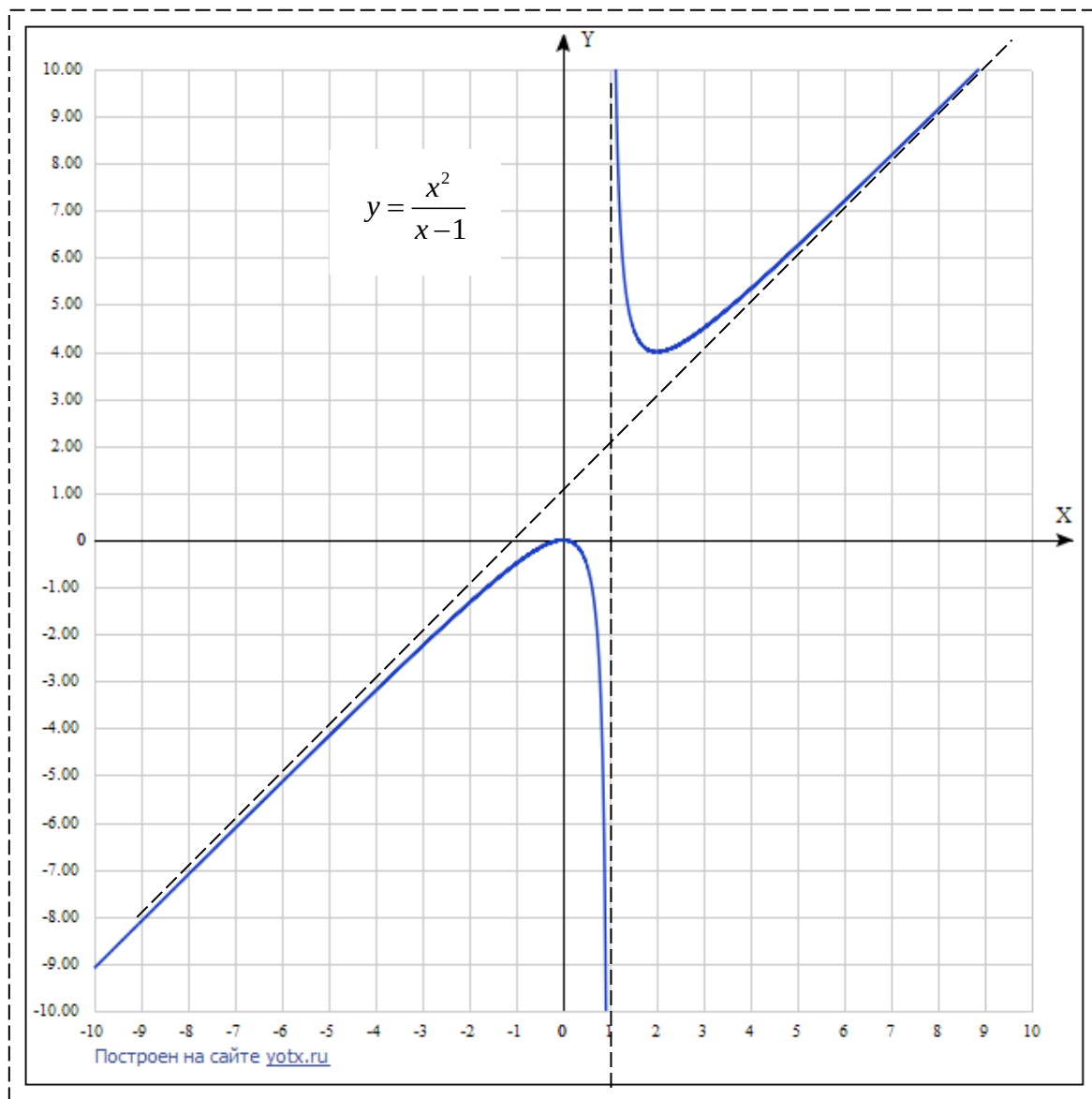
Заметим, что  $y''$  не существует при  $x=1 \notin D(y)$ , поэтому критических точек второго рода нет.

