

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

**Саровский физико-технический институт –**

филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего  
образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

**(СарФТИ НИЯУ МИФИ)**

Шаров Олег Олегович

**ФИЗИКА ЛАЗЕРНОГО ТЕРМОЯДЕРНОГО СИНТЕЗА**

Методическое пособие

Утверждено:

На заседании кафедры квантовой  
электроники

Научно-методическим Советом  
СарФТИ

Саров: СарФТИ  
2018

*Шаров О.О.*

**Физика лазерного термоядерного синтеза: методическое пособие.** – Саров: СарФТИ, 2018. – 117 с.

В пособии излагается содержание курса лекций по дисциплине Физика лазерного термоядерного синтеза, читаемого учащимся магистратуры.

Цель курса – ознакомить студентов физических специальностей с основами физики инерциального термоядерного синтеза, высокотемпературной плазмы, поведения вещества в экстремальных условиях и связанными с ними разделами экспериментальной и теоретической физики и прикладной математики.

Настоящий курс представляет собой развитие знаний, полученных в ходе изучения общей физики, теории поля, квантовой механики, статистической физики, гидродинамики, математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, дифференциальных уравнений, теории функций комплексного переменного. Для успешного освоения дисциплины необходимо знание дифференциального и интегрального исчисления, векторного и тензорного анализа, электродинамики, в том числе в материальных средах; умение ориентироваться в задачах квантовой механики и статистической физики, знание основных квантовых и классических распределений.

## СОДЕРЖАНИЕ

|     |                                                                      |    |
|-----|----------------------------------------------------------------------|----|
| 1   | Математика.....                                                      | 5  |
| 1.1 | Системы координат .....                                              | 5  |
| 1.2 | Производные полей .....                                              | 8  |
| 2   | Термоядерные реакции .....                                           | 14 |
| 2.1 | Топливо-энергетический комплекс .....                                | 14 |
| 2.2 | Энергия связи нуклонов в ядре .....                                  | 16 |
| 2.3 | Термоядерные реакции в звездах .....                                 | 22 |
| 2.4 | Термоядерные реакции в лаборатории .....                             | 25 |
| 3   | Физика термоядерного горения.....                                    | 26 |
| 3.1 | Скорость реакций .....                                               | 26 |
| 3.2 | Формула Гамова.....                                                  | 26 |
| 3.3 | Средняя скорость реакций в термодинамически равновесной плазме ..... | 29 |
| 3.4 | Критерий Лоусона .....                                               | 33 |
| 4   | Магнитное удержание .....                                            | 35 |
| 4.1 | Частица в магнитном поле .....                                       | 35 |
| 4.2 | Линейные системы .....                                               | 39 |
| 4.3 | Тороидальные системы .....                                           | 41 |
| 5   | Инерциальное удержание .....                                         | 44 |
| 5.1 | Схема ИТС.....                                                       | 44 |
| 5.2 | Критерий $\rho R$ .....                                              | 44 |
| 5.3 | Требования к мишени и драйверу.....                                  | 46 |
| 5.4 | Дизайн мишеней .....                                                 | 49 |
| 6   | Кинетика плазмы .....                                                | 54 |
| 6.1 | Определение плазмы .....                                             | 54 |
| 6.2 | Кинетические уравнения для плазмы .....                              | 56 |
| 6.3 | Уравнение Власова .....                                              | 58 |
| 6.4 | Уравнения переноса для равновесной плазмы .....                      | 61 |
| 6.5 | Интеграл столкновений в форме Ландау .....                           | 65 |
| 7   | Транспорт .....                                                      | 71 |
| 7.1 | Двухкомпонентная гидродинамика .....                                 | 71 |
| 7.2 | Транспортные коэффициенты .....                                      | 74 |
| 8   | Волны в плазме .....                                                 | 80 |
| 8.1 | Электростатические волны .....                                       | 80 |

|      |                                             |     |
|------|---------------------------------------------|-----|
| 8.2  | Электромагнитные волны .....                | 84  |
| 8.3  | Нелинейные эффекты.....                     | 89  |
| 9    | Рентгеновское излучение .....               | 92  |
| 9.1  | Фотометрия .....                            | 92  |
| 9.2  | Равновесное излучение .....                 | 93  |
| 9.3  | Уравнение переноса излучения .....          | 95  |
| 9.4  | Диффузионное приближение .....              | 97  |
| 9.5  | Приближение лучистой теплопроводности ..... | 98  |
| 9.6  | Коэффициенты поглощения излучения.....      | 99  |
| 10   | Газодинамика .....                          | 102 |
| 10.1 | Адиабатическое сжатие.....                  | 102 |
| 10.2 | Ударное сжатие.....                         | 102 |
| 10.3 | Гидродинамические неустойчивости .....      | 108 |
| 11   | Зажигание и горение.....                    | 110 |
| 11.1 | Условие разогрева.....                      | 110 |
| 11.2 | Усиление.....                               | 114 |
|      | ЛИТЕРАТУРА .....                            | 117 |

# 1 Математика

## 1.1 Системы координат

### 1.1.1 Криволинейная система координат

Криволинейные координаты – это координаты, в которых не все координатные линии являются прямыми. Будем рассматривать только трёхмерное пространство.

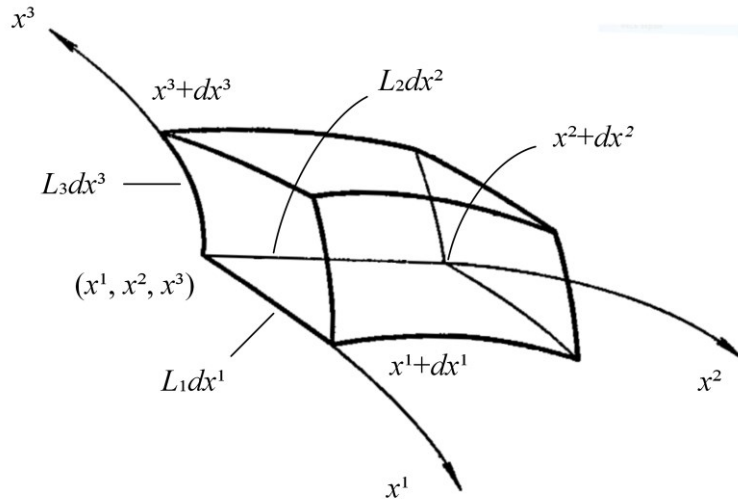


Рисунок 1 – Элементы координатных линий в криволинейной системе координат [1]

Если в каждой точке некоторой области задана скалярная функция, то говорят, что в области задано скалярное поле. Если в каждой точке задан вектор – векторное поле. Векторные поля в пространстве с криволинейными координатами часто задаются в локальном (не в глобальном) базисе. Такой локальный (местный) базис (он же «подвижный репер, связанный с текущей точкой и порожденный рассматриваемой системой криволинейных координат») обычно строится на векторах, параллельных касательным к координатным линиям в данной точке. В качестве векторов локального базиса можно взять непосредственно производные радиус-вектора по соответствующим координатам

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^i}, i = \overline{1,3}. \quad (1)$$

Мы ограничимся ортогональными системами координат, то есть теми системами, в которых координатные линии (а значит, и векторы локального базиса) в каждой точке перпендикулярны друг другу.

Длины векторов локального базиса (1) называются коэффициентами Ламе или масштабными факторами данной системы координат

$$L_i = |\vec{e}_i|. \quad (2)$$

### 1.1.2 Дополнительный базис

Базис  $\{\vec{e}^j\}$ , дополнительный к (любому) базису  $\{\vec{e}_i\}$ , определяется соотношением

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}^j = \delta_j^i, \quad (3)$$

где  $\delta_j^i$  – символ Кронекера.

Нам понадобится базис, дополнительный к рассмотренному ненормированному локальному «касательному» базису. В явном виде векторы такого дополнительного базиса выражаются через векторы исходного базиса следующим образом

$$\vec{e}^i = \frac{\vec{e}_j \times \vec{e}_k}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}, j, k \neq i, \quad (4)$$

где в числителе стоит векторное произведение, в знаменателе – смешанное. Порядок сомножителей в числителе определяется так, чтобы индексы  $(i, j, k)$  образовывали чётную перестановку набора  $(1, 2, 3)$ . Смешанное произведение в знаменателе есть элемент объема, построенный на векторах локального базиса. В ортогональных системах координат такой элемент объема равен произведению коэффициентов Ламе

$$V = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \prod_{i=1}^3 L_i. \quad (5)$$

Векторы базиса, дополнительного к локальному касательному базису, ортогональны координатным плоскостям.

Если система координат ортогональная, то соответствующие сопряженные базисные векторы направлены одинаково

$$\vec{e}^i \parallel \vec{e}_i. \quad (6)$$

а их длины обратны

$$|\vec{e}^i| = 1/|\vec{e}_i| = 1/L_i. \quad (7)$$

Базис, дополнительный к ортонормированному, совпадает с исходным.

Обратный переход выполняется так же

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{e}^j \times \vec{e}^k}{(\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3)}. \quad (8)$$

В ортогональных координатах (7)

$$(\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3) = 1/V. \quad (9)$$

*1.1.3 Координатное представление векторного поля*

Векторное поле  $\vec{f}(x^1, x^2, x^3)$  можно записать в координатном представлении в рассмотренных базисах как суммы

$$\vec{f} = f^i \vec{e}_i = f_i \vec{e}^i. \quad (10)$$

Компоненты  $f^i$  и  $f_i$  получаются скалярным умножением вектора поля на соответствующие базисные векторы, например

$$\vec{f} \cdot \vec{e}^i = f^j \vec{e}_j \cdot \vec{e}^i = f^j \delta_j^i = f^i. \quad (11)$$

Обычно поля задаются в «физических» координатах, то есть в нормированном локальном (касательном) базисе. Нормированные базисные векторы мы будем обозначать «шляпкой»  $\hat{e}_i$  или  $\hat{e}^i$  (без суммирования в формуле ниже)

$$\hat{e}_i = \vec{e}_i / L_i, \quad (12)$$

$$\hat{e}^i = \vec{e}^i \cdot L_i. \quad (13)$$

Компоненты в нормированных базисах (без суммирования по индексам)

$$\hat{f}^i = \vec{f} \cdot \hat{e}^i = \vec{f} \cdot \vec{e}^i L_i = f^i L_i, \quad (14)$$

аналогично,

$$\hat{f}_i = f_i / L_i. \quad (15)$$

Компоненты вектора в ортонормированном касательном базисе и в дополнительном к нему совпадают, поскольку совпадают сами базисы.

#### 1.1.4 Переход между системами координат в кратном интеграле

Переход от одной системы координат к другой в кратном интеграле осуществляется по формуле

$$\int \dots d\vec{x} = \int \dots |J| d\vec{u}. \quad (16)$$

где  $d\vec{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ ,

$d\vec{u} = du_1 du_2 \dots du_n$ ,

$J$  – якобиан преобразования координат, то есть определитель функциональной матрицы

$$J = \det \begin{pmatrix} \partial x_1 / \partial u_1 & \dots & \partial x_1 / \partial u_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial x_n / \partial u_1 & \dots & \partial x_n / \partial u_n \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Геометрический смысл модуля якобиана – отношение мер элементов объемов, построенных на базисных векторах до и после преобразования.

#### 1.1.5 Сферические координаты

Радиус-вектор в декартовых координатах

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Формулы, связывающие прямоугольные декартовы и сферические координаты:

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= \rho \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= \rho \cos \theta, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\rho$  – длина радиус-вектора;

$\theta$  – угол между радиус вектором и осью аппликат;

$\varphi$  – угол между проекцией радиус-вектора на плоскость  $xy$  и осью абсцисс.

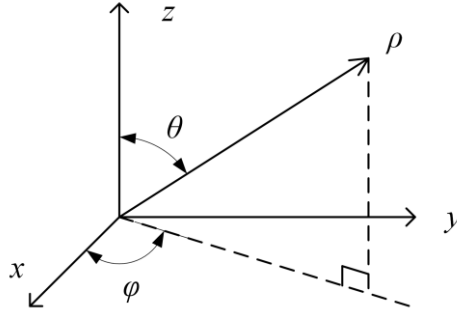


Рисунок 2 – Сферическая система координат

В соответствии с (1), векторы локального касательного базиса сферических координат

$$\vec{e}_\rho = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \partial x / \partial \rho \\ \partial y / \partial \rho \\ \partial z / \partial \rho \end{pmatrix}_{xyz} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}_{xyz}, \quad (20)$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \partial x / \partial \theta \\ \partial y / \partial \theta \\ \partial z / \partial \theta \end{pmatrix}_{xyz} = \begin{pmatrix} \rho \cos \theta \cos \varphi \\ \rho \cos \theta \sin \varphi \\ -\rho \sin \theta \end{pmatrix}_{xyz}, \quad (21)$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \partial x / \partial \varphi \\ \partial y / \partial \varphi \\ \partial z / \partial \varphi \end{pmatrix}_{xyz} = \begin{pmatrix} -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \rho \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{xyz}. \quad (22)$$

Коэффициенты Ламе

$$\begin{aligned} L_\rho &= |\vec{e}_\rho| = 1, \\ L_\theta &= |\vec{e}_\theta| = \rho, \\ L_\varphi &= |\vec{e}_\varphi| = \rho \sin \theta. \end{aligned} \quad (23)$$

Якобиан преобразования к сферическим координатам

$$J = \begin{vmatrix} \partial x / \partial \rho & \partial y / \partial \rho & \partial z / \partial \rho \\ \partial x / \partial \theta & \partial y / \partial \theta & \partial z / \partial \theta \\ \partial x / \partial \varphi & \partial y / \partial \varphi & \partial z / \partial \varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \rho \cos \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & -\rho \sin \theta \\ -\rho \sin \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix}. \quad (24)$$

Раскладывая (24) по третьему столбцу, получим

$$\begin{aligned} J &= \cos \theta (\rho^2 \cos \theta \sin \theta \cos^2 \varphi + \rho^2 \cos \theta \sin \theta \sin^2 \varphi) \\ &\quad + \rho \sin \theta (\rho \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) \\ &= \rho^2 \cos^2 \theta \sin \theta + \rho^2 \sin^3 \theta = \rho^2 \sin \theta, \end{aligned} \quad (25)$$

что совпадает с произведением коэффициентов Ламе (23).

## 1.2 Производные полей

### 1.2.1 Дифференцирование полей

Градиент скалярного поля  $a$



$$\text{grad } a = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_{\partial V} (d\vec{S} \cdot \vec{a}) = \nabla a, \quad (26)$$

дивергенция векторного поля  $\vec{A}$

$$\text{div } \vec{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_{\partial V} (d\vec{S}, \vec{A}) = \nabla \cdot \vec{A}, \quad (27)$$

ротор векторного поля  $\vec{A}$

$$\text{rot } \vec{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_{\partial V} [d\vec{S}, \vec{A}] = \nabla \times \vec{A}. \quad (28)$$

*Свойства градиента*

Градиент произведения скалярных полей

$$\text{grad}(ab) = a \text{ grad } b + b \text{ grad } a. \quad (29)$$

Градиент скалярного произведения векторных полей

$$\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \text{grad} \left( \vec{A} \cdot \vec{B} \right) + \text{grad} \left( \vec{A} \cdot \vec{B} \right). \quad (30)$$

Складываем

$$\vec{A} \times \text{rot } \vec{B} = \vec{A} \times \left( \nabla \times \vec{B} \right) = \nabla \left( \vec{A} \cdot \vec{B} \right) - (\vec{A} \nabla) \vec{B} \quad (31)$$

и

$$\vec{B} \times \text{rot } \vec{A} = \vec{B} \times \left( \nabla \times \vec{A} \right) = \nabla \left( \vec{A} \cdot \vec{B} \right) - (\vec{B} \nabla) \vec{A}, \quad (32)$$

получим

$$\vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + (\vec{A} \nabla) \vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{B} \nabla) \vec{A} = \nabla (\vec{A} \cdot \vec{B}). \quad (33)$$

(последнее слагаемое в (31)  $(\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B}$  называется градиентом вектора  $\vec{B}$  по вектору  $\vec{A}$  и обозначается  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial \vec{A}}$  [2]).

*Свойства дивергенции*

$$\text{div}(a\vec{A}) = a(\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot \text{grad } a, \quad (34)$$

$$\text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \left( \nabla, \vec{A}, \vec{B} \right) + \left( \nabla, \vec{A}, \vec{B} \right) = \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B}. \quad (35)$$

*Свойства ротора*

$$\text{rot}(a\vec{A}) = \nabla \times (a\vec{A}) + \nabla \times (a\vec{A}) = \text{grad } a \times \vec{A} + a \text{ rot } \vec{A}, \quad (36)$$

$$\text{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) = \nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) + \nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \nabla) \vec{A} - \vec{B} \text{ div } \vec{A} + \vec{A} \text{ div } \vec{B} - (\vec{A} \nabla) \vec{B}. \quad (37)$$

## Формулы для интегралов

### Формула Остроградского-Гаусса

$$\int_{\partial V} (d\vec{S}, \vec{A}) = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV - \quad (38)$$

поток поля через границу трехмерной области равен интегралу от дивергенции поля по объему этой области. Формула Стокса

$$\int_{\partial \Sigma} (d\vec{r}, \vec{A}) = \int_{\Sigma} (d\vec{S}, \operatorname{rot} \vec{A}) - \quad (39)$$

циркуляция поля по контуру равна потоку ротора поля через поверхность, натянутую на этот контур.

В компонентах оператор набла определяется как

$$\nabla = \sum_k \vec{e}^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \vec{e}^k \partial_k, \quad (40)$$

где  $\{\vec{e}^k\}$  – ненормированный (контравариантный) базис;

$\partial_k$  – производные по координатам.