Методом интервалов найдём интервалы выпуклости и точки перегиба:



На интервале  $(-\infty; 1)$  график обращён вогнутостью вверх, а на интервале  $(1; +\infty)$  – вогнутостью вниз. Точек перегиба нет.

9) На основании проведенного исследования строим следующий график:



**Пример 2.** Провести полное исследование и построить график функции  $y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$ .

**Решение. 1)** Область определения функции  $D(y) = \mathbb{R}$ .

**2)** Область определения функции симметрична относительно начала координат, но  $f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^3 - 6(-x)^2} = \sqrt[3]{-x^3 - 6x^2} \Rightarrow f(-x) \neq f(x)$  и  $f(-x) \neq -f(x)$ .

Имеем функцию общего вида. Следовательно, её график не является симметричным относительно оси  $Oy$  или начала координат.

**3)** Функция неперiodична.

**4)** Найдем точки пересечения графика с осями координат.

a)  $f(x) \cap Ox: \quad \sqrt[3]{x^3 - 6x^2} = 0 \Rightarrow x^2 \cdot (x - 6) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \cap Ox = O(0; 0)$  или  $f(x) \cap Ox = A(6; 0)$

б)  $f(x) \cap Oy: \quad f(0) = 0 \Rightarrow f(x) \cap Oy = O(0; 0).$

**5)** Судя по области определения функции, данная функция не имеет точек разрыва. Следовательно, график функции не имеет вертикальных асимптот.

**6)** Исследуем поведение кривой при  $x \rightarrow \pm\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 - 6x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2(x - 6)} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^3 - 6x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2(x - 6)} = -\infty.$$

Следовательно, горизонтальных асимптот нет.

Функция определена при сколь угодно больших  $x$ . Следовательно, возможно существование наклонных асимптот.

При  $x \rightarrow +\infty$  имеем:  $k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 6x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{x} \right) = 1,$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k_1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 - 6x^2} - 1 \cdot x) = [+ \infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 6x^2} - x}{1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3 - 6x^2} - x) \left( (\sqrt[3]{x^3 - 6x^2})^2 + x \cdot \sqrt[3]{x^3 - 6x^2} + x^2 \right)}{\left( (\sqrt[3]{x^3 - 6x^2})^2 + x \cdot \sqrt[3]{x^3 - 6x^2} + x^2 \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 6x^2 - x^3}{(\sqrt[3]{x^3 - 6x^2})^2 + x \cdot \sqrt[3]{x^3 - 6x^2} + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-6x^2}{3x^2} \right) = -2.$$

Следовательно, прямая  $y = x - 2$  является наклонной асимптотой правой части графика функции. Та же прямая  $y = x - 2$  будет наклонной асимптотой и для левой части графика функции, так как при вычислении

$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 6x^2}}{x}$  и  $b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - k_2 \cdot x)$  мы будем в точности повторять

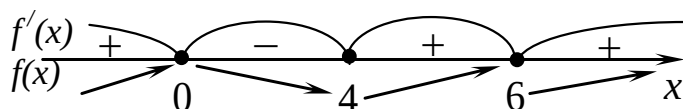
все действия, выполненные при вычислении  $k_1$  и  $b_1$ .

7) Найдем производную функции и критические точки первого рода.

$$\text{Имеем: } y' = \left( \sqrt[3]{x^3 - 6x^2} \right)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2 - 12x}{\sqrt[3]{(x^3 - 6x^2)^2}} = \frac{x - 4}{\sqrt[3]{x \cdot (x - 6)^2}},$$

$$\Rightarrow \text{а) } y' = 0 \text{ при } x = 4; \quad \text{б) } y' \notin \text{ при } x = 0 \text{ и } x = 6.$$

Таким образом, критическими точками первого рода являются точки  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 4$ ,  $x_3 = 6$ . Критические точки разбивают область определения функции на четыре части. Определим знак производной в каждой из них.



Функция возрастает на интервалах  $(-\infty; 0)$ ,  $(4; +\infty)$  и убывает на интервале  $(0; 4)$ . Точка  $x = 0$  – точка максимума, точка  $x = 4$  – точка минимума.

$$y_{\max} = y(0) = 0, \quad y_{\min} = y(4) = -\sqrt[3]{32} \approx -3,2.$$

Т.к. в точке  $x = 0$  производная не существует, то найдем в этой точке односторонние производные.

$$\begin{aligned} y'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 6x^2} - \sqrt[3]{0^3 - 6 \cdot 0^2}}{x - 0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 6x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sqrt[3]{x^3(1 - 6/x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x \cdot \sqrt[3]{1 - 6/x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \sqrt[3]{1 - 6/x} = +\infty; \end{aligned}$$

$$y'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 6x^2} - \sqrt[3]{0^3 - 6 \cdot 0^2}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 6x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt[3]{1 - 6/x} = -\infty.$$

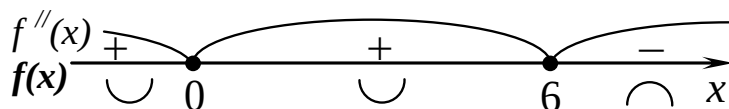
Следовательно, в точке  $x = 0$  имеем точку возврата функции, причем график функции касается прямой  $x = 0$  с двух сторон.

**8)** Найдем вторую производную функции и критические точки второго рода:

$$y'' = \left( \frac{x-4}{\sqrt[3]{x \cdot (x-6)^2}} \right)' = \frac{1 \cdot \sqrt[3]{x \cdot (x-6)^2} - (x-4) \cdot \frac{(x-6)^2 + x \cdot 2 \cdot (x-6)}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot (x-6)^4}}}{\sqrt[3]{x^2 \cdot (x-6)^4}} = -\frac{8}{\sqrt[3]{x^4 \cdot (x-6)^5}}$$

$$\Rightarrow \text{а) } y'' \neq 0 \text{ при } \forall x \in D(y); \quad \text{б) } y'' \nexists \text{ при } x = 0 \text{ и } x = 6.$$

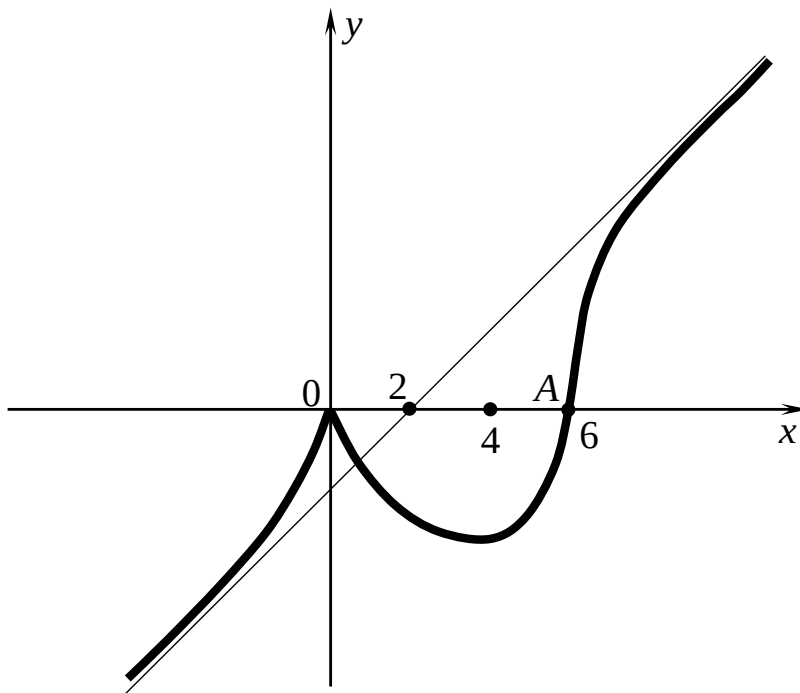
Таким образом, критическими точками второго рода являются точки  $x = 0$ ,  $x = 6$ .



Следовательно, график функции выпуклый на интервале  $(6; +\infty)$  и вогнутый на интервале  $(-\infty; 6)$ . Точка  $A(6; 0)$  – точка перегиба графика функции.