### 1.2.2 Градиент в криволинейных координатах

С учётом связи длин нормированных и ненормированных базисных векторов (13)

$$\operatorname{grad} f \stackrel{\text{def}}{=} \nabla f = \sum_k \vec{e}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} = \sum_k \hat{e}^k \frac{1}{L_k} \frac{\partial f}{\partial x^k}. \quad (41)$$

В прямоугольной декартовой системе с нормированным базисом все коэффициенты Ламе равны единице, и

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}^x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}^y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}^z. \quad (42)$$

### 1.2.3 Ротор в криволинейных координатах

Ротор векторного поля  $\vec{f}$  (10)

$$\operatorname{rot} f \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \times \vec{f} = \nabla \times (f_i \vec{e}^i) \quad (43)$$

В соответствии с (36) дифференциальный оператор в (43) будет действовать и на компоненты поля  $f_i$ , и на базисные векторы  $\vec{e}^i$ . Заметим, что векторы контравариантного базиса – это градиенты соответствующих координат точки

$$\nabla x^i = \vec{e}^k \partial_k x^i = \vec{e}^k \delta_k^i = \vec{e}^i. \quad (44)$$

Поскольку ротор градиента равен нулю, вторые слагаемые в разложении (36) будут равны нулю. Дополнительно воспользуемся антисимметричностью векторного произведения

$$\nabla \times \vec{f} = (\nabla f_i) \times \vec{e}^i = \sum_{k \neq i} \vec{e}^k \partial_k f_i \times \vec{e}^i = \sum_{k < i} (\partial_k f_i - \partial_i f_k) \vec{e}^k \times \vec{e}^i. \quad (45)$$

Заменим векторное произведение базисных векторов соответствующим вектором дополнительного базиса (8), (9)

$$\nabla \times \vec{f} = \sum_{k < i} (\partial_k f_i - \partial_i f_k) \frac{\vec{e}_j}{V}, \quad (46)$$

и перейдём к нормированным компонентам (15) и нормированному базису (12)

$$\nabla \times \vec{f} = \sum_{k < i} [\partial_k (\hat{f}_i L_i) - \partial_i (\hat{f}_k L_k)] \frac{\hat{\vec{e}}_j L_j}{V}, \quad (47)$$

где  $(j, k, i)$  – чётная перестановка тройки  $(1, 2, 3)$ .

В ортонормированном декартовом базисе

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{f} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = \\ &= \left( \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z, \end{aligned} \quad (48)$$

*1 . 2 . 4      Д и в е р г е н ц и я                      в                      к р и в о л и н е й н ы х  
к о о р д и н а т а х*

Дивергенция векторного поля  $\vec{f}$

$$\text{div } f \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \cdot \vec{f}. \quad (49)$$

Воспользуемся доказанным ранее свойством равенства нулю ротора векторов контравариантного базиса (44). Для этого разложим поле по ковариантному базису

$$\text{div } f = \text{div}(f^i \vec{e}_i) = \text{div}[(V f^i \vec{e}^j) \times \vec{e}^k] = \text{rot}(V f^i \vec{e}^j) \cdot \vec{e}^k, \quad (50)$$

где использована формула (8) для перехода между базисами и (35) для дивергенции векторного произведения. Тройка индексов  $(i, j, k)$  – чётная перестановка тройки чисел  $(1, 2, 3)$ . Раскроем ротор произведения скаляра на вектор (36)

$$\text{rot}(V f^i \vec{e}^j) = \text{grad}(V f^i) \times \vec{e}^j, \quad (51)$$

и подставим (51) в (50)

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{f} &= (\vec{e}^k, \text{grad}(V f^i), \vec{e}^j) = (\text{grad}(V f^i), \vec{e}^j, \vec{e}^k) = \frac{\vec{e}_i}{V} \cdot \text{grad}(V f^i) = \\ &= \frac{1}{V} \vec{e}_i \vec{e}^k \partial_k (V f^i) = \frac{1}{V} \delta_i^k \partial_k (V f^i) = \frac{1}{V} \partial_i (V f^i). \end{aligned} \quad (52)$$

В физических координатах (14)

$$\text{div } \vec{f} = \frac{1}{V} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \left( V \frac{\hat{f}^i}{L_i} \right). \quad (53)$$

В ортонормированном декартовом базисе

$$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial f^x}{\partial x} + \frac{\partial f^y}{\partial y} + \frac{\partial f^z}{\partial z}. \quad (54)$$

1.2.5 Градиент, дивергенция, ротор в сферических координатах

Запишем выражения для градиента, дивергенции и ротора в явном виде в сферических координатах.

В сферической системе координат коэффициенты Ламе определяются выражениями (23), и, согласно (41), градиент скалярного поля  $f$

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi. \quad (55)$$

Элемент объема равен произведению всех трёх коэффициентов Ламе

$$V = L_\rho L_\theta L_\varphi = \rho^2 \sin \theta. \quad (56)$$

Расписывая ротор покомпонентно, то есть выписывая множители перед базисными векторами в (47), будем иметь

$$(\operatorname{rot} \vec{f})_\rho = \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} [\partial_\theta (\hat{f}_\varphi \rho \sin \theta) - \partial_\varphi (\hat{f}_\theta \rho)] = \frac{1}{\rho \sin \theta} [\partial_\theta (\hat{f}_\varphi \sin \theta) - \partial_\varphi \hat{f}_\theta], \quad (57)$$

$$(\operatorname{rot} \vec{f})_\theta = \frac{\rho}{\rho^2 \sin \theta} [\partial_\varphi \hat{f}_\rho - \partial_\rho (\hat{f}_\varphi \rho \sin \theta)] = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi \hat{f}_\rho - \partial_\rho (\hat{f}_\varphi \rho) \right], \quad (58)$$

$$(\operatorname{rot} \vec{f})_\varphi = \frac{\rho \sin \theta}{\rho^2 \sin \theta} [\partial_\rho (\hat{f}_\theta \rho) - \partial_\theta \hat{f}_\rho] = \frac{1}{\rho} [\partial_\rho (\hat{f}_\theta \rho) - \partial_\theta \hat{f}_\rho]. \quad (59)$$

Для дивергенции (53) получим

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{f} &= \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \left[ \partial_\rho \left( \hat{f}_\rho \frac{\rho^2 \sin \theta}{1} \right) + \partial_\theta \left( \hat{f}_\theta \frac{\rho^2 \sin \theta}{\rho} \right) + \partial_\varphi \left( \hat{f}_\varphi \frac{\rho^2 \sin \theta}{\rho \sin \theta} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\rho^2} \partial_\rho (\hat{f}_\rho \rho^2) + \frac{1}{\rho \sin \theta} \partial_\theta (\hat{f}_\theta \sin \theta) + \frac{1}{\rho \sin \theta} \partial_\varphi \hat{f}_\varphi. \end{aligned} \quad (60)$$

1.2.6 Градиент, дивергенция и ротор плоских волн

Будем работать в обычных декартовых координатах с ОНБ. Рассмотрим скалярные и векторные монохроматические плоские волны, то есть поля вида [3]

$$g = g_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (61)$$

и

$$\vec{g} = \vec{g}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad (62)$$

где  $\omega$  – циклическая частота волны;

$\vec{k}$  – волновой вектор.

Ни амплитуда поля, ни частота, ни волновой вектор не зависят от координат, поэтому оператор набла на них не действует.

Градиент поля скалярной волны

$$\text{grad } g = g_0 \cdot \text{grad } e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \quad (63)$$

Градиент экспоненты

$$\begin{aligned} \text{grad } e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} &= i e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \text{grad}(\vec{k} \cdot \vec{r}) \\ &= i e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) (k_x x + k_y y + k_z z) = i \vec{k} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \end{aligned} \quad (64)$$

Подставляя (64) в (63), получим

$$\text{grad } g = i g \vec{k}. \quad (65)$$

Дивергенция поля векторной волны (34), (64)

$$\text{div } \vec{g} = \vec{g}_0 \cdot \text{grad } e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = i \vec{k} \cdot \vec{g}. \quad (66)$$

Ротор (36), (64)

$$\text{rot } \vec{g} = \text{grad } e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \times \vec{g}_0 = i \vec{k} \times \vec{g}. \quad (67)$$

## *2 Термоядерные реакции*

### *2.1 Топливо-энергетический комплекс*

За последние 40 лет общемировое потребление энергии выросло в 2 раза, и продолжает расти сейчас. Растет как потребление электроэнергии на душу населения, так и общее население Земли.

– Почти 70% потребления электроэнергии обеспечивается сжиганием ископаемого топлива: угля, нефти и газа. Нефть и ее производные при этом редко используется для производства электричества, в основном как топливо для транспортных средств.

– Около 13% электроэнергии производится на атомных электростанциях.

– 16% электроэнергии поступает из возобновляемых источников, при этом больше 90% ее производства обеспечивается гидроэлектростанциями.

– Около 3% производства электроэнергии приходится на более экзотические источники, типа термоэлектрических, электрохимических и пр.

#### *Тепловые электростанции*

Тепловые электростанции – хорошие базовые источники электроэнергии. Базовый источник – источник, способный обеспечить большой и непрерывный поток энергии. У ископаемого топлива два основных недостатка.

1 При его сжигании в атмосферу выбрасываются вредные вещества, в частности, парниковые газы и радиоактивные элементы, содержащиеся, например, в угле. Бороться с ними можно, но цена электричества при этом будет расти.

2 Ограниченность запасов. Разведанных запасов нефти даже при текущем потреблении хватит лишь на несколько десятков лет, газа и угля – на несколько сотен. Гарантии того, что существуют неразведанные запасы, которые будет экономически выгодно добывать, нет.

#### *Атомные электростанции*

Атомная энергетика – хороший базовый источник электроэнергии, не выбрасывающий в окружающую среду парниковых газов. Во Франции сейчас 80% электричества производится на атомных станциях, в Японии до Фукусимы – 30% (так что эти страны имеют дополнительный источник дохода в виде квот на выбросы). Но у ядерной энергетики существуют свои проблемы.

1 Принципиальная возможность критической аварии. Крупнейшие и наиболее известные – Three Mile Island (остров на реке Саскуэханна в шт. Пенсильвания в США, где в 1979 году произошла первая в истории ядерной энергетики крупная авария. Активная зона

реактора была повреждена, часть топлива расплавилась, но корпус реактора не прожгла, поэтому выбросы радиоактивных веществ в атмосферу были незначительны, и эвакуация жителей не производилась), Чернобыль (реактор был разрушен взрывом, остатки активной зоны расплавились, в результате чего в атмосферу было выброшено большое количество радиоактивных веществ) и Fukushima (вследствие землетрясения реакторы трех энергоблоков были остановлены системами защиты, но последовавшее цунами вывело из строя основные и резервные средства электроснабжения, что привело к неработоспособности систем охлаждения и расплавлению активной зоны).

2 Проблема нераспространения. В ядерных реакторах нарабатываются вещества, которые могут быть использованы при создании ядерного оружия.

3 Проблема утилизации отработанного ядерного топлива. Его надо перерабатывать или хотя бы где-то хранить. Это достаточно дорого – дороже производства нового топлива.

4 Ограниченность запасов топлива. Запасов  $^{235}\text{U}$  в энергетическом эквиваленте не больше, чем нефти и газа, зато есть большие запасы  $^{238}\text{U}$  и Th, из которых в реакторах-бридерах можно получать Pu и  $^{233}\text{U}$ , которые можно использовать в традиционных реакторах. Проблема заключается в том, что системное время удвоения топлива в бридерах порядка 50 лет, поэтому запасов  $^{235}\text{U}$  не хватит до того времени, когда появится топливо «нового поколения».

### *Возобновляемые источники электроэнергии*

Хорошим источником энергии являются гидроэлектростанции, но заметно увеличить производство электроэнергии на ГЭС невозможно, поскольку все наиболее подходящие реки уже заняты.

Альтернативные источники (ветер, приливы, солнце) не могут служить базовыми источниками, поскольку это низкоконцентрированные источники с низким коэффициентом готовности. Низкоконцентрированность означает, что для генерации разумной мощности необходимо занимать слишком большие территории. Так, на обеспечение электричеством города потребуется застроить ветростанциями территорию по площади не меньшую, чем сам город. Низкий коэффициент готовности означает, что поток энергии не постоянен. Балансировать нагрузку в энергосети трудно, и хранить электричество дорого.

Балансировка нагрузки нужна в двух (противоположных) случаях: когда непостоянен поток энергии со станции (что наиболее актуально для альтернативных источников), либо когда потребление электроэнергии изменяется (например, в результате суточных колебаний), а поток со станции постоянен. Наиболее экономически выгодный способ в настоящее время – закачка воды из нижнего резервуара гидроаккумулирующей

электростанции (ГАЭС) в верхний. В России существует три ГАЭС, еще три строятся и несколько проектируется. В мире построено около 500 ГАЭС, крупнейшие располагаются в первую очередь в США и Китае.

Человечеству нужны новые источники энергии. Одним из них в настоящий момент видится управляемый термоядерный синтез. Помимо практической цели получения электроэнергии в качестве приложений термоядерного синтеза можно отметить и фундаментальные исследования: изучение свойств материи в экстремальных состояниях, взаимодействия интенсивных потоков излучения с веществом, астрофизические изыскания.

## 2.2 Энергия связи нуклонов в ядре

Ядро элемента  $X$  с зарядом  $Z$ , числом нейтронов  $N$  и полным числом нуклонов  $A$ , равным  $Z + N$ , обозначается  ${}_N^AX^Z$  или просто  ${}^AX$ . Ядра одного элемента с разным количеством нейтронов  ${}^AX$  и  ${}^{A'}X$  называются изотопами. Ядра разных элементов с одинаковым количеством нуклонов  ${}^AX$  и  ${}^AY$  называются изобарами. Ядра разных элементов с одинаковым количеством нейтронов  ${}_NX$  и  ${}_NY$  – изотонами.

### 2.2.1 Дефект массы

Масса ядра меньше суммы масс покоя нуклонов, входящих в его состав:

$$m(A, Z) < Zm_p + (A - Z)m_n, \quad (68)$$

где  $m_p$  – масса протона;

$m_n$  – масса нейтрона.

Разность между суммой масс нуклонов и массой ядра называется дефектом массы (mass defect):

$$\Delta m^d = Zm_p + (A - Z)m_n - m(A, Z). \quad (69)$$

Источником дефекта массы служит энергия связи нуклонов в ядре. В энергетических единицах дефект массы, приходящийся на один нуклон, равен

$$\Delta E^d / A = \Delta m^d c^2 / A. \quad (70)$$

Так определенный дефект массы всегда больше нуля.

Существует еще одна величина, которая по-русски также называется «дефект массы» и определяется как разница между массой покоя атомного ядра данного изотопа (выраженной в атомных единицах массы) и его массовым числом (mass excess):

$$\Delta E^e / c^2 = M(Z, A) - A. \quad (71)$$

Поскольку масса изотопа углерода  ${}^{12}\text{C}$  по определению равна 12 а.е.м., для него mass excess равен нулю

$$\Delta E^e({}^{12}\text{C}) = 0. \quad (72)$$



Если энергия связи нуклонов в ядре велика, mass excess меньше нуля. Для слабосвязанных ядер mass excess, наоборот, больше нуля.

Мы будем понимать под дефектом массы mass defect.

## 2.2.2 Формула масс

Одной из ранних феноменологических моделей ядра была предложенная Дж. Гамовым модель жидкой капли, на основе которой К. Вайцеккер получил полуэмпирическую формулу для энергии связи – формула масс (Бете-)Вайцеккера. И модель, и формула, с одной стороны, достаточно просты, а с другой стороны, неплохо описывают наблюдаемые величины, поэтому остановимся на них подробнее.

Из экспериментов известно, что радиусы ядер  $R$  приблизительно пропорциональны корню третьей степени из массового числа

$$R \propto A^{1/3}, \quad (73)$$

где коэффициент пропорциональности близок к  $1 \cdot 10^{-13}$  см. Это означает, что плотность вещества всех ядер примерно одинакова:

$$\frac{m}{V} \propto \frac{A}{(A^{1/3})^3} = const. \quad (74)$$

Она близка к  $2 \cdot 10^{14}$  г/см<sup>3</sup>. Среднее расстояние между нуклонами

$$\sqrt[3]{\frac{V}{A}} \propto \sqrt[3]{\frac{(A^{1/3})^3}{A}} = const \quad (75)$$

близко к удвоенному радиусу нуклона. Это значит, что нуклоны в ядре упакованы плотно.

В формулу Вайцеккера для энергии связи входят пять слагаемых:

$$\Delta E = E_{volume} + E_{surface} + E_{Coulomb} + E_{asymmetry} + E_{pairing}. \quad (76)$$

### Объемное слагаемое

Объемное слагаемое  $E_{volume}$  обусловлено сильным взаимодействием нуклонов. Поскольку радиус сильного взаимодействия мал, каждый нуклон взаимодействует не со всеми остальными нуклонами, а с фиксированным количеством ближайших соседей, поэтому объемная часть энергии пропорциональна количеству нуклонов, или кубу радиуса ядра:

$$E_{volume} = a_v A. \quad (77)$$

### Поверхностное слагаемое

Поверхностное слагаемое  $E_{surface}$  учитывает то, что нуклоны, находящиеся у поверхности ядра имеют меньше соседей. Эта часть энергии пропорциональна площади поверхности ядра, или квадрату его радиуса:

$$E_{surface} = -a_s A^{2/3}. \quad (78)$$

### Кулоновское слагаемое

Кулоновское слагаемое  $E_{Coulomb}$  связано с электростатическим отталкиванием протонов и пропорционально их потенциалу взаимодействия. Будем рассматривать ядро как заряженный шар с постоянной плотностью заряда  $\rho$ , и найдем его электростатическую энергию.

Для нахождения поля внутри ядра воспользуемся уравнением Максвелла для дивергенции электрического поля в интегральной форме

$$\int_{\partial V} (\vec{E}, d\vec{S}) = 4\pi \int_V \rho dV, \quad (79)$$

где ввиду сферической симметрии задачи в качестве объема, по которому выполняется интегрирование, рассмотрим шар радиуса  $r$ . Получим

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3, \quad (80)$$

или

$$E(r) = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r = \frac{qr}{R^3}, \quad (81)$$

где  $q$  – заряд ядра;

$R$  – его радиус.

Поле снаружи ядра – поле точечного заряда

$$E(r) = \frac{q}{r^2}. \quad (82)$$

На границе ядра поля (81) и (82) совпадают.