9) На основании проведенного исследования строим следующий график:



**Пример 3.** Провести полное исследование и построить график функции  $y = \frac{1}{\ln x}$ .

**Решение.** 1) Область определения функции  $D(y) = (0; +\infty) \setminus \{1\}$ .

2) Область определения функции не симметрична относительно начала координат. Следовательно, функция общего вида, и её график не является симметричным относительно оси  $Oy$  или начала координат.

3) Функция неперiodична.

4) а) Так как  $\frac{1}{\ln x} \neq 0$ , то график функции не пересекает ось  $Ox$ .

б) Так как  $0 \notin D(y)$  то график функции не пересекает ось  $Oy$ .

5) Функция имеет одну точку разрыва  $x = 1$ . Определим её тип:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{\ln x} = \left[ \frac{1}{\ln(1-0)} \right] = \left[ \frac{1}{-0} \right] = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{\ln x} = \left[ \frac{1}{\ln(1+0)} \right] = \left[ \frac{1}{+0} \right] = +\infty.$$

Следовательно, точка  $x = 1$  - точка разрыва 2-го рода. Поэтому прямая  $x = 1$  – вертикальная асимптота графика функции.

6) Исследуем поведение данной функции на границе области определения:

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\ln x} = \left[ \frac{1}{\ln(+0)} \right] = \left[ \frac{1}{-\infty} \right] = 0$$

Функция определена при сколь угодно больших положительных  $x$ . Следовательно, возможно существование наклонной асимптоты для правой части графика. Имеем:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x} = \left[ \frac{1}{+\infty} \right] = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\ln x} - 0 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = \left[ \frac{1}{+\infty} \right] = 0.$$

Следовательно, прямая  $y = 0 \cdot x + 0$  (т.е. прямая  $y = 0$ ) является горизонтальной асимптотой правой части графика функции.

7) Найдем производную функции и критические точки первого рода. Имеем:

$$y' = \left( \frac{1}{\ln x} \right)' = - \frac{1}{x \cdot \ln^2 x},$$

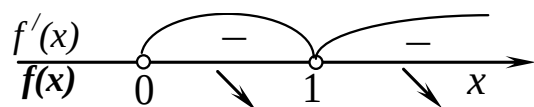
$$\Rightarrow \text{а) } y' \neq 0 \text{ при } \forall x \in D(y);$$

$$\text{б) } y' \nexists \text{ при } x = 0 \notin D(y) \text{ и при } x = 1 \notin D(y).$$

Таким образом, данная функция критических точек первого рода не имеет. Значит, функции не имеет экстремумов.

Точка разрыва  $x=1$  разбивает область определения функции на две части.

Определим знак производной в каждой из них. Получим:



Следовательно, функция убывает на интервалах  $(0;1)$  и  $(1;+\infty)$ .

**8)** Найдем вторую производную функции и критические точки второго рода.

Имеем:

$$y'' = \left( -\frac{1}{x \cdot \ln^2 x} \right)' = \frac{\ln^2 x + x \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}}{x^2 \cdot \ln^4 x} = \frac{2 + \ln x}{x^2 \cdot \ln^3 x},$$

$$\Rightarrow \text{а) } y'' = 0 \text{ при } x = e^{-2} \approx 0,1;$$

$$\text{б) } y'' \nexists \text{ при } x = 0 \notin D(y) \text{ и при } x = 1 \notin D(y).$$

Таким образом, критической точкой второго рода является точка  $x = e^{-2}$ .

Критическая точка  $x = e^{-2}$  и точка разрыва  $x=1$  разбивают область определения функции на три части. Определим знак второй производной в каждой из них.

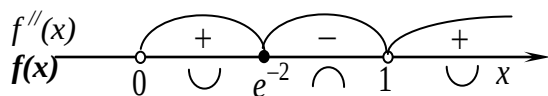
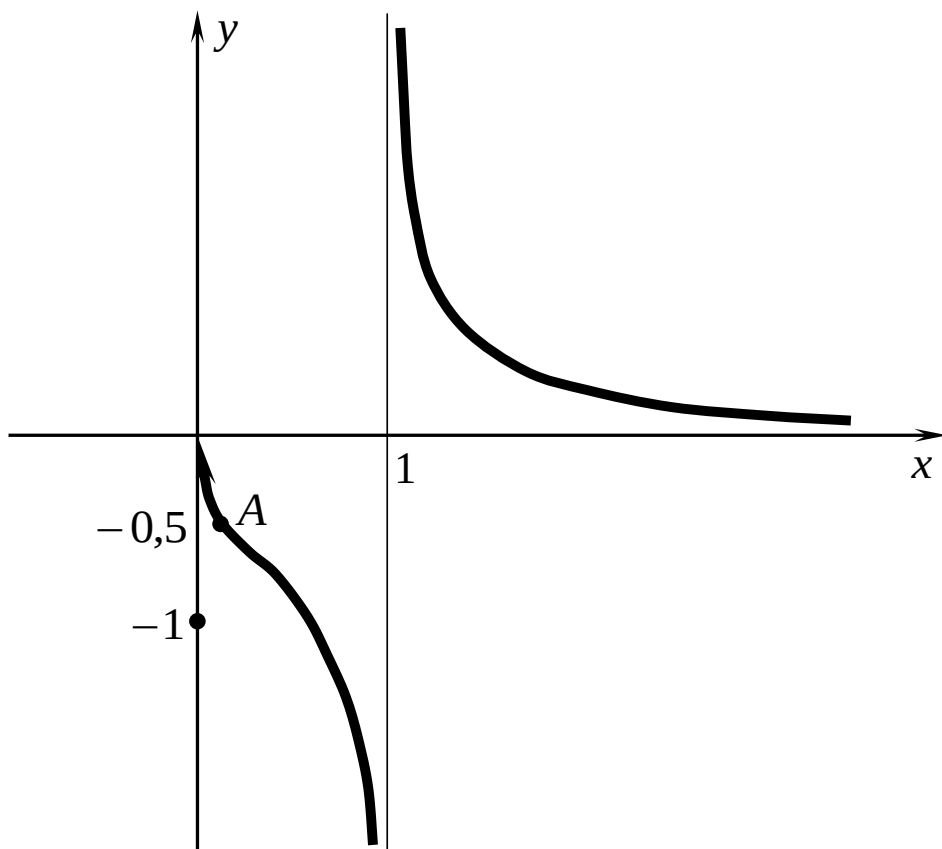


График функции выпуклый на интервале  $(e^{-2};1)$ , а вогнутый на интервалах  $(0; e^{-2})$  и  $(1;+\infty)$ . Точка  $A(e^{-2}; -0,5)$  – точка перегиба.

**9)** На основании проведенного исследования строим следующий график:



## СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

### I. Основные элементарные функции

1) степенная:  $y = x^\alpha$ ,  $\alpha \in R$ .

2) логарифмическая:  $y = \log_a x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

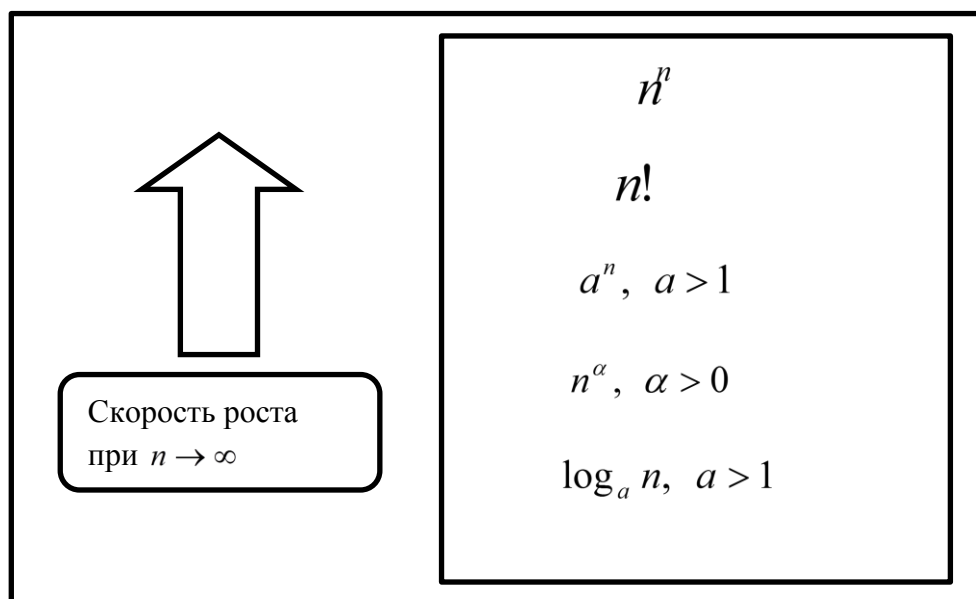
3) показательная:  $y = a^x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