Энергия электростатического поля

$$W = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV. \quad (83)$$

Для поля внутри (81)

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_0^R \frac{q^2}{R^6} r^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{2R^6} \int_0^R r^4 dr = \frac{q^2}{2R^6} \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{q^2}{10R}. \quad (84)$$

Для поля снаружи (82)

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_R^\infty \frac{q^2}{r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{2} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{2} \cdot \left(-\frac{1}{r}\right) \Big|_R^\infty = \frac{q^2}{2R}. \quad (85)$$

Полная энергия (84) и (85)

$$W = \frac{q^2}{10R} + \frac{q^2}{2R} = \frac{3q^2}{5R}. \quad (86)$$

Таким образом, кулоновское слагаемое пропорционально отношению квадрата заряда ядра к его радиусу:

$$W_{Coulomb} = -a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}. \quad (87)$$

#### *Поправка на асимметрию*

Поправка на протон-нейтронную асимметрию связана с принципом Паули: энергетические состояния заполняются «снизу вверх» отдельно для протонов и нейтронов, и энергия нейтронно- или протонно-избыточного изобара будет больше, чем энергия изобара с одинаковым числом нейтронов и протонов.

Будем рассматривать ядро как смесь полностью вырожденного протонного и нейтронного ферми-газа. Энергия ферми-газа

$$E = \int \varepsilon dN, \quad (88)$$

где  $\varepsilon$  – энергия частицы, находящейся в элементе объема фазового пространства;

$dN$  – число состояний в элементе фазового объема

$$dN = g \frac{d\vec{p}d\vec{q}}{h^s}, \quad (89)$$

$h$  – постоянная Планка;

$s$  – число степеней свободы;

$g$  – статистический вес.

С учетом двукратного спинового вырождения уровней число квантовых состояний фермиона, движущегося в объеме  $V$  с абсолютной величиной импульса в интервале от  $p$  до  $p + dp$ , равно

$$dN = 2 \frac{d\vec{p}d\vec{q}}{h^3} = 2 \frac{4\pi p^2 dp \cdot V}{h^3} = \frac{p^2 dp}{\pi^2 \hbar^3} V. \quad (90)$$

Энергия вырожденного ферми-газа

$$E = \int_0^{p_F} \frac{p^2}{2m} \cdot \frac{p^2 dp}{\pi^2 \hbar^3} V = \frac{V}{2m\pi^2 \hbar^3} \frac{p_F^5}{5}, \quad (91)$$

где  $m$  – масса частицы;

интегрирование ведется от нуля до импульса Ферми, определяющего границу заполненных состояний в импульсном пространстве

$$N = \int_{p=0}^{p=p_F} dN = \int_0^{p_F} \frac{p^2 dp}{\pi^2 \hbar^3} V = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} \frac{p_F^3}{3}. \quad (92)$$

Подставим выражение для импульса Ферми из (92)

$$p_F = (3\pi^2)^{1/3} \left(\frac{N}{V}\right)^{1/3} \hbar \quad (93)$$

в формулу для энергии (91)

$$E = \frac{V}{2m\pi^2\hbar^3} \frac{(3\pi^2)^{5/3}}{5} \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3} \hbar^5 = \frac{3}{5} \cdot \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{2m} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \hbar^2 N, \quad (94)$$

или

$$E = \frac{3}{5} \varepsilon_F N, \quad (95)$$

где  $\varepsilon_F$  – энергия Ферми

$$\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{2m} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \hbar^2. \quad (96)$$

Энергия ядра как смеси ферми-газов

$$E = \frac{3}{5} (N_p \varepsilon_{Fp} + N_n \varepsilon_{Fn}) \propto N_p \left(\frac{N_p}{V}\right)^{2/3} + N_n \left(\frac{N_n}{V}\right)^{2/3} = \frac{1}{V^{2/3}} (N_p^{5/3} + N_n^{5/3}). \quad (97)$$

Будем считать, что количество протонов близко к количеству нейтронов

$$\begin{cases} N_p = \frac{A}{2} + \frac{\Delta}{2}, \\ N_n = \frac{A}{2} - \frac{\Delta}{2}, \end{cases} \quad (98)$$

так что

$$\begin{cases} N_p + N_n = A, \\ N_p - N_n = \Delta, \end{cases} \quad (99)$$

и

$$\Delta \ll A. \quad (100)$$

Найдем зависимость энергии ядра от  $\Delta$ .

Разложение выражения  $(1+x)^a$  в ряд имеет вид

$$(1+x)^a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{a}{n} x^n, \quad (101)$$

где  $\binom{a}{n}$  – биномиальный коэффициент

$$\binom{a}{n} = \frac{a!}{n! (a-n)!} = \frac{a(a-1) \dots (a-n+1)}{n!}. \quad (102)$$

Нам понадобятся первые три члена разложения  $(1+x)^{5/3}$

$$(1 \pm x)^{5/3} = 1 \pm \frac{5}{3}x + \frac{5}{9}x^2 + \dots \quad (103)$$

Выразим количество протонов через атомный вес в соответствии с (98) и разложим полученное выражение в ряд согласно (103)

$$N_p^{5/3} = \left(\frac{A}{2} + \frac{\Delta}{2}\right)^{5/3} = \left(\frac{A}{2}\right)^{5/3} \left(1 + \frac{\Delta}{A}\right)^{5/3} \approx \left(\frac{A}{2}\right)^{5/3} \left[1 + \frac{5\Delta}{3A} + \frac{5}{9}\left(\frac{\Delta}{A}\right)^2\right]. \quad (104)$$

Аналогично для нейтронов

$$N_p^{5/3} = \left(\frac{A}{2} - \frac{\Delta}{2}\right)^{5/3} = \left(\frac{A}{2}\right)^{5/3} \left(1 - \frac{\Delta}{A}\right)^{5/3} \approx \left(\frac{A}{2}\right)^{5/3} \left[1 - \frac{5\Delta}{3A} + \frac{5}{9}\left(\frac{\Delta}{A}\right)^2\right]. \quad (105)$$

Подставим (104) и (105) в выражение для энергии (97)

$$E \propto \frac{2}{V^{2/3}} \left(\frac{A}{2}\right)^{5/3} \left[1 + \frac{5}{9}\left(\frac{\Delta}{A}\right)^2\right] \propto A \left(1 + \frac{5}{9} \cdot \frac{\Delta^2}{A^2}\right), \quad (106)$$

поскольку

$$\frac{A}{V} = \text{const.} \quad (107)$$

Первое слагаемое в (106) служит добавкой к объемному члену  $E_{volume}$ , второе есть поправка на протон-нейтронную асимметрию

$$E_{asymmetry} = -a_a \frac{(N - Z)^2}{A}. \quad (108)$$

#### *Поправка на четность*

Поправка на четность также связана с принципом Паули, но уже внутри групп протонов и нейтронов. Наименьшей энергией среди изобаров будет обладать ядро, в котором все нуклоны внутри каждой группы можно разбить на пары с разными направлениями спина, то есть ядро с четным количеством протонов и нейтронов – четно-четное ядро. Наибольшей – нечетно-нечетное ядро. Это слагаемое обратно пропорционально корню из массового числа:

$$E_{pairing} = \pm \frac{a_p}{A^{1/2}}. \quad (109)$$

#### *Энергия связи на нуклон*

График зависимости энергии связи, приходящейся на нуклон, от массового числа имеет вид, представленный на Рисунок 3.

Из этой зависимости необходимо запомнить два основных момента.

Во-первых, характерный масштаб по энергии – единицы (до десятков) МэВ, поэтому все энергии, которые будут выделяться в ядерных реакциях – порядка МэВ. Энергия выделяется в форме кинетической энергии продуктов.

Во-вторых, максимум функции лежит в районе железа. Движение по кривой в сторону максимума справа налево – реакции деления ядер тяжелых элементов, которые используются в ядерных реакторах (управляемые) и ядерном оружии (неуправляемые). Движение слева направо – реакции синтеза. Неуправляемые реакции синтеза используются

в термоядерном оружии, управляемые предполагается использовать для получения электроэнергии в термоядерных реакторах.

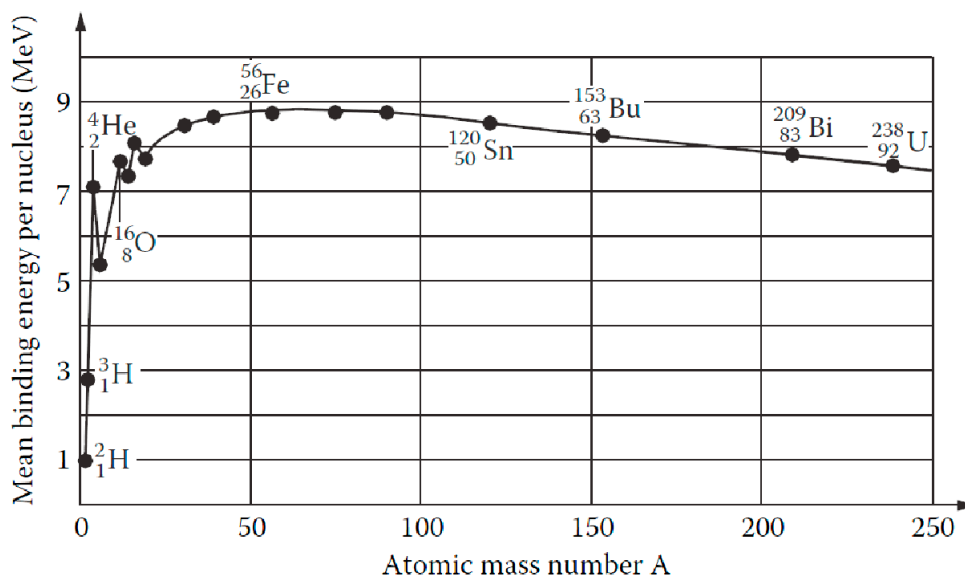


Рисунок 3 – Энергия связи на нуклон для стабильных изотопов [4]

Для того чтобы реакция синтеза произошла, ядра необходимо сблизить. Проблема в том, что ядра одинаково заряжены и испытывают кулоновское отталкивание, поэтому, чтобы сблизить их на достаточное расстояние, необходимо совершить работу. В принципе, ядра можно разогнать на ускорителе, а затем столкнуть, но затраты энергии будут велики. Для фундаментальной науки это позволительно – так измеряются сечения реакций взаимодействия ядер – для промышленного получения энергии – нет.

И в естественных условиях, и на экспериментальных установках термоядерные реакции идут не в пучках, а в плазме. Плазма – это электрически нейтральная среда (суммарный заряд равен нулю), состоящая из положительных и отрицательных зарядов. Обычно под плазмой понимается сильно нагретый газ, а в качестве носителей зарядов выступают ионы и электроны. Плазму необходимо нагреть так, чтобы ионы приобрели достаточно большую кинетическую энергию (термоядерный синтез), и создать большую концентрацию частиц, чтобы увеличить вероятность столкновений. В естественной среде такие условия реализуются в звездах.

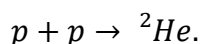
## 2.3 Термоядерные реакции в звездах

### 2.3.1 Протон-протонный цикл

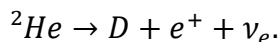
Как известно, за время своего существования звезды проходят различные этапы эволюции. Формирование (прото-)звезды начинается с гравитационного сжатия молекулярного (состоящего в основном из  $\text{H}_2$ ) облака. Сжатие сопровождается переходом (потенциальной) гравитационной энергии в тепловую, то есть, в кинетическую энергию

движения молекул. Температура в протозвездах с массой меньше  $0,08 M_{\odot}$  никогда не достигнет величины достаточной для начала термоядерных реакций с участием протия (хотя ее может хватить для реакций с дейтерием). Такие звезды называются коричневыми карликами. Протозвезды большей массы разогреваются до 10 млн. К, и в них начинаются реакции протон-протонного цикла. Радиационное давление, обеспечиваемое термоядерными реакциями, уравнивает гравитационное давление, и звезда приходит в гидростатическое равновесие и перестает сжиматься.

Первая реакция протон-протонного цикла – слияние протонов с образованием дипротона:

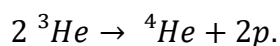
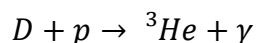


Затем дипротон либо распадается на два протона (протонный распад), либо превращается в дейтрон (ядро изотопа водорода дейтерия  ${}^2\text{D}$ ) с образованием позитрона и электронного нейтрино ( $\beta^+$ -распад):



Сечение суммарной pp реакции –  $10^{-23}$  барн (1 барн равен  $10^{-24}$  см<sup>2</sup>). Это очень маленькое сечение, связанное с малой вероятностью распада дипротона в дейтрон. Точное определение понятия «сечение реакции» будет дано позже. Пока достаточно представлять его себе как некоторый аналог площади поперечного сечения взаимодействующих (сталкивающихся) частиц. Чем сечение больше, тем больше вероятность реакции при прочих одинаковых условиях.

Дальнейшие реакции цикла:



Сечения этих реакций порядка  $10^{-6}$  барн. Они на много порядков больше сечения pp-реакции, поскольку в них происходит только перегруппировка нуклонов, в то время как при образовании дейтрона протон превращается в нейтрон. Из-за такой разницы в сечениях реакций скорость всего процесса преобразования водорода в гелий определяется скоростью первой реакцией цикла.

Суммарный итог цикла – одна альфа-частица  ${}^4\text{He}$  из четырех протонов.

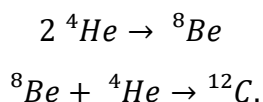
### *Проблема солнечных нейтрино*

Одним из продуктов pp-реакции является электронное нейтрино. Однако, поток электронных нейтрино от Солнца, регистрируемый на Земле, в 3 раза меньше расчетного. Было высказано предположение, что пока нейтрино долетают до Земли, они успевают преобразоваться в мюонное и тау нейтрино в результате вакуумных нейтринных

осцилляций. Экспериментальное подтверждение догадки было получено лишь в 2000-х годах, когда в Канаде в Sudbury Neutrino Observatory заработал детектор, способный мерить суммарный поток нейтрино всех типов. Наличие вакуумных осцилляций означает, что масса нейтрино не равна нулю.

### 2.3.2 *Дальнейшая эволюция звезд*

После того, как звезда исчерпала запасы водорода в ядре, она снова начинает сжиматься. Сжатие происходит до тех пор, пока не будет остановлено давлением вырожденного электронного газа. Если масса звезды меньше  $0,5 M_{\odot}$ , на этом все для нее и заканчивается: гравитационное сжатие не может разогреть звезду до той температуры, при которой начинаются дальнейшие реакции нуклеосинтеза. Звезда превращается в белый карлик, который затем постепенно остывает. Если масса звезды больше  $0,5 M_{\odot}$ , температура внутри сжимающейся звезды повышается достаточно для того, чтобы началась тройная гелиевая реакция:



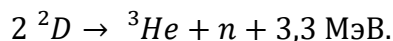
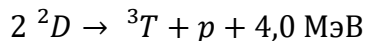
Поток энергии, идущий наружу от гелиевого ядра и прилегающих к нему слоев, в которых догорает оставшийся водород, увеличивается; оболочка звезды раздувается и остывает – звезда становится красным гигантом. Это то, что в будущем случится с Солнцем. Его внешняя оболочка при этом, вероятно, достигнет орбиты Земли. Массы Солнца не хватит для того, чтобы новое углеродно-кислородное ядро сжалось и нагрелось настолько, чтобы начались дальнейшие реакции нуклеосинтеза: оно будет сжиматься под действием гравитации, пока давление вырожденного электронного газа не остановит сжатие. Внешние оболочки звезды из догорающего гелия будут сброшены, а Солнце превратится в белый карлик.

В более тяжелых звездах реакции идут дальше, пока не образуется железное ядро. Если масса ядра превышает предел Чандрасекара, равный  $1,4 M_{\odot}$ , давление одного только вырожденного электронного газа не может противостоять гравитации. Ядро сжимается дальше, протоны захватывают электроны, превращаясь в нейтроны, и образование вырожденного нейтронного газа приостанавливает коллапс. По падающим слоям наружу идет ударная волна, срывая оболочку звезды – рождается сверхновая. В результате нейтронного захвата в потоках вещества от нее образуются более тяжелые элементы, вплоть до урана. Разлетевшееся вещество гравитацией собирается в новые звездные системы – так образовалась Солнечная система. Если масса ядра превышает предел Толмана-Оппенгеймера-Волкова, оцениваемый как  $2,5\text{--}3 M_{\odot}$ , вырожденный нейтронный газ не может сдержать дальнейший коллапс вещества, и ядро превращается в черную дыру.

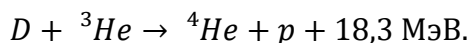
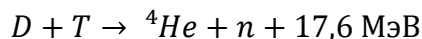


## 2.4 Термоядерные реакции в лаборатории

Протон-протонная реакция самая медленная из тех, что идут в звездах, поэтому на Земле хотелось бы начать с чего-то более эффективного, например, с дейтерия. Собственно DD реакция идет по двум каналам: протонному и нейтронному

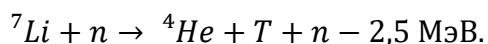
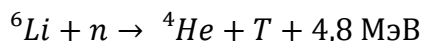


Дальше, дейтерий может взаимодействовать с продуктами обеих реакций



Сечения этих реакций – порядка барна (ср. с  $10^{-6}$  барна для реакций pp-цикла). Суммарное энерговыделение обеих цепочек – 3,6 МэВ/нуклон. Один грамм (любого) вещества содержит 1 моль нуклонов, и запас энергии в 1 мг дейтерия составляет  $21,7 \cdot 10^{20}$  МэВ или 347 МДж. Годовое мировое потребление электроэнергии находится на уровне  $3 \cdot 10^{11}$  ГДж [5], что соответствует 1000 тонн дейтерия. Содержание дейтерия в природной воде – 0,015%, а масса мирового океана –  $1,45 \cdot 10^{21}$  кг [6]. Это означает, что запасов дейтерия при текущем уровне потребления энергии хватит на сотни триллионов лет.

Наибольшим сечением среди рассмотренных реакций обладает DT-реакция (5 барн). Она идет при наименьшей температуре и имеет хороший энергетический выход, поэтому рассматривается в качестве основной в термоядерных реакторах. Тритий – радиоактивный изотоп с периодом полураспада 12,3 года, и поэтому в природе не встречается. Его можно получить в нейтронной реакции с литием:



Первая реакция – реакция захвата, вторая – неупругое рассеяние нейтрона на ядре лития. Реакция с  $^6Li$  энергетически выгоднее: она экзотермична и идет с более медленными нейтронами, но в естественной смеси изотопов всего 6,4%  $^6Li$ . В качестве источника нейтронов можно использовать DT реакцию.

Итого: топливом для предполагаемой термоядерной электростанции будут служить вода, из которой будет добываться дейтерий, и литий, из которого будет нарабатываться тритий; отходами будет гелий.