4) тригонометрические:  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$ .

5) обратные тригонометрические:  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = \operatorname{arctg} x$ ,  
 $y = \operatorname{arcctg} x$ .

### II. Шкала роста бесконечно больших числовых последовательностей

Бесконечно большие (б.б.) последовательности можно сравнивать *по скорости роста* с увеличением номера  $n$ .



Диаграмму надо понимать так: отношение любых 2-х включенных в нее б.б. имеет пределом 0, если его числитель расположен в изображаемой шкале ниже знаменателя (т.е. скорость роста числителя *меньше* скорости роста знаменателя). В противном случае такое отношение есть бесконечно большая (числитель при  $n \rightarrow \infty$  растет *быстрее* знаменателя). Если же числитель и знаменатель являются б.б. с одинаковой скоростью роста, то пределом такого отношения будет некоторое действительное число, отличное от нуля.

### III. Важные пределы последовательностей

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, \text{ если } |q| < 1 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty, \text{ если } |q| > 1$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

### IV. Правила предельного перехода

$$1) \quad +\infty + (+\infty) = +\infty.$$

$$3) \quad c \cdot \infty = \infty, \quad c \in R.$$

$$6) \quad \frac{c}{0} = \infty, \quad c \in R.$$

$$2) \quad -\infty + (-\infty) = -\infty.$$

$$4) \quad \infty \cdot \infty = \infty.$$

$$7) \quad c + \infty = \infty, \quad c \in R.$$

$$5) \quad \frac{c}{\infty} = 0, \quad c \in R.$$

Правила 1 и 4 – 6 определены вне зависимости от знака бесконечности.

**Замечание.** Если функция  $f(x)$  – элементарная функция и  $a \in D(f)$ , то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

### V. Арифметические свойства пределов

Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in R$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \in R$ . Тогда:

$$1) \quad \exists \lim_{x \rightarrow a} (\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \cdot A, \quad \forall \alpha \in R;$$

$$2) \quad \exists \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B;$$

$$3) \quad \exists \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B;$$

$$4) \quad \exists \lim_{x \rightarrow a} (f(x) / g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) / \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A / B, \quad B \neq 0.$$

### VI. Виды неопределённостей и приемы их раскрытия.

Нарушение ограничений, накладываемых на функции при вычислении их пределов, приводит к неопределённостям вида:

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0.$$

Элементарные приемы раскрытия неопределённостей: 1) сокращение на множитель, создающий неопределённость; 2) деление числителя и знаменателя на старшую степень аргумента (в отношении многочленов при  $x \rightarrow \infty$ ); 3) применение эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших; 4) замена переменной и использование двух замечательных пределов и их следствий.

## VII. Предел дробно-рациональной функции

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m} = \begin{cases} 0, & \text{если } n < m, \\ \infty, & \text{если } n > m, \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{если } n = m. \end{cases}$$

## VIII. Замечательные пределы и их следствия

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = 1 \text{ — первый замечательный предел.}$$

**Следствия:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a \cdot x)}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = a$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = 1$ ;

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = 1$ ; 4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = 1$ ; 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \frac{1}{2}$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = \left[ 1^\infty \right] = e \text{ — второй замечательный предел.}$$

**Следствия:** 1)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ;

2) если  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = \left[ 1^\infty \right] = e$ .