### 3 Физика термоядерного горения

#### 3.1 Скорость реакций

Рассмотрим взаимодействие частиц типа 2 с силовым центром 1.



Рисунок 4

Плотность потока налетающих частиц  $j$  – число частиц, проходящих за единицу времени через единицу площади

$$j = \frac{dN_2}{dtdS} = \frac{n_2 dV}{dtdS} = n_2 v. \quad (110)$$

где  $v$  – скорость налетающих частиц;

$n_2$  – концентрация налетающих частиц.

Сечение – отношение количества актов взаимодействия в единицу времени к налетающему потоку

$$\sigma = \frac{dN_{\text{реакций}}/dt}{j}. \quad (111)$$

Если силовой центр (то есть частица типа 1) движется, то  $v$  – относительная скорость. Если частица типа 1 не одна, а они заполняют некоторый объём с концентрацией  $n_1$ , то из определения сечения (111)

$$\frac{dN_{\text{реакций}}}{dt} = j\sigma \cdot dN_1 = j\sigma \cdot n_1 dV. \quad (112)$$

Отношение  $dN_{\text{реакций}}/dtdV$ , то есть число актов взаимодействия в единицу времени в единице объёма, называется скоростью реакции  $R$ . Из определения плотности потока (1)

$$R = n_1 n_2 \sigma v_{\text{отн}}. \quad (113)$$

Величина  $\sigma v$  называется реакционной способностью.

#### 3.2 Формула Гамова

Между одинаково заряженными ядрами действует кулоновское отталкивание, которое необходимо преодолеть, чтобы сблизить их на расстояние достаточное, чтобы произошла реакция, поэтому сечение реакции  $\sigma$  – функция относительной скорости частиц.

В классической (неквантовой) модели, сечение имеет пороговый вид: если кинетическая энергия относительного движения частиц  $W$  меньше необходимой, реакция не произойдет; если больше – произойдёт всегда.

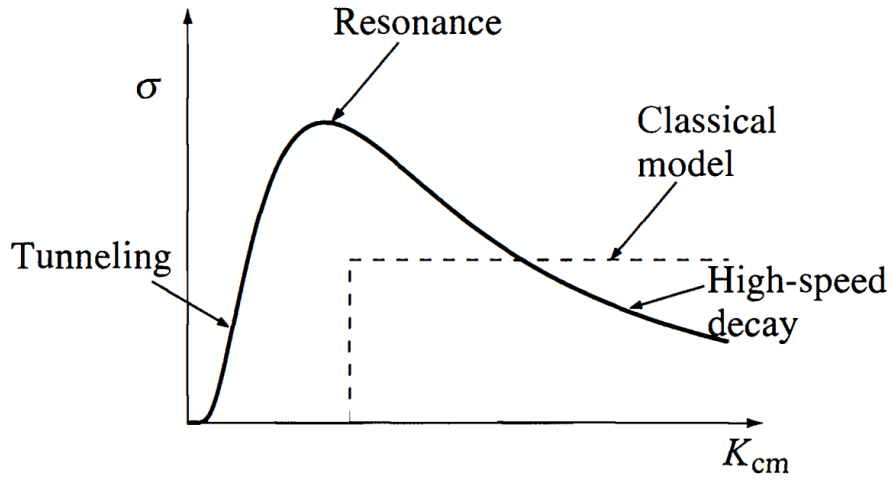


Рисунок 5 – Классическое и квантово-механическое сечение реакции [7]

В квантово-механической картине сечение представляется следующим произведением

$$\sigma = \sigma_{\text{геом}} \cdot \mathcal{T} \cdot \mathcal{R}, \quad (114)$$

где  $\sigma_{\text{геом}}$  – «геометрическое» сечение;

$\mathcal{T}$  – коэффициент прохождения через кулоновский барьер;

$\mathcal{R}$  – вероятность осуществления реакции, если ядра сблизилась на достаточное расстояние.

Геометрическое сечение  $\sigma_{\text{геом}}$  определяется длиной волны де Бройля  $\lambda$

$$mv = p = \hbar k, \quad (115)$$

где  $k$  – волновое число

$$k = 2\pi/\lambda, \quad (116)$$

так что

$$\sigma_{\text{геом}} \propto \lambda^2 \propto \frac{1}{p^2} \propto \frac{1}{W}. \quad (117)$$

Коэффициент прохождения

$$\mathcal{T} = \exp\left(-\sqrt{\varepsilon_G/W}\right), \quad (118)$$

где  $\varepsilon_G$  – константа для данных ядер (энергия Гамова).

Вероятность  $\mathcal{R}$  определяется физикой термоядерной реакции и от кинетической энергии  $W$  зависит слабо.

Всё вместе

$$\sigma(W) = \frac{S(W)}{W} \exp\left(-\sqrt{\frac{\varepsilon_G}{W}}\right), \quad (119)$$

где  $S(W)$  – слабо зависящий от  $W$  astrophysical factor.

Мы будем пользоваться формулой Гамова в виде

$$\sigma(W) = \sigma_m \frac{T_m}{W} \exp \left[ -2 \left( \sqrt{\frac{T_m}{W}} - 1 \right) \right], \quad (120)$$

где  $\sigma_m$  – максимальное сечение,

$T_m$  – энергия относительного движения, при которой достигается максимум.

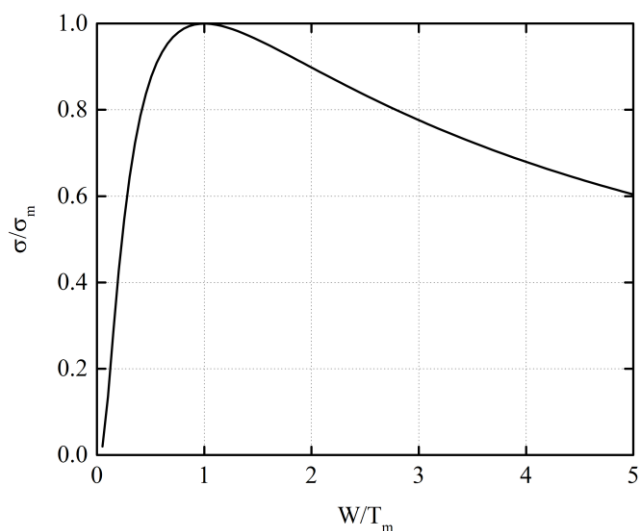


Рисунок 6 – Сечение реакции  
в соответствии с формулой Гамова

Величины  $\sigma_m$  и  $T_m$  определяются экспериментально. Характерные величины максимальных сечений  $\sigma_m$  для интересующих нас термоядерных реакций – единицы барн, энергии  $T_m$  – десятки и сотни кэВ.

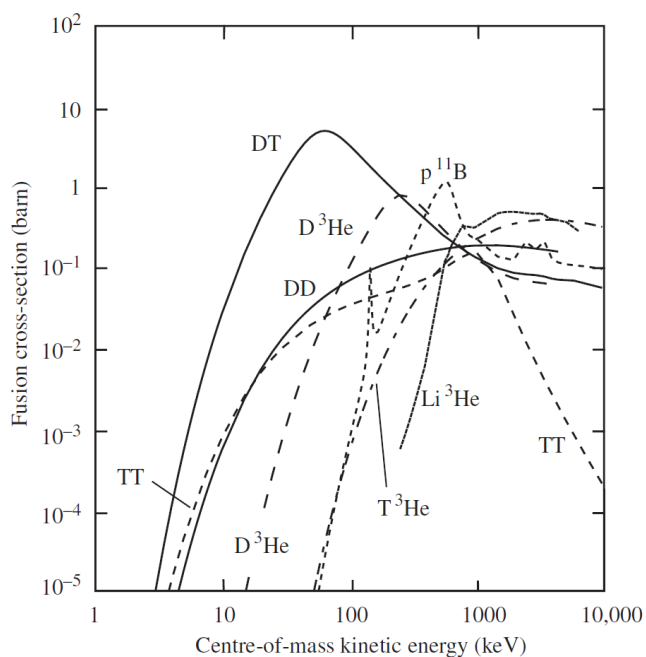


Рисунок 7 – Сечения некоторых термоядерных реакций  
как функции кинетической энергии  
в системе центра масс сталкивающихся ядер [8]

### 3.3 Средняя скорость реакций в термодинамически равновесной плазме

Рассмотрим термодинамически равновесную плазму и найдем среднюю по всем частицам скорость реакции в ней [7]:

$$\langle R \rangle = n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle. \quad (121)$$

В равновесии частицы распределены по скоростям в соответствии с функцией Максвелла:

$$f(\vec{v}) = \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2T}, \quad (122)$$

где  $T$  – температура, выраженная в энергетических единицах.

Реакционная способность

$$\langle \sigma v \rangle = \int f_1(\vec{v}_1) f_2(\vec{v}_2) \sigma(v_{\text{отн}}) v_{\text{отн}} d\vec{v}_1 d\vec{v}_2. \quad (123)$$

Перейдем в систему центра масс для двух сталкивающихся частиц, то есть введём переменные

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}, \\ \vec{v} &= \vec{v}_2 - \vec{v}_1, \end{aligned} \quad (124)$$

где  $\vec{V}$  – скорость движения центра масс;

$\vec{v}$  – относительная скорость движения частиц (нижний индекс «отн» писать больше не будем).

При перемножении функций распределения под экспонентой появится суммарная кинетическая энергия движения частиц, которая равна сумме энергии движения центра масс системы и энергии относительного движения

$$2E_{\text{кин}} = m_1 \vec{v}_1^2 + m_2 \vec{v}_2^2 = (m_1 + m_2) \vec{V}^2 + \mu \vec{v}^2, \quad (125)$$

где  $\mu$  – приведенная масса

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (126)$$

Для того, чтобы перейти к новым переменным в интеграле, нужен якобиан преобразования координат

$$J = \frac{\partial(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}{\partial(\vec{V}, \vec{v})} = \frac{1}{\frac{\partial(\vec{V}, \vec{v})}{\partial(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}} = \frac{1}{\frac{\partial(V_x, V_y, V_z, v_x, v_y, v_z)}{\partial(v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}, v_{2x}, v_{2y}, v_{2z})}}. \quad (127)$$

Так как векторы  $\vec{V}$  и  $\vec{v}$  – линейные комбинации векторов  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ , «перекрёстные» по координатам производные в полном якобиане равны нулю, поэтому перестановкой строк и столбцов (то есть изменением порядка интегрирования) его можно привести к блочно-

диагональному виду, так что он разобьется на произведение трех якобианов меньшей размерности (три якобиана размером  $2 \times 2$  вместо одного  $6 \times 6$ )

$$\frac{\partial(V_x, v_x, V_y, v_y, V_z, v_z)}{\partial(v_{1x}, v_{2x}, v_{1y}, v_{2y}, v_{1z}, v_{2z})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(V_x, v_x)}{\partial(v_{1x}, v_{2x})} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial(V_y, v_y)}{\partial(v_{1y}, v_{2y})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial(V_z, v_z)}{\partial(v_{1z}, v_{2z})} \end{vmatrix}. \quad (128)$$

Каждый из якобианов по отдельной координате в (128) равен единице

$$\frac{\partial(V_x, v_x)}{\partial(v_{1x}, v_{2x})} = \begin{vmatrix} \frac{m_1}{m_1 + m_2} & \frac{m_2}{m_1 + m_2} \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad (129)$$

и интеграл принимает вид

$$\int \dots d\vec{v}_1 d\vec{v}_2 = \int \dots d\vec{V} d\vec{v}. \quad (130)$$

Подставляя (122), (125) и (130) в выражение для реакционной способности (123), получим

$$\langle \sigma v \rangle = \int \left( \frac{m_1}{2\pi T} \right)^{3/2} \left( \frac{m_2}{2\pi T} \right)^{3/2} e^{-[(m_1+m_2)V^2 + \mu v^2]/2T} \sigma(v) v d\vec{V} d\vec{v}. \quad (131)$$

Поскольку подынтегральное выражение – функция только абсолютных величин скоростей, перейдем в сферическую систему координат

$$\int \dots d\vec{v} = \int \dots v^2 \sin \theta dv d\theta d\varphi = \int \dots v^2 dv \cdot \int_0^\pi \sin \theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \int \dots v^2 dv \quad (132)$$

(с точностью до знака).

Реакционная способность

$$\langle \sigma v \rangle = \left( \frac{m_1}{2\pi T} \right)^{3/2} \left( \frac{m_2}{2\pi T} \right)^{3/2} \int_0^\infty e^{-(m_1+m_2)V^2/2T} 4\pi V^2 dV \cdot \int_0^\infty e^{-\mu v^2/2T} \sigma(v) v 4\pi v^2 dv. \quad (133)$$

Интеграл по скорости движения центра масс  $V$  берётся аналитически. Поскольку

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^\infty x dx e^{-x^2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}, \quad (134)$$

то

$$\begin{aligned} \langle \sigma v \rangle &= \frac{(m_1 m_2)^{3/2}}{(2\pi T)^3} 4\pi \left( \frac{2T}{m_1 + m_2} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{4} 4\pi \int_0^\infty e^{-\mu v^2/2T} \sigma(v) v^3 dv \\ &= \frac{4\pi \mu^{3/2}}{(2\pi T)^{3/2}} \int_0^\infty e^{-\mu v^2/2T} \sigma(v) v^3 dv. \end{aligned} \quad (135)$$

Подставим в (135) формулу Гамова (120) для сечения

$$\begin{aligned}\langle \sigma v \rangle &= \frac{4\pi\mu^{3/2}}{(2\pi T)^{3/2}} \int_0^\infty e^{-W/T} \sigma_m \frac{T_m}{W} e^{-2(\sqrt{T_m/W}-1)} \frac{W dW}{2} \left(\frac{2}{\mu}\right)^2 \\ &= \frac{2\sigma_m}{\tau^{3/2}} \left(\frac{2T_m}{\pi\mu}\right)^{1/2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{w}{\tau} - \frac{2}{w^{1/2}} + 2\right) dw,\end{aligned}\quad (136)$$

где  $W = \mu v^2/2$ ;

$w = W/T_m$ ;

$\tau = T/T_m$ .

Интеграл (136) аналитически не берется, но его можно искать приближенно.

Выделив в подынтегральном выражении переменную часть и сделав замену переменной

$$w/\tau^{2/3} = y, \quad (137)$$

где  $\tau$  рассматривается как постоянный параметр, так что

$$dw = \tau^{2/3} dy, \quad (138)$$

получим

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{w}{\tau} - \frac{2}{w^{1/2}} + 2\right) dw = \int_0^\infty e^2 \tau^{2/3} e^{-\frac{1}{\tau^{1/3}}\left(y + \frac{2}{\sqrt{y}}\right)} dy. \quad (139)$$

Интеграл (139) оценим методом Лапласа [9, 10], предполагая, что температура  $T$  мала по сравнению с энергией  $T_m$ , при которой достигается максимум сечения

$$\frac{1}{\tau^{1/3}} \gg 1. \quad (140)$$

Функция

$$S(y) = y + \frac{2}{\sqrt{y}} \quad (141)$$

стоящая в показателе экспоненты, имеет минимум в точке  $y = 1$

$$S(1) = 3. \quad (142)$$

Её вторая производная в точке экстремума

$$S''(1) = \frac{3}{2y^{5/2}} \Big|_{y=1} = \frac{3}{2}. \quad (143)$$

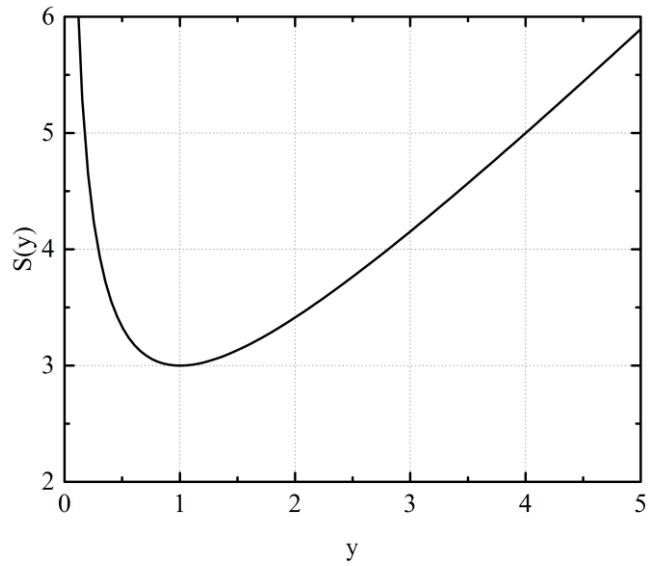


Рисунок 8 – График функции  $S(y) = y + \frac{2}{\sqrt{y}}$

Для интеграла (139) справедлива асимптотическая оценка

$$\sqrt{\frac{2\pi}{\tau^{-1/3}S''(1)}} e^{2\tau^{2/3}} e^{-\tau^{-1/3}S(1)} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \tau^{5/6} e^{2-\frac{3}{\tau^{1/3}}}. \quad (144)$$

Подставим оценку (144) в выражение (136) для реакционной способности  $\langle \sigma v \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \sigma v \rangle &= \frac{2\sigma_m}{\tau^{3/2}} \left( \frac{2T_m}{\pi\mu} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \tau^{5/6} e^{2-\frac{3}{\tau^{1/3}}} \\ &= \frac{4\sigma_m}{\sqrt{3}} \left( \frac{2T_m}{\mu} \right)^{1/2} \left( \frac{T_m}{T} \right)^{2/3} \exp \left[ 2 - 3 \left( \frac{T_m}{T} \right)^{1/3} \right]. \end{aligned} \quad (145)$$

Зависимость реакционной способности от температуры имеет характерный вид, представленный на графике.

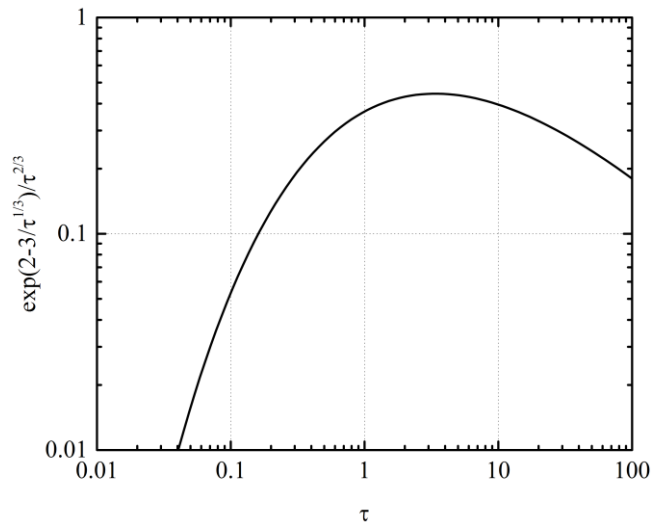


Рисунок 9 – Расчётная зависимость реакционной способности от температуры



Зависимости скоростей наиболее интересных термоядерных реакций от температуры приведены на рисунке.

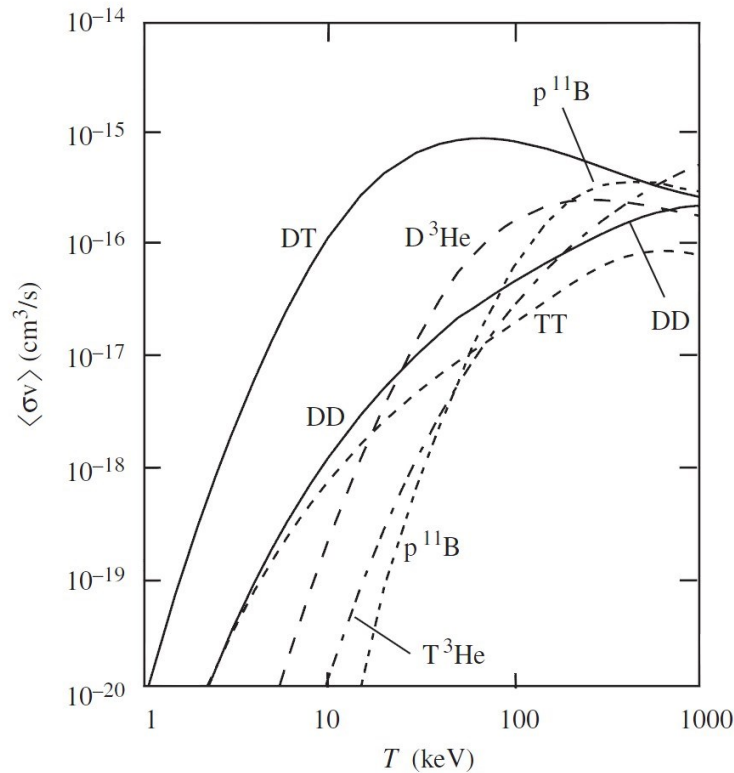


Рисунок 10 – Реакционная способность некоторых термоядерных реакций [8]

Видно, что при небольших температурах скорость DT реакции заметно выше, чем скорости остальных реакций (DD, D<sup>3</sup>He и др.).

### 3.4 Критерий Лоусона

Рассмотрим энергетический баланс объема плазмы, в котором происходят термоядерные реакции. Для того, чтобы обеспечить положительный энергетический выход, выделяющаяся термоядерная энергия должна быть больше потерь и энергии, затраченной на нагрев плазмы

$$E_{fusion} > E_{loss} + E_{thermal}. \quad (146)$$

Основной механизм потерь радиационный, то есть потери на тормозное излучение. При температуре больше 5 кэВ потери на излучение становятся заметно меньше мощности, выделяемой в результате реакций, и ими можно пренебречь.

$$E_{fusion} = R\tau Q, \quad (147)$$

где  $R$  – скорость реакций (121);

$\tau$  – время удержания плазмы;

$Q$  – энергетический выход реакции (17,6 МэВ для DT реакции или 3,6 МэВ в  $\alpha$ -частицах).

$$E_{thermal} = \frac{3}{2}nT_i + \frac{3}{2}nT_e = 3nT, \quad (148)$$

$$E_{fusion} = \frac{n^2}{4}\langle\sigma v\rangle\tau Q,$$

где предполагается, что смесь дейтерия и трития эквимольная, то есть

$$n_D = n_T = \frac{n}{2}. \quad (149)$$

Подставим (148) в (146)

$$n\tau > \frac{12T}{Q\langle\sigma v\rangle} - \quad (150)$$

это критерий Лоусона. Для DT реакции, то есть для температуры порядка 10 кэВ и  $\langle\sigma v\rangle$  порядка  $10^{-16}$  см<sup>3</sup>/с, получим условие

$$n\tau > 10^{14} \text{ с/см}^3. \quad (151)$$

Таким образом, для того, чтобы получить положительный выход энергии, необходимо удержать от разлета нагретую плазму с достаточной концентрацией частиц достаточное время. Здесь предполагается два пути.

- Магнитное удержание – удержание плазмы с не очень большой плотностью частиц большое время.
- Инерциальное удержание – удержание плазмы с большой плотностью частиц не очень большое время.

## 4 Магнитное удержание

### 4.1 Частица в магнитном поле

#### 4.1.1 Движение частицы в постоянном однородном магнитном поле

Поскольку для реализации термоядерного синтеза требуются высокие температуры, невозможно удерживать плазму просто в сосуде: при контакте со стенкой она будет быстро остывать. Основная идея магнитного удержания заключается в том, что заряженная частица в магнитном поле испытывает действие силы (Лоренца), которая не позволяет ей двигаться произвольным образом. Можно попытаться подобрать такую конфигурацию магнитного поля, что плазма не будет разлетаться достаточно долгое время.

Точечная частица с массой  $m$  и зарядом  $e$  в постоянном однородном магнитном поле  $H$  движется по винтовой линии, радиус которой можно определить из условия баланса силы Лоренца и центробежной силы

$$\frac{e}{c} v H = m \frac{v^2}{r_L}, \quad (152)$$

откуда

$$\frac{eH}{mc} = \omega_L, \quad (153)$$

где  $\omega_L$  – ларморовская (циклотронная) частота;

$r_L$  – ларморовский (циклотронный) радиус

$$r_L = \frac{v}{\omega_L} = \frac{v m c}{e H}. \quad (154)$$

Если в качестве скорости движения взять тепловую скорость

$$v \propto \sqrt{T/m}, \quad (155)$$

то получим

$$r_L \propto \frac{m}{\sqrt{m}} = \sqrt{m}, \quad (156)$$

то есть радиус окружности для ионов больше, чем для электронов.

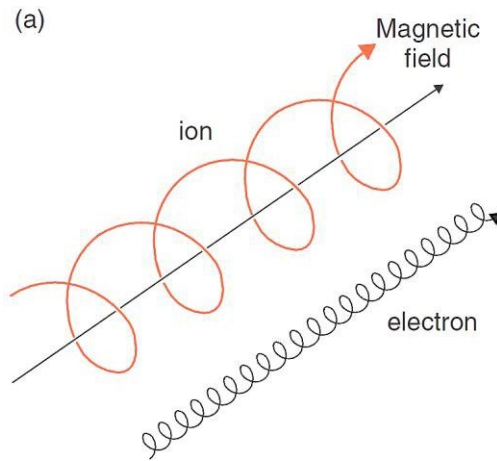


Рисунок 11 – Движение частицы в магнитном поле [5]

#### 4.1.2 Первый адиабатический инвариант

Величина, остающаяся постоянной при финитном (периодическом) движении системы, характеризующейся некоторыми медленно меняющимися параметрами  $\lambda$ , называется адиабатическим инвариантом. Под медленным понимается такое изменение, что  $\lambda$  слабо меняется за период  $T$  движения системы

$$T \frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda. \quad (157)$$

Адиабатическим инвариантом является величина

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint P dq, \quad (158)$$

где  $q, P$  – обобщенные координата и импульс;

интегрирование ведется по полному периоду движения.

Найдем адиабатический инвариант для частицы, движущейся в медленно меняющемся магнитном поле. Движение в плоскости, перпендикулярной полю, периодически, а обобщенный импульс точечной частицы в электромагнитном поле

$$\vec{P} \equiv \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}, \quad (159)$$

где  $L$  – функция Лагранжа

$$L = \frac{mv^2}{2} - e\varphi + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v}; \quad (160)$$

$\vec{p}$  – обычный импульс;

$\vec{A}$  – векторный потенциал поля

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A},$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad (161)$$

$\varphi$  – скалярный потенциал.

Подставим выражение для обобщенного импульса (159) в формулу для инварианта (158)

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \vec{p} d\vec{r} + \frac{e}{2\pi c} \oint \vec{A} d\vec{r}. \quad (162)$$

Поскольку скорость  $\vec{v}$  направлена по дифференциалу радиус вектора  $d\vec{r}$  и постоянна по абсолютной величине, первое слагаемое в (162) приведет к следующему виду

$$\frac{1}{2\pi} \oint \vec{p} d\vec{r} = \frac{1}{2\pi} p \cdot 2\pi r_L = pr_L. \quad (163)$$

Второй интеграл преобразуем по формуле Стокса, заменяя ротор векторного потенциала магнитным полем,

$$\frac{e}{2\pi c} \oint \vec{A} d\vec{r} = \frac{e}{2\pi c} \oint (\text{rot } \vec{A}, d\vec{S}) = -\frac{e}{2\pi c} H \cdot \pi r_L^2 = -\frac{eHr_L^2}{2c}. \quad (164)$$

Здесь предполагается, что поле слабо меняется на ларморовском радиусе, так что его можно вынести из-под знака интеграла. Знак минус появился потому, что обход контура интегрирования положительным зарядом оставляет натянутую на него поверхность справа.

С учетом определения ларморовской частоты (153) получим

$$I = pr_L - \frac{eHr_L^2}{2c} = mv_{\perp} \cdot \frac{v_{\perp}}{\omega_L} - \frac{m\omega_L}{2} \left( \frac{v_{\perp}}{\omega_L} \right)^2 = \frac{mv_{\perp}^2}{2\omega_L} \propto \frac{mv_{\perp}^2}{2} \cdot \frac{1}{H} = \mu - \quad (165)$$

магнитный момент.

#### 4.1.3 Пинч-эффект

Пинч-эффект – сжатие проводника под действием собственного магнитного поля протекающего по нему тока.

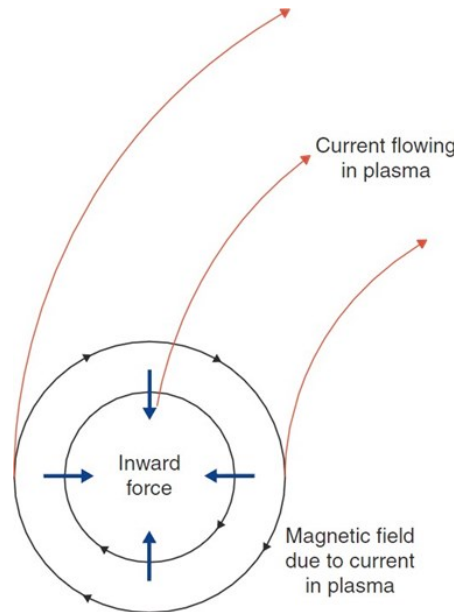


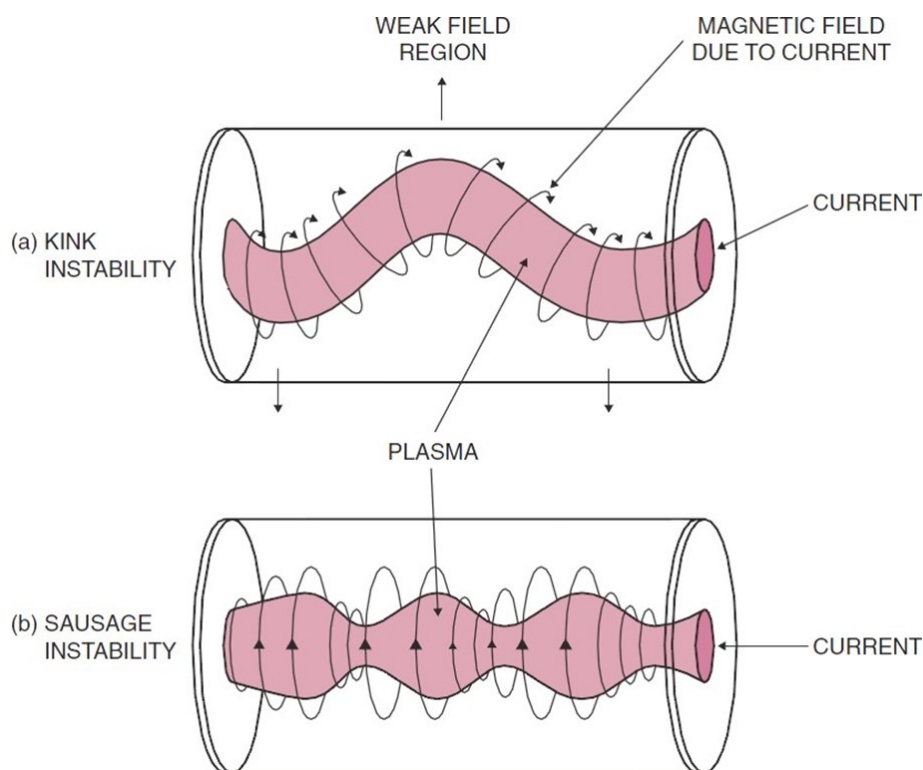
Рисунок 12 – Пинч-эффект [5]

Если в качестве проводника использовать плазму, то можно сжать ее в шнур, не касающийся стенок камеры.

Против магнитного удержания работают два явления.

Первое – столкновения частиц, в результате которых те «отсоединяются» от магнитных силовых линий, вдоль которых движутся, и «присоединяются» к новым. Если в плазме имеется градиент концентрации в направлении поперек магнитного поля, частицы в среднем дрейфуют «наружу» – противоположно градиенту. Скорость дрейфа определяется частотой столкновений частиц и смещением в результате каждого столкновения. Величина единичного смещения имеет порядок ларморовского радиуса. Ларморовский радиус для ионов больше ларморовского радиуса для электронов за счет различия масс частиц, поэтому диффузия ионов на стенки камеры должна происходить быстрее, чем диффузия электронов. Однако разделение зарядов в плазме вызывает электрическое поле (самосогласованное амбиполярное поле), которое препятствует дальнейшему уходу ионов, в результате чего скорости ионной и электронной диффузии сравниваются – это амбиполярная диффузия.

Второе, что препятствует удержанию плазмы – неустойчивости. Два примера неустойчивостей, возникающих в шнуре плазмы, приведены на рисунке.



- а) винтовая (изгибная, шланговая) неустойчивость
- б) сосисочная неустойчивость (неустойчивость перетяжек) [11]

Рисунок 13 – Примеры неустойчивостей плазменных шнуров [5]

#### 4.1.4 Параметр $\beta$

Отношение газодинамического давления плазмы к давлению магнитного поля обозначается  $\beta$

$$\beta = P_{plasma}/P_{magn}. \quad (166)$$

Параметр  $\beta$  не должен быть слишком маленьким, потому что создание сильных магнитных полей представляет собой технически сложную задачу (сверхпроводящие катушки), решение которой требует больших денежных средств. В настоящее время целью синтеза с магнитным удержанием является создание устройств с  $\beta$  порядка нескольких процентов.

#### 4.1.5 Нагрев плазмы

До тех пор, пока в плазме не начнутся термоядерные реакции, ее необходимо нагревать. Существуют три основных способа нагрева плазмы: омический нагрев, нагрев высокочастотными полями и нагрев с помощью инъекции пучков нейтральных частиц.

Омический нагрев – это нагрев плазмы при возбуждении в ней электрического тока. С увеличением температуры проводимость плазмы растет, поэтому омический нагрев возможен лишь на начальных стадиях процесса.

Нагрев высокочастотным полем основан на том, что в замагниченной плазме существует спектр собственных частот электронных и ионных колебаний, и возможна резонансная передача энергии из падающей на плазму электромагнитной волны в эти колебания частиц. Обычно для нагрева используется циклотронная частота.

В плазму инжектируются нейтральные частицы с энергией несколько десятков кэВ. Они ионизируются в результате столкновений, захватываются магнитным полем и отдают энергию другим частицам.

В результате термоядерных реакций образуются  $\alpha$ -частицы и нейтроны. Первые захватываются полем и обеспечивают дополнительный нагрев. Вторые поглощаются в blankets, окружающем устройство.

#### 4.2 Линейные системы

Первые попытки реализации синтеза с магнитным удержанием начались в Великобритании после Второй мировой войны. В 1946 году G. Thomson и M. Blackman в Лондоне получили патент на термоядерную электростанцию, где предлагали удерживать плазму магнитным полем в тороидальной камере. В том же году в Оксфорде был начат проект по удержанию плазмы в тороидальной камере за счет пинч-эффекта, открытого ранее в университете г. Сиднея в Австралии.

#### 4.2.1 Z-пинч

Линейный Z-пинч состоит из катушки, создающей магнитное поле вдоль оси системы, и двух электродов, между которыми зажигается разряд. Такая конфигурация слишком неустойчива, и использование ее для термоядерного синтеза сомнительно, но сверхбыстрые пинчи могут быть использованы как источник рентгена или драйвер для инерционного синтеза.

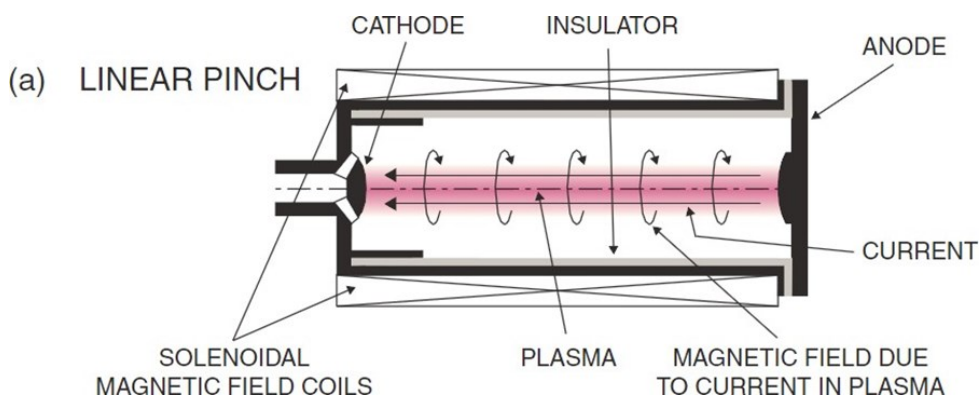


Рисунок 14 – Линейный Z-пинч [5]

#### 4.2.2 Тета-пинч

Тета-пинч – это одновитковая катушка с широким проводником, обернутая вокруг плазменного шнура. На катушку подается импульс тока, создающий быстро нарастающее продольное магнитное поле, которое нагревает плазму до температур порядка единиц кэВ и формирует в ней первоначальную ударную волну. Плазма получается достаточно устойчивая и плотная за счет сжатия в волне и последующего дожатия, но слишком короткоживущая. Характерная длительность импульса – порядка микросекунды, и даже за такое время потери через концы системы слишком велики. В Лос Аламосе проводились эксперименты с тороидальными тета-пинчами, но те оказались слишком неустойчивыми.