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = 1; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = 1; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = 1;$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \ln a; \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = m.$$

### IX. Таблица эквивалентных бесконечно малых функций при $x \rightarrow 0$ .

|    |                                 |     |                                 |
|----|---------------------------------|-----|---------------------------------|
| 1. | $\sin x \sim x$                 | 6.  | $\ln(1+x) \sim x$               |
| 2. | $\arcsin x \sim x$              | 7.  | $\log_a x \sim \frac{x}{\ln a}$ |
| 3. | $\operatorname{tg} x \sim x$    | 8.  | $a^x - 1 \sim x \ln a$          |
| 4. | $\operatorname{arctg} x \sim x$ | 9.  | $e^x - 1 \sim x$                |
| 5. | $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ | 10. | $(1+x)^m - 1 \sim mx$           |

**Замечание.** В качестве аргумента бесконечно малых функций в таблице эквивалентностей может выступать не только  $x \rightarrow 0$ , но и любая величина  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow a$ . Например,  $\sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$  при  $x \rightarrow \infty$ .

*Предел отношения бесконечно малых не меняется при замене их на эквивалентные бесконечно малые.*

### X. Вычисление пределов от показательной-степенной функции

При нахождении пределов вида  $\lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x))^{\psi(x)}$  следует иметь в виду, что:

- 1) если существуют конечные пределы  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = B$ ,

$$\text{то } \lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x))^{\psi(x)} = A^B;$$

- 2) если  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A \neq 1$  и  $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = \pm \infty$ , то вопрос о нахождении

предела решается непосредственно;

- 3) если  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1$  и  $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = \infty$ , то



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x))^{\psi(x)} &= [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow a} \left( 1 + \underbrace{(\varphi(x) - 1)}_{\alpha(x)} \right)^{\psi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} (1 + \alpha(x))^{\psi(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left( (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} \right)^{\alpha(x) \cdot \psi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) \cdot \psi(x)}.\end{aligned}$$

## XI. Производная функции одной переменной

### 1) Аналитическая трактовка производной (по Коши, 1823г)

Производной 1-го порядка функции  $y=f(x)$  в точке  $x_0$  называется предел

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Производная от функции  $y=f(x)$  в произвольной точке  $x$  определяется

следующим образом: 
$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Числа  $f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  и  $f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  называются

соответственно *левой* и *правой* производными функции  $y=f(x)$  в точке  $x_0$ .

Существование производной:  $\exists f'(x_0) \Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$

**Замечание.** Если функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  *конечную* производную, то она непрерывна в этой точке.

### 2) Физическая трактовка производной (по Ньюотону, 1662 -1664)

В механике при одномерном движении материальной точки вдоль прямой по закону  $x = x(t)$ , где  $x$  – координата точки, а  $t$  – это время, производная

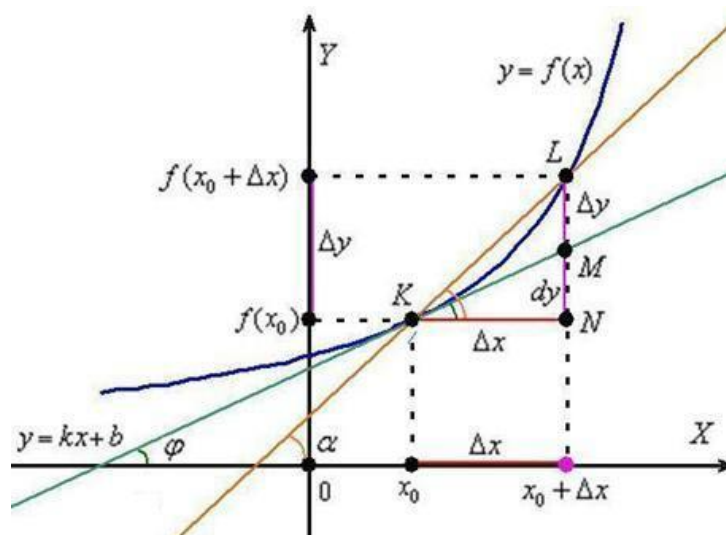
$$x'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = v(t) \text{ интерпретируется как } \textit{мгновенная скорость}.$$

### 3) Геометрическая трактовка производной (по Лейбницу, 1684г)

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) - \text{угловой коэффициент касательной в точке}$$

$K$ .