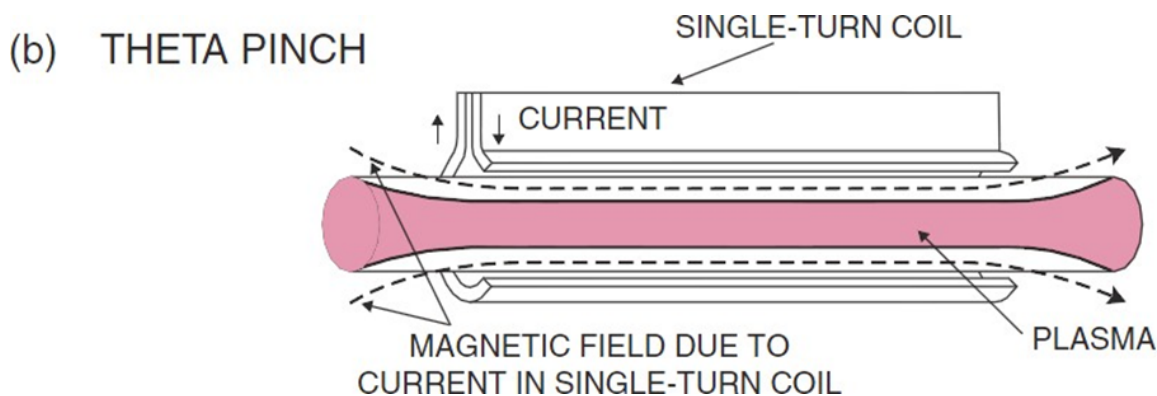


Рисунок 15 – Тета-пинч [5]

#### 4.2.3 Пробкотрон

Пробкотрон или ловушка с магнитными пробками – устройство, в котором основная катушка создает аксиальное магнитное поле, но на концах установлены дополнительные



катушки (магнитные зеркала), увеличивающие поле. В соответствии с (165) магнитный момент частицы  $mv_{\perp}^2/2H \propto p^2/H$  – адиабатический инвариант, поэтому при приближении частицы к краям ловушки перпендикулярная составляющая скорости растет. Поскольку энергия частицы сохраняется, этот рост происходит за счет продольной составляющей скорости – продольное движение частицы замедляется. Частицы с не слишком большой продольной скоростью успевают остановиться, остальные (летящие близко к оси) покидают систему (конус потерь). Вместо обычных катушек на концах можно использовать проводники более сложной формы (бейсбольная обмотка, обмотка инь-янь). Проблемы все те же, что и у остальных линейных устройств: потери через торцы системы и неустойчивости. В России и США исследования на пробкотронах прекратились, в Японии остается один работающий пробкотрон.

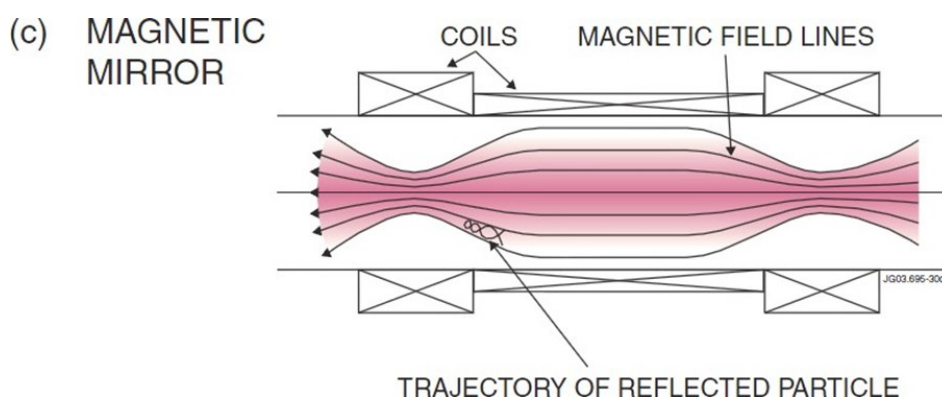


Рисунок 16 – Пробкотрон [5]

### 4.3 Тороидальные системы

#### 4.3.1 Тороидальный пинч

Для того, чтобы устранить уход плазмы из линейной системы через концы, ее можно замкнуть в тор. Конфигурация, когда плазма находится внутри тора и удерживается полоидальным полем протекающего по ней тока, называется тороидальным пинчем. Плазма при этом является вторичной обмоткой трансформатора, ток поддерживается действием индуктора – это нестационарная система. У такого пинча две основные проблемы. Во-первых, его плазменный шнур неустойчив. Во-вторых, магнитное поле на внутренней поверхности тора, то есть вблизи оси системы, больше, чем на внешней поверхности, что приводит к дрейфу частиц на стенки камеры. Для того чтобы улучшить стабильность, тор стали «обвивать» катушками, создающими слабое тороидальное магнитное поле (добавлять вращательное преобразование поля). Еще большей устойчивости удалось добиться в конфигурации, когда в процессе работы системы ток в катушках тороидального поля быстро менялся на противоположный, так что и тороидальное магнитное поле меняло направление снаружи плазмы – reversed field pinch

(пинч с обращенным полем). Главным его достоинством является то, что RFP позволяет работать при больших значениях  $\beta$ .

#### 4.3.2 Стелларатор

Для решения проблем тороидального пинча было решено не полагаться на собственное полоидальное поле тока, а осуществлять удержание только за счет внешних полей. Л. Спитцер предложил перекрутить тор в восьмерку. Это добавило полоидальную компоненту к тороидальному полю обмотки и привело к тому, что частицы, двигавшиеся по внутреннему радиусу на одной из петель камеры, переходили на внешний радиус на второй петле, что позволило частично нивелировать их дрейф. Так в начале 1950-х годов в Принстоне появился стелларатор. В более поздних конструкциях вместо закручивания всей камеры стали просто добавлять винтовые обмотки, формирующие полоидальное поле. Ток в соседних частях двух винтовых обмоток течет в противоположных направлениях, оставляя только полоидальную компоненту магнитного поля в плазме. Ток в плазме стеллараторов не течет. Недостатки стеллараторов – это сложность теоретических расчетов и дороговизна конструкции из-за неэффективности использования магнитного поля. Тем не менее, исследования на стеллараторах ведутся до сих пор. В 1998 году в Японии был запущен Large Helical Device (LHD), в Германии в 2015 году (должен был быть) закончен Wendelstein 7-X.

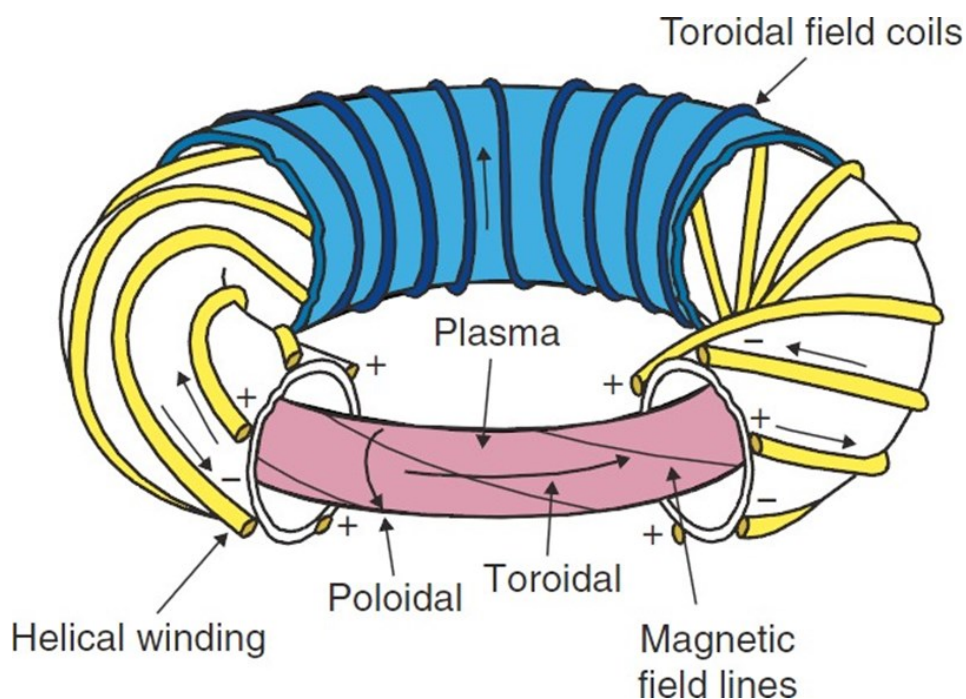


Рисунок 17 – Стелларатор [5]

#### 4.3.3 Токамак

Еще одна замкнутая схема с магнитным удержанием – токамак. Токамак – это тот же тороидальный пинч. Разница между ними заключается в относительной силе

тороидального и полоидального поля. В пинче полоидальное поле заметно больше тороидального, так что суммарные силовые линии навиты на тор с малым пространственным шагом. В токамаке, наоборот, тороидальное поле на порядок сильнее полоидального поля плазменного тока. Основная задача сильного тороидального поля – как раз стабилизация плазмы. Плазма в токамаке является вторичной обмоткой трансформатора – так в ней возбуждается (тороидальный) ток.

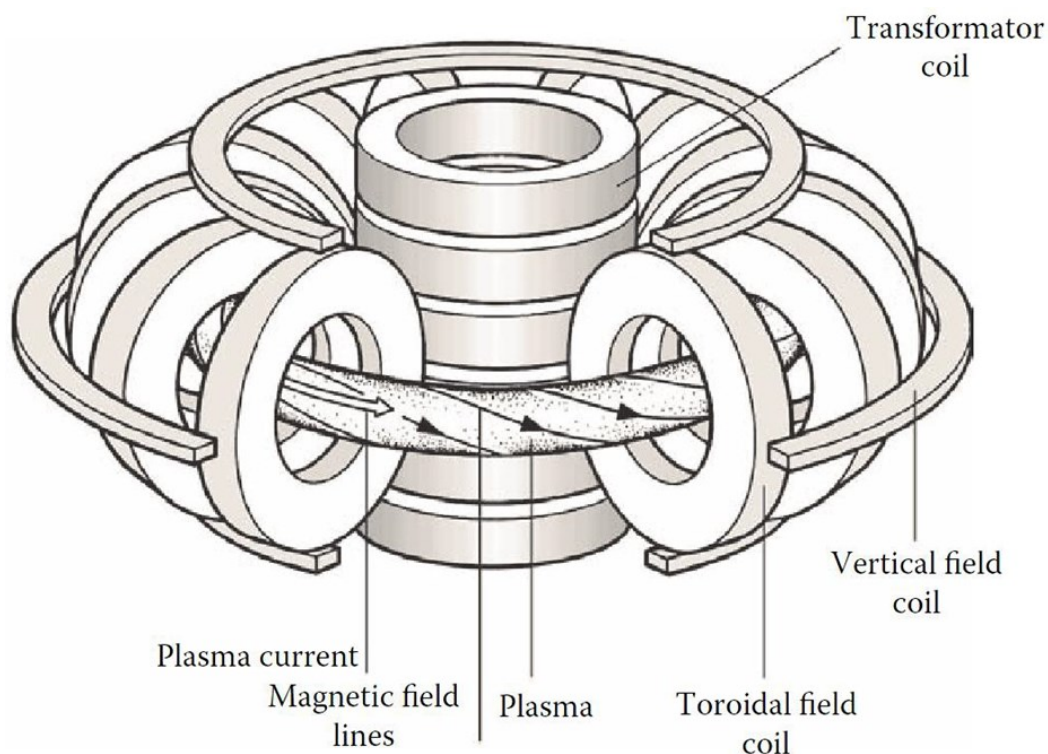


Рисунок 18 – Токамак [4]

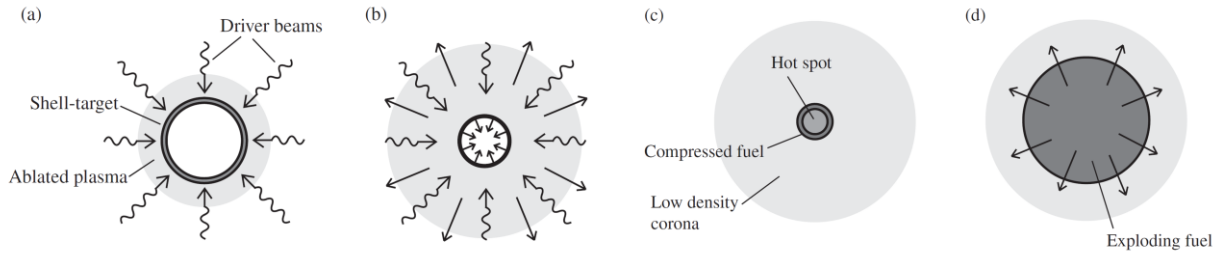
Наиболее актуальный проект токамака на сегодняшний день – ITER. Его задача – демонстрация возможности коммерческого использования термоядерного реактора (принципиальная возможность зажигания реакции была продемонстрирована на JET – Joint European Torus) – получение 500 МВт мощности в течение 500 с. Место строительства – исследовательский центр Кадараш на юге Франции, недалеко от Марселя. Участники проекта: ЕС, Китай, Индия, Япония, Республика Корея, Россия и США. Стоимость проекта – 15 млрд. евро, планируемая дата окончания строительства и начала экспериментов – 2020 год.

Проект собственно электростанции, использующий термоядерный синтез, и планирующейся переходным звеном между ITER и коммерческими реакторами, называется DEMO. В настоящее время не закончено даже концептуальное проектирование.

## 5 Инерциальное удержание

### 5.1 Схема ИТС

В синтезе с инерциальным удержанием задача заключается в том, чтобы сжать и нагреть топливо так быстро, чтобы оно не успело разлететься. Единственное, что удерживает топливо от разлета – собственная инерция, отсюда и название. Классическая схема работы мишени для инерционного термоядерного синтеза следующая.



(а) облучение, (б) сжатие за счет абляции,  
(с) центральное зажигание, (д) горение и взрыв

Рисунок 19 – Схема работы мишени для ИТС [8]

Имеется сферическая капсула с термоядерным топливом, внешняя оболочка которой испаряется под действием падающего на нее снаружи потока энергии – происходит абляция материала оболочки. Устройство, которое передает энергию мишени, называется драйвером. Внутренняя часть мишени сжимается реактивной силой испаряющейся внешней оболочки и разогревается. Когда в мишени давление и температура достигают необходимых значений, в ней зажигается реакция.

### 5.2 Критерий $\rho R$

Критерий Лоусона стационарный: он предполагает, что состояние плазмы не изменяется на протяжении всего времени, пока идут реакции. В инерциальном синтезе это слишком грубое приближение, поэтому обычно используется другой критерий зажигания.

Рассмотрим, как происходит выгорание топлива в мишени:

$$\frac{dn_T}{dt} = -n_D n_T \langle \sigma v \rangle, \quad (167)$$

или, для эквимольной смеси дейтерия и трития,

$$\frac{dn}{2dt} = -\frac{n^2}{4} \langle \sigma v \rangle. \quad (168)$$

Интегрируем (168)

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n_0} = \frac{\langle \sigma v \rangle t}{2}, \quad (169)$$

где  $n_0$  – концентрация частиц в мишени в момент начала горения.

Иначе,

$$\frac{n}{n_0} = \frac{1}{1 + \frac{\langle \sigma v \rangle}{2} t n_0}. \quad (170)$$

Степень выгорания

$$f = \frac{\text{число реакций}}{\text{начальное число частиц}} = \frac{N_0 - N}{N_0}, \quad (171)$$

или приближенно

$$f \approx 1 - \frac{n(\tau)}{n_0}, \quad (172)$$

где  $\tau$  – некоторый момент времени, более ранний, чем время окончания горения.

Это связано с тем, что мишень не всегда горит вся: внешняя часть испаряется и разлетается, так что средняя по всей мишени концентрация непрореагировавших частиц больше, чем конечная концентрация в неразлетевшейся части. Скорость движения фронта разлета – скорость звука  $c_s$ . Эффективный момент окончания горения – интеграл от времени с весом, равным доле объема, участвующей в горении:

$$\tau = \int_0^{R_0/c_s} \frac{V}{V_0} dt, \quad (173)$$

где  $R_0$  – начальный радиус мишени;

$V_0$  – ее объем.

Вычислим интеграл (173)

$$\tau = \int_0^{R_0/c_s} \left( \frac{R_0 - t c_s}{R_0} \right)^3 dt = \int_0^{R_0/c_s} (1 - t c_s / R_0)^3 dt = -\frac{R_0}{c_s} \frac{(1 - t c_s / R_0)^4}{4} \Big|_0^{R_0/c_s} = \frac{R_0}{4 c_s}, \quad (174)$$

и подставим в (170), а полученное выражение затем в формулу (172) для степени выгорания:

$$f = 1 - \frac{1}{1 + \frac{\langle \sigma v \rangle}{2} \cdot \frac{R_0}{4 c_s} n_0} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{\langle \sigma v \rangle}{8 c_s} R_0 \rho} = \frac{\rho R_0}{\frac{8 c_s m_i}{\langle \sigma v \rangle} + \rho R_0}, \quad (175)$$

где концентрация частиц  $n_0$  заменена отношением плотности  $\rho$  к массе иона  $m_i$ . Это критерий  $\rho R$ . Величина

$$H_B = \frac{8 c_s m_i}{\langle \sigma v \rangle}, \quad (176)$$

стоящая в знаменателе (175), называется burn parameter. Она зависит от температуры следующим образом:

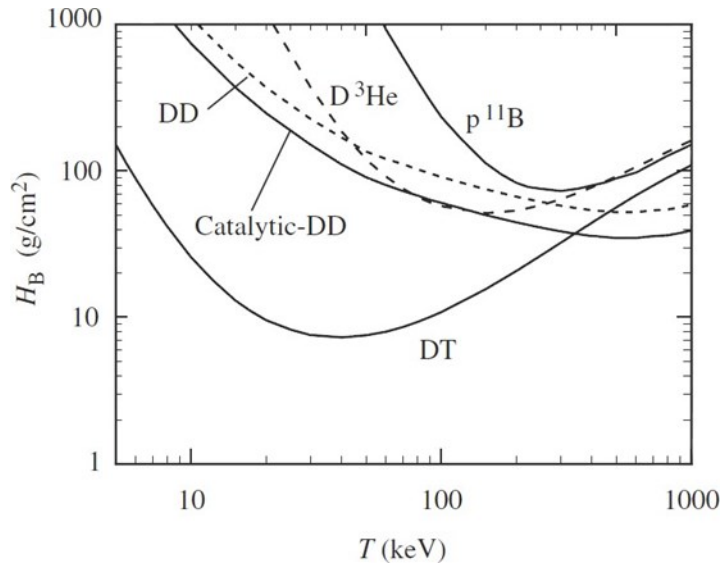


Рисунок 20 – Burn parameter [8]

В диапазоне температур от 10 до 100 кэВ burn parameter изменяется несильно. Обычно его полагают равным константе (6,3 или 7). Критерием горения мишени считает выгорание приблизительно 30% топлива, что соответствует  $\rho R$ , равному 3 г/см<sup>2</sup>.

### 5.3 Требования к мишени и драйверу

Определим требования к мишеням и драйверу, которые следуют из критериев зажигания.

#### 5.3.1 Температура топлива

При малой температуре мала энергия, затрачиваемая на нагрев вещества мишени, но мала и реакционная способность  $\langle \sigma v \rangle$ , а значит, и степень выгорания топлива. При большой температуре, наоборот, – реакционная способность и степень выгорания велики, но должна быть велика как удельная вложенная энергия (собственно, и определяющая температуру вещества), так и масса нагретого топлива, ибо скорость звука пропорциональна корню из температуры, и с ростом температуры мишень начинает разлетаться все быстрее. Можно предположить, что существует оптимальная температура мишени, при которой энергия, затраченная на нагрев последней, еще не слишком велика, а скорость реакций уже достаточна для того, чтобы обеспечить выполнение критерия зажигания (150). Найдём температуру, при которой достигается минимум энергии, считая плотность и время удержания минимально достаточными для выполнения критерия зажигания

$$\min_T [E |_{\rho, n\tau = \min}]. \quad (177)$$

Тепловая энергия топлива:

$$E \propto TN \propto TV \propto TR^3 \propto T(c_s \tau)^3 \propto T(\sqrt{T})^3 (n\tau)^3. \quad (178)$$

Из критерия Лоусона (150)

$$n\tau \propto \frac{T}{\langle \sigma v \rangle}, \quad (179)$$

поэтому, оставляя только зависимость энергии от температуры, получим

$$E \propto \frac{T^{11/2}}{\langle \sigma v \rangle^3}. \quad (180)$$

Реакционная способность  $\langle \sigma v \rangle$

$$\langle \sigma v \rangle \propto T^{-2/3} e^{-3(T_m/T)^{1/3}}, \quad (181)$$

откуда

$$E \propto T^{11/2} T^2 e^{9(T_m/T)^{1/3}} = T^{15/2} e^{9(T_m/T)^{1/3}}. \quad (182)$$

Зависимость энергии топлива от температуры для ДТ изображена на Рисунок 21.

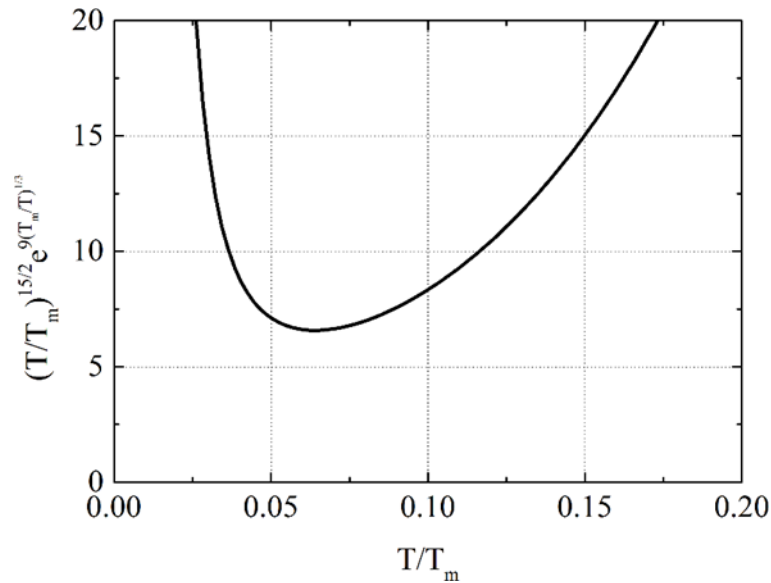


Рисунок 21 – Зависимость энергии топлива от температуры при выполнении критерия зажигания

Поскольку максимум сечения реакции находится вблизи 110 кэВ, из рисунка следует, что оптимальная температура топлива несколько меньше 10 кэВ.

### 5.3.2 М а с с а т о п л и в а

Масса топлива

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho R^3 = \frac{4\pi (\rho R)^3}{\rho^2}, \quad (183)$$

то есть для достижения больших  $\rho R$  нужна большая масса и большая плотность. Максимальная масса топлива ограничена стремлением избежать разрушения камеры взаимодействия. Удельный запас термоядерной энергии топлива был вычислен раньше: 1 мг топлива содержит 340 МДж, что соответствуют запасу химической энергии 100 кг обычного взрывчатого вещества (1 ккал/г). Отличие от ВВ заключается в том, что импульс, передаваемый на стенки камеры взаимодействия не такой большой, поскольку массы частиц маленькие



$$E = p^2/2m. \quad (184)$$

### 5.3.3 Степень сжатия топлива

Для массы топлива, равной 1 мг, и  $\rho R$ , равного 3, плотность равна 300 г/см<sup>3</sup>, а радиус мишени – 10<sup>-2</sup> см. При скорости звука порядка 10<sup>7</sup> см/с время разлета составляет 1 нс.

Поскольку плотность твердого ДТ равна 0,25 г/см<sup>3</sup>, для достижения плотности 300 г/см<sup>3</sup> топливо необходимо сжать в 1000 раз. Сжатие вещества осуществляется проходящими по нему ударными волнами. Одна сильная плоская ударная волна сжимает идеальный газ в  $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$  раз. Для одноатомного газа показатель адиабаты  $\gamma$  равен 5/3, и степень сжатия равна 4. Чтобы сжать вещество в 1000 раз, нужны пять волн ( $4^5 = 2^{10} = 1024$ ). Это означает, что для того, чтобы обеспечить нужное сжатие, необходимо профилировать импульс драйвера.

### 5.3.4 Длина волны лазера

В качестве драйверов в настоящее время рассматриваются лазеры, ускорители электронов и ионов. Принципиальное различие между ними заключается в том, что частицы проникают глубоко внутрь мишени, в то время как лазерное излучение (в схеме с прямым облучением) экранируется от основного вещества плазменной короной, поглощаясь вблизи критической плотности, откуда энергия переносится вглубь мишени за счет теплопроводности. Чтобы избежать развития нежелательных (нелинейных) эффектов взаимодействия лазерного излучения драйвера с плазмой, необходимо иметь небольшую длину волны. Длина волны определяет максимальную допустимую интенсивность лазерного излучения на мишени. Если облучать мишень слишком мощным лазерным импульсом, то основным механизмом поглощения будет являться резонансное, в результате чего будут генерироваться быстрые электроны. Сечение их столкновения с другими частицами мало, и пробег больше размеров мишени, поэтому они способны пролетать мишень насквозь, прогревая ее всю, и удерживаясь от разлета лишь электростатическим потенциалом, возникающим, если электроны начнут уходить из мишени.

### 5.3.5 Однородность облучения мишени

Чтобы обеспечить равномерное сжатие и избежать развития гидродинамических неустойчивостей, необходима высокая однородность облучения поверхности мишени – порядка единиц процентов. Неоднородности облучения делятся на крупно- и мелкомасштабные. Крупномасштабные неоднородности могут быть вызваны недостаточным количеством лазерных пучков, или дисбалансом энергии в пучках. Мелкомасштабные – неоднородностями внутри пучков. Для того чтобы увеличить однородность облучения топлива греющим излучением и снизить вероятность развития



неустойчивостей, используются схемы прямого облучения с большим количеством пучков, или схемы непрямого облучения, когда капсула с топливом помещается в бокс из вещества с большим атомным номером. Внутренняя поверхность бокса освещается лазерным излучением, которое конвертируется в рентгеновское излучение, нагревающее капсулу. Бокс называется боксом–конвертором или хольраумом (Hohlraum). Использование не прямой схемы позволяет снизить требования на однородность облучения поверхности лазерным излучением, поскольку рентгеновское излучение симметризуется за счет геометрического фактора, но повышает требования на лазерную энергию, так как эффективность конверсии лазерного излучения в рентгеновское меньше 100% (обычно порядка 70%).

### 5.3.6 Энергия драйвера

Энергия топлива

$$E = 3nTV = 3 \frac{\rho N_A}{A} TV = 3 \frac{N_A}{A} TM. \quad (185)$$

Если масса равна 1 мг, а температура – 10 кэВ, то для атомного веса, равного 2,5, получим энергию, равную 1,6 МДж. Требования на энергию драйвера необходимо увеличить, если учесть, что она не вся идет на нагрев мишени: часть энергии просто теряется в результате отражения, часть переходит в кинетическую энергию разлетающегося аблятора, и т.д. Требование на энергию можно снизить, если учесть, что происходит разогрев мишени тормозящимися  $\alpha$ -частицами. Вообще, эта формула слишком проста, но порядок величины позволяет оценить. Требования к запасенной энергии определяют физический размер установки. Концентрация частиц в стекле

$$n = \frac{\rho N_A}{A} = \frac{1,5 \cdot 6 \cdot 10^{23}}{30} = 3 \cdot 10^{22} (\text{см}^{-3}). \quad (186)$$

Энергия запасается атомами примесей, которых в стекле в  $10^3$  раз меньше. Энергия, запасенная одним атомом, около 1 эВ – это соответствует длине волны в 1 мкм. Плотность запасенной энергии  $3 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ , или 5 Дж/см<sup>3</sup>. Поскольку энергия снимается не вся, необходим некоторый запас. 5 МДж соответствуют  $5 \cdot 10^6 \text{ см}^3$  или 5 м<sup>3</sup> стекла.

### 5.4 Дизайн мишеней

Дизайн мишеней зависит от того, с какой целью эти мишени производятся. Так, мишени, предназначенные для исследования физических процессов, сильно отличаются от мишеней, предназначенных для достижения зажигания. Исследуемые физические процессы обычно подразумевают взаимодействие излучения (электромагнитного, пучков электронов или ионов) с веществом: поглощение, генерацию электронов, транспорт, и т.д. Такие мишени обычно плоские. Нас в первую очередь будут интересовать мишени для

зажигания термоядерной реакции. Основная задача – создать мишень, способную достичь зажигания (и горения) при минимальной подведенной энергии.

#### 5.4.1 Нагрев

В начале исследований по ИТС предполагалось приводить в состояние, обеспечивающее зажигание (то есть в состояние горячей плотной плазмы), все топливо мишени (volume ignition, объемное зажигание). Большая часть энергии драйвера тратится при этом не на сжатие, а на нагрев плазмы. Для того чтобы снизить требования к энергетическим параметрам драйверов, была предложена концепция hot-spot. Ее основная идея заключается в том, что сжимается все топливо, а нагревается лишь его небольшая центральная часть. Традиционный вариант предполагает сжатие и нагрев одной и той же серией ударных волн при одновременной фокусировке их в центре мишени. В качестве альтернативы рассматривается ситуация, когда вещество сжимается первой серией волн, а поджиг осуществляется последней волной большой амплитуды, доводящей температуру в центре мишени до необходимой.

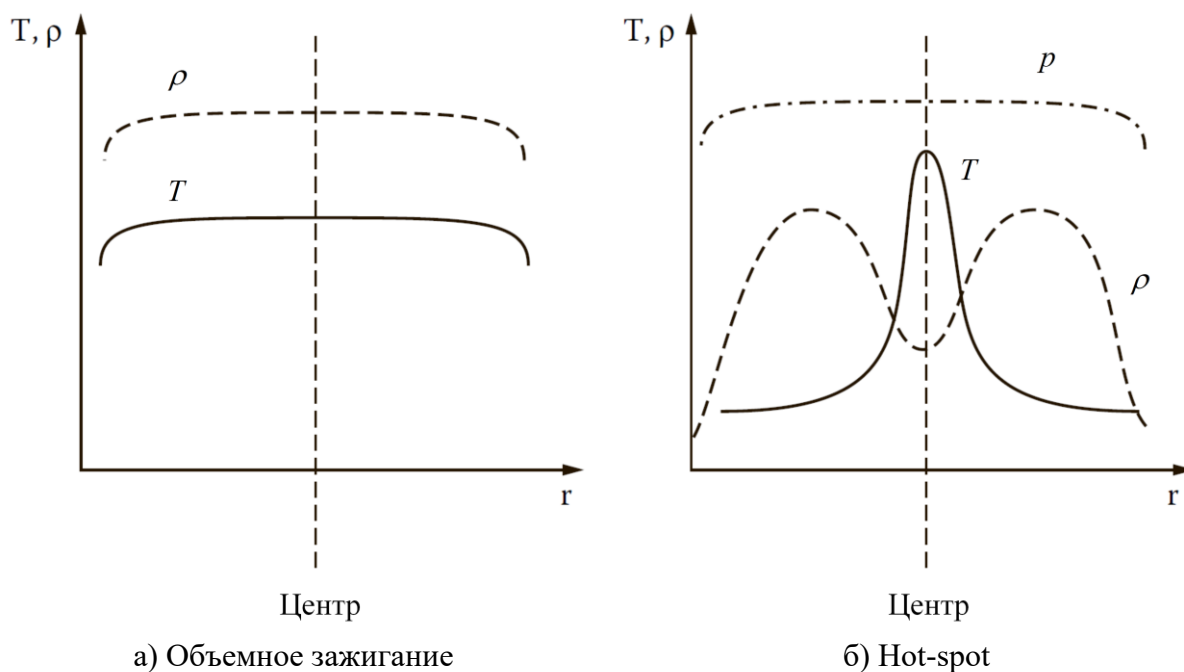


Рисунок 22 – Температура и плотность капсулы в разных подходах [4]

Температура внешних слоев топлива в hot-spot подходе порядка 1 кэВ, внутренних – от 5 кэВ до 10 кэВ – достаточно, чтобы начались реакции термоядерного синтеза. Из центральной области волна термоядерного горения распространяется наружу по слоям сжатого топлива. Сжатое холодное топливо внешних слоев обеспечивает удержание нагретой центральной области. Если масса центральной части (собственно hot spot) составляет несколько процентов от общей массы топлива, то на ее нагрев необходимо

затратить энергию, сравнимую с энергией, требующейся для сжатия всего остального топлива. Полная энергия, требуемая для вложения в мишень – от 1 МДж до 2 МДж при массе топлива порядка 1 мг.

#### 5.4.2 Сжатие

Повысить эффективность сжатия (холодного) топлива можно, если использовать не сплошную мишень, а оболочечную, представляющую из себя твердую сферическую оболочку, заполненную топливом.

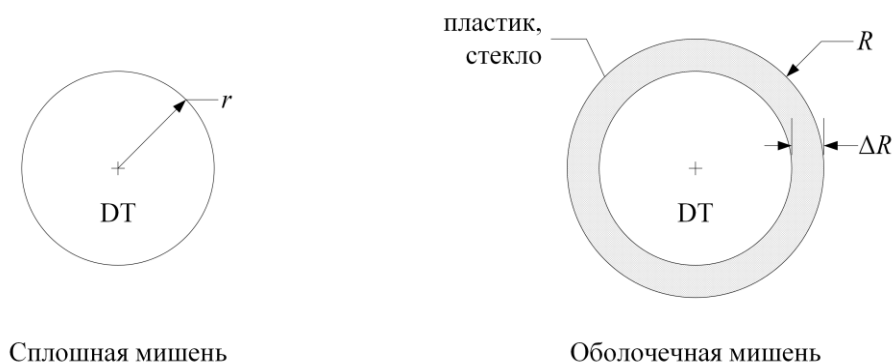


Рисунок 23 – Схемы капсулы

Первые оболочечные мишени работали в режиме взрывающейся оболочки. Когда короткий мощный импульс освещает стеклянную оболочку, в ней за счет резонансного поглощения генерируются быстрые электроны, которые теряют энергию в оболочке, нагревая ее. Оболочка взрывается; половина ее летит наружу, половина – внутрь, создавая в топливе ударную волну, сжимающую и нагревающую его. Недостатки мишени – низкая эффективность поглощения энергии драйвера и преобразования ее в кинетическую энергию оболочки. Такие мишени сейчас не применяются.

Основной тип исследуемых в настоящее время мишеней – мишени, работающие в режиме абляционного сжатия. Основное отличие такой схемы от режима взрывающейся оболочки – использование длинного профилированного импульса драйвера, позволяющего контролировать процесс сжатия. В схеме прямого облучения оболочка освещается лазерным излучением равномерно по всей поверхности. Внешняя часть оболочки нагревается, ионизуется и испаряется, образуя вокруг мишени область плазмы с низкой плотностью – корону. Лазерное излучение продолжает падать на корону снаружи и поглощается в ней, но проникает только до критической плотности. Внутри мишени энергия передается за счет электронной теплопроводности. Внутренние слои мишени нагреваются и тоже испаряются, сжимая центральную часть мишени импульсом отдачи. По неиспаренной области идут ударные волны. Когда волны сходятся в центре мишени, они нагревают центральную область до температуры зажигания (hot spot).

Если плотность топлива достаточно велика, образующиеся в (ДТ-)реакции  $\alpha$ -частицы тормозятся в нем, выделяя энергию и еще больше поднимая температуру. По мере горения увеличивается прозрачность центральной области для  $\alpha$ -частиц, и они проходят до пока еще холодной области окружающего топлива и нагревают его, запуская там реакцию. Так формируется волна термоядерного горения, распространяющаяся наружу мишени.

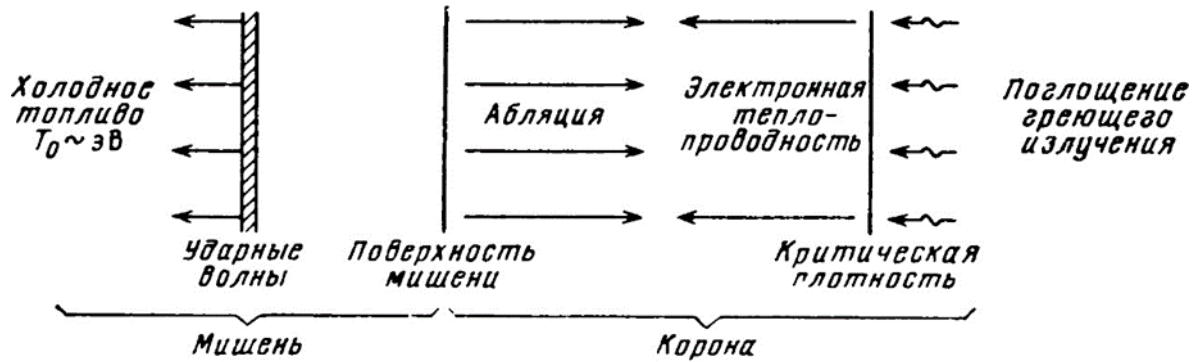


Рисунок 24 – Гидродинамические процессы и процессы передачи энергии при имплозии термоядерной мишени [12]

Для того чтобы мишень было легче сжимать, она изначально охлаждается до криогенных температур. При этом часть ДТ газа конденсируется на внутренней поверхности оболочки в виде льда – это криогенная мишень.

Чтобы разогнать вещество оболочечной мишени до некоторой скорости  $v$ , необходимо сообщить ему кинетическую энергию

$$\frac{mv^2}{2} \approx \frac{S \cdot \Delta R \cdot \rho \cdot v^2}{2}, \quad (187)$$

где  $S$  – площадь поверхности сферы;

$\Delta R$  – толщина слоя топлива.

Если на поверхность сферы действует давление  $p$ , то работа, которую оно совершит, сжимая мишень, равна  $pSR$ . Приравняем энергию и работу

$$p = \frac{\rho v^2}{2A}, \quad (188)$$

где  $A$  – аспектное отношение

$$A = \frac{R}{\Delta R}. \quad (189)$$

Увеличивая аспектное отношение, можно снизить требования на давление, которого необходимо достичь на фронте абляции. Снижение давления означает уменьшение чувствительности процесса сжатия к развитию неустойчивостей. Во-первых, чем меньше давление, тем меньше ускорение и инкремент нарастания неустойчивости. Во-вторых, если неустойчивость все-таки развилась, давление падает, но меньшая конечная скорость может

быть по-прежнему приемлемой. Это делает эффективным использование мишеней с высоким аспектным отношением.

Помимо уменьшения требований к давлению, преимуществом мишеней с тонкой оболочкой является «локально-плоская геометрия». Если аспектное отношение велико, распространение ударной волны в оболочке ближе к распространению волны в плоском случае, чем в сферическом. Степень сжатия в плоской волне меньше, чем в сферической, что позволяет держаться ближе к адиабате Пуассона, то есть приблизить сжатие к изоэнтропическому.

Недостаток таких мишеней заключается в том, что сферическая форма очень тонкого слоя топлива будет заметно искажена даже незначительной неустойчивостью: если искажения фронта абляции достигнут величин, сравнимых с  $\Delta R$ , оболочка распадется на отдельные капли. Поскольку амплитуда искажений поверхности фронта абляции экспоненциально растет со временем до величины, сравнимой с длиной волны искажения, наиболее опасными являются искажения с длиной волны порядка начальной толщины слоя топлива.

## 6 Кинетика плазмы

### 6.1 Определение плазмы

Плазма – квазинейтральный (идеальный) газ заряженных частиц.

Начнем с определения газа. Совокупность частиц образует газ, если средняя потенциальная энергия взаимодействия отдельных частиц мала по сравнению с их средней тепловой (кинетической) энергией. В идеальном газе взаимодействие между частицами полностью отсутствует. Для частиц с зарядом  $q$  с кулоновским взаимодействием должно выполняться

$$\frac{q^2}{r} \ll T, \quad (190)$$

где  $r$  – среднее расстояние между частицами.

Для того чтобы сформулировать количественные требования к тому, чтобы газ носителей электрического заряда можно было считать плазмой, нам понадобится понятие дебаевского радиуса.

#### 6.1.1 Дебаевский радиус

Поле уединенного заряда

$$\varphi = \frac{q}{r}. \quad (191)$$

Рассмотрим ион в плазме. Он окружен другими ионами и электронами, которые как-то распределены в пространстве и меняют поле вокруг исходного иона. Найдем это измененное поле, для простоты полагая ион однозарядным ( $q$  – элементарный положительный заряд). Уравнение Пуассона:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad (192)$$

где  $\rho$  – плотность заряда.

Если частицы распределены по Больцману, то

$$\rho = qn_0 \left( e^{-\frac{q\varphi}{T}} - e^{\frac{q\varphi}{T}} \right), \quad (193)$$

где  $n_0$  – концентрация частиц на бесконечности, где поля нет;

слагаемые в скобках отвечают ионам и электронам соответственно.

Плотность заряда (193) можно разложить в ряд. Оставляя в слабом поле (190)  $q\varphi/T \ll 1$  только первые несокращающиеся слагаемые, получим

$$\rho = qn_0 \left( 1 - \frac{q\varphi}{T} - 1 - \frac{q\varphi}{T} \right) = -2q^2n_0 \frac{\varphi}{T}. \quad (194)$$

Радиальная часть оператора Лапласа в сферической системе координат

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\varphi). \quad (195)$$

Подставляя (195) и (194) в (192), получим

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\varphi) = 2 \cdot \frac{4\pi q^2 n_0}{T} r\varphi, \quad (196)$$

или

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\varphi) = \frac{r\varphi}{\lambda_D^2}, \quad (197)$$

где  $\lambda_D$  – дебаевский радиус

$$\lambda_D^2 = \frac{T}{8\pi q^2 n_0}. \quad (198)$$

Решением уравнения (197), удовлетворяющим граничным условиям (191) вблизи заряда и убывающим на бесконечности, является

$$r\varphi = qe^{-r/\lambda_D}. \quad (199)$$

### 6.1.2 К в а з и н е й т р а л ь н о с т ь

Пространственный масштаб разделения зарядов в плазме – расстояние, на которое может сместиться возмущение плотности заряженных частиц за время, равное периоду плазменных колебаний – близок к дебаевскому радиусу. Для квазинейтральности необходимо, чтобы характерные линейные размеры плазмы были много больше дебаевского радиуса.

### 6.1.3 И д е а л ь н о с т ь

Подставим в требование применимости газового приближения (190) температуру из определения дебаевского радиуса (198), где выразим концентрацию частиц через расстояние между ними. Отбрасывая множители порядка единицы, получим

$$\frac{q^2}{r} \ll q^2 r^{-3} \lambda_D^2, \quad (200)$$

или

$$\eta \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{r}{\lambda_D}\right)^2 \ll 1, \quad (201)$$

где введен плазменный параметр  $\eta$ . Малость плазменного параметра, то есть малость расстояния между частицами по сравнению с дебаевским радиусом, означает, что количество частиц в дебаевской сфере велико, то есть важно электрическое взаимодействие одновременно большого количества частиц. В то же время, непосредственно из газового приближения (190) следует, что малость плазменного параметра малость электрического взаимодействия (т.е. кулоновского рассеяния) двух отдельных частиц, поскольку частицы в среднем слишком далеки друг от друга. Таким образом, плазменный параметр показывает, в какой степени плазменные, или коллективные, эффекты преобладают над одночастичными.

Плазма, для которой выполняется условие (201), называется идеальной. Ее можно рассматривать как идеальный газ заряженных частиц, то есть как газ, в котором могут существовать электрическое поле и пространственный заряд, но в котором две отдельные частицы не взаимодействуют.

## 6.2 Кинетические уравнения для плазмы

Плазма – ионизированный газ, имеющий настолько высокую плотность, что (совокупными электромагнитными) силами взаимодействия составляющих его частиц нельзя пренебречь по сравнению с силами, действующими со стороны внешних полей. По определению проблема описания плазмы есть проблема многих тел.

Для описания плазмы можно использовать уравнения Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (202)$$

в сочетании с уравнением движения отдельной частицы под действием силы Лоренца

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}, \quad (203)$$

$$\vec{F} = e \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right). \quad (204)$$

Для описания движения частиц в плазме можно решить уравнения движения в поле, вычислить плотность зарядов и токов и, подставив их значения в уравнения Максвелла, определить новые напряженности полей. Здесь  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  – самосогласованные поля. Самосогласованное поле – эффективное силовое поле, создаваемое частицами сложной системы. С одной стороны, это поле зависит от распределения частиц. С другой стороны, оно само оказывает влияние на это распределение. Замена взаимодействия между частицами воздействием самосогласованного поля на каждую из них позволяет свести задачу многих тел к задаче о движении отдельных частиц в таком поле. Такой подход – основа PIC-кодов (particle in cell, метод частиц в ячейке) в численных методах.

Другой метод описания плазмы основан на использовании уравнения Лиувилля, определяющего поведение функции распределения. Функция распределения – это плотность частиц в фазовом пространстве, координатами в котором являются пространственные координаты частиц и компоненты их скоростей. Вообще говоря, необходимо рассматривать многочастичные функции распределения, описывающие систему в целом (в  $6N$ -мерном пространстве), для которых записывается уравнение Лиувилля, то есть условие сохранения элемента фазового объема вдоль траектории



движения системы. Это уравнение можно свести к системе уравнений для одночастичных функций распределения, описывающих отдельные частицы, и корреляционных функций разной кратности, описывающих взаимодействие соответствующего количества частиц друг с другом (кластерное разложение в иерархии ББГКИ). В предположении убывания значимости взаимодействий с ростом количества одновременно взаимодействующих частиц система уравнений обрывается на некоторой кратности корреляций. В простейшем случае оставляют одно уравнение для одночастичной функции распределения [13]. Мы будем рассматривать только такие уравнения.

Скорость в фазовом пространстве частицы с тремя степенями свободы имеет шесть измерений

$$\vec{V}_6 = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z) = \left( v_x, v_y, v_z, \frac{F_x}{m}, \frac{F_y}{m}, \frac{F_z}{m} \right) \quad (205)$$

(для декартовых координат).

Предположим, что сила  $F$  – функция положения и скорости самой частицы. Это верно, если рассматривать только силу, образованную усредненным электромагнитным полем, оставляя в стороне силы, связанные с взаимодействием отдельных частиц, зависящие от координат этих других частиц.

Уравнение сохранения числа частиц

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}_6(\vec{V}_6 f) = 0, \quad (206)$$

где  $\vec{V}_6 f$  – поток частиц.

Раскроем дивергенцию

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V}_6 \cdot \nabla_6 f + f \cdot \nabla_6 \vec{V}_6 = 0 \quad (207)$$

и распишем последний член, воспользовавшись определением шестимерной скорости (205)

$$\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial v_x}, \frac{\partial}{\partial v_y}, \frac{\partial}{\partial v_z} \right) \cdot \left( v_x, v_y, v_z, \frac{F_x}{m}, \frac{F_y}{m}, \frac{F_z}{m} \right)^T = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \dots + \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial v_x} + \dots \quad (208)$$

Слагаемые типа  $\partial v_x / \partial x$  равны нулю, так как координаты и скорости считаются независимыми переменными. Слагаемые типа  $\partial F_x / \partial v_x$  также равны нулю, если  $F$  – сила Лоренца:

$$\frac{\partial F_x}{\partial v_x} = \frac{\partial}{\partial v_x} \left\{ e \left[ E_x + \frac{1}{c} (v_y B_z - v_z B_y) \right] \right\} = 0. \quad (209)$$

В итоге (206) превратится в

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V}_6 \cdot \nabla_6 f = 0. \quad (210)$$

Если ввести субстанциональную производную в фазовом пространстве (или оператор Лиувилля)

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V}_6 \nabla), \quad (211)$$

то последнее уравнение можно переписать в виде

$$\frac{Df}{Dt} = 0. \quad (212)$$

Это уравнение Лиувилля для одночастичной функции распределения, которое говорит, при движении частиц в фазовом пространстве их плотность сохраняется. Если разделить в уравнении Лиувилля (210) пространственные и скоростные координаты, получим

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} \nabla_r) f + (\dot{\vec{v}} \nabla_v) f = 0, \quad (213)$$

или, подставив силу Лоренца (204),

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} \nabla_r) f + \frac{e}{m} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) \nabla_v f = 0. \quad (214)$$

Это уравнение называется уравнением Власова.

В общем случае правая часть уравнения Лиувилля для одночастичной функции распределения не равна нулю: она определяется многочастичными функциями распределения. Более наглядно ситуацию можно представить, например, вводя трение, возникающее в результате столкновений между частицами через добавку к силе Лоренца вида  $\vec{F} = -k\vec{v}$ . В этом случае при раскрытии дивергенции (208) в уравнении появятся дополнительные слагаемые, которые можно перенести в правую часть, вводя функционал  $St f$ , показывающий, как изменяется функция распределения в результате столкновений

$$\frac{Df}{Dt} = St f. \quad (215)$$

Функционал  $St f$  называется интегралом столкновений (или штосс-членом), а уравнение (215) – (кинетическим) уравнением Больцмана.

### 6.3 Уравнение Власова

Попытаемся упростить уравнение Власова (214), для чего воспользуемся методом моментов. Этот метод основан на вычислении моментов функции распределения в пространстве скоростей и их связи за счет уравнения Лиувилля (Власова).

#### 6.3.1 Нулевой момент

Проинтегрируем уравнение Власова по всему пространству скоростей:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f d\vec{v} + \nabla_r \int \vec{v} f d\vec{v} + \frac{e}{m} \int \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) \nabla_v f d\vec{v} = 0 \quad (216)$$

(во втором слагаемом производные по координатам были вынесены за знак интеграла, так как от них ничего кроме  $f$  не зависит).

Если  $f$  нормирована условием

$$N = \int f d\vec{v} d\vec{r}, \quad (217)$$

то первый интеграл в (216) равен  $n(\vec{r}, t)$ , то есть плотности частиц в обычном пространстве, второй интеграл –  $n(\vec{r}, t)\langle\vec{v}(\vec{r}, t)\rangle$  – плотности потока частиц в обычном пространстве (угловые скобки означают усреднение по скоростям отдельных частиц; зависимость средней скорости от координат и времени появляется при интегрировании произведения не зависящей от них скорости частиц в фазовом пространстве и зависящей от них функции распределения). Как мы выяснили, когда вычисляли дивергенцию фазовой скорости в (208), дивергенция силы Лоренца в пространстве скоростей равна нулю. Это означает, что силу Лоренца  $\vec{F}$  можно вносить под оператор набла (в пространстве скоростей) и выносить из-под него

$$\vec{F}\nabla_v f = F_i \frac{\partial}{\partial v_i} f = \frac{\partial}{\partial v_i} (F_i f) = \text{div}_v(\vec{F}f). \quad (218)$$

Воспользовавшись этим правилом, увидим, что третий интеграл в (216) представляет собой дивергенцию по всему объему пространства скоростей:

$$\int \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) \nabla_v f d\vec{v} = \int \nabla_v \left[ f \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) \right] d\vec{v}. \quad (219)$$

В силу теоремы Остроградского-Гаусса его можно заменить интегралом от потока через бесконечно удаленную поверхность. Такой поток равен нулю (формально, для любой функции распределения, спадающей быстрее  $1/v^2$  – роста площади; – реально, функция распределения для скорости, больше скорости света, просто равна нулю).

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\vec{r}, t) + \nabla_r [n(\vec{r}, t)\langle\vec{v}(\vec{r}, t)\rangle] = 0. \quad (220)$$

Это уравнение переноса массы (уравнение непрерывности, уравнение сохранения числа частиц в обычном пространстве).

### 6.3.2 Первый момент

Умножаем уравнение Власова на каждую компоненту скорости и интегрируем по всему пространству скоростей

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f v_i d\vec{v} + \int v_i v_j \frac{\partial}{\partial x_j} f d\vec{v} + \frac{e}{m} \int \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) v_i \nabla_v f d\vec{v} = 0. \quad (221)$$

Во втором интеграле выносим производные по координатам из-под знака интеграла

$$\int v_i v_j \frac{\partial}{\partial x_j} f d\vec{v} = n \frac{\partial}{\partial x_j} \langle v_i v_j \rangle, \quad (222)$$

В третьем интеграле вносим силу Лоренца под знак оператора набла, затем берем интеграл по частям; применяем теорему Остроградского-Гаусса и отбрасываем интеграл по бесконечно удаленной поверхности

$$v_i F_j \frac{\partial f}{\partial v_j} = v_i \frac{\partial}{\partial v_j} (F_j f) = \frac{\partial}{\partial v_j} (v_i F_j f) - F_j f \frac{\partial v_i}{\partial v_j} = \text{div}_v (v_i \vec{F} f) - F_j f \delta_{ij} \rightarrow 0 - F_i n, \quad (223)$$

или

$$\frac{e}{m} \int \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) v_i \nabla_v f d\vec{v} = -n \frac{e}{m} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \langle \vec{v} \rangle \times \vec{B} \right)_i, \quad (224)$$

После умножения на массу частицы уравнение (221) превращается в уравнение переноса импульса:

$$\frac{\partial}{\partial t} (nm \langle v_i \rangle) + \frac{\partial}{\partial x_j} (nm \langle v_i v_j \rangle) = \rho E_i + \frac{[\vec{j}, \vec{B}]_i}{c}, \quad (225)$$

где  $\rho = ne$  – плотность заряда;

$\vec{j} = ne \langle \vec{v} \rangle$  – плотность тока.

Величина

$$P_{ij}(r) = n(r)m \langle v_i v_j \rangle, \quad (226)$$

называется тензором плотности потока импульса. Если ввести отклонения скорости от средней по потоку величины

$$v_i \stackrel{\text{def}}{=} \langle v_i \rangle + \delta v_i, \quad (227)$$

то для плотности потока импульса получим

$$\begin{aligned} \langle v_i v_j \rangle &= \langle (\langle v_i \rangle + \delta v_i) (\langle v_j \rangle + \delta v_j) \rangle = \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle + \langle v_i \rangle \langle