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) - \text{уравнение касательной к графику } f(x) \text{ в точке } K.$$



Если в точке  $x_0$   $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty$ , то уравнение касательной к кривой  $f(x)$

в точке  $A(x_0, f(x_0))$  имеет вид:  $x = x_0$  (вертикальная касательная).

## ХII. Основные правила дифференцирования

$$1) (C)' = 0, \quad C = \text{const}; \quad 4) (uv)' = u'v + uv';$$

$$2) (u + v)' = u' + v'; \quad 5) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$3) (Cu)' = Cu';$$

## ХIII. Основные формулы для вычисления производной

$$1) \text{ Производная сложной функции: } y' = (f(u(x)))' = f'_u \cdot u'_x$$

$$2) \text{ Логарифмическая производная: } (\ln y)' = y'/y.$$

$$\text{Производная показательно-степенной функции: } (u^v)' = u^v \left( v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' \right)$$

$$3) \text{ Производные высших порядков: } f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

4) Производные параметрически заданной функции:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}; \quad y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

#### XIV. Таблица производных

| Дифференцирование<br>основных элементарных функций                                   | Дифференцирование<br>сложных функций                                                    |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| $(x^n)' = n \cdot (x^{n-1}), \quad n - \text{любое число}$                           | $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u', \quad n - \text{любое число}$                       |
| $(\cos x)' = -\sin x$                                                                | $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$                                                          |
| $(\sin x)' = \cos x$                                                                 | $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$                                                           |
| $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$                | $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'; \quad (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$ |
| $(a^x)' = a^x \cdot \ln a; \quad (e^x)' = e^x;$                                      | $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'; \quad (e^u)' = e^u \cdot u'$                        |
| $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x; \quad (x \neq \pi/2 + \pi, n \in \mathbb{Z});$ | $(\operatorname{tg} u)' = u'/\cos^2 u$                                                  |
| $(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x; \quad (x \neq \pi, n \in \mathbb{Z});$       | $(\operatorname{ctg} u)' = -u'/\sin^2 u$                                                |
| $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (-1 < x < 1);$                        | $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$                                       |
| $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (-1 < x < 1);$                         | $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$                                        |
| $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$                                       | $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$                                  |
| $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$                                      | $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$                                |
| $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$                                       | $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$                                 |
| $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$                                      | $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$                                 |

## XV. Правило Лопиталя

Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношений их производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле.

Если имеется неопределённость  $\left[\frac{0}{0}\right]$  или  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ , то

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Пример.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0$

## XVI. Разложения основных функций по формуле Маклорена

Формула Маклорена с остаточным членом в форме Пеано для функции  $f(x)$ :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)_{x \rightarrow 0}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)_{x \rightarrow 0}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n + o(x^{2n+2})_{x \rightarrow 0}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})_{x \rightarrow 0}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))x^n}{n!} + o(x^n)_{x \rightarrow 0}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n} + o(x^n)_{x \rightarrow 0}$$

## **СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

### **Основная литература**

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы Математического анализа. Ч.1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
2. Сборник задач по математике для втузов. Часть 1. Линейная алгебра и основы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова и Б.Д. Демидовича. М.: Альянс, 2014.
3. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов: учеб. пособ. для студентов высш. техн. учеб. заведений / Под ред. Б. П. Демидовича. М.: АСТ: Астрель, 2006.
4. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу: учебное пособие. СПб: Издательство «Лань», 2014.

### **Дополнительная литература**

1. Морозова В.Д. Введение в анализ. М.: изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Учеб. Т 1. СПб.: Мифрил. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1996.
3. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Ч.1. М.: Высш.шк. 2000.
4. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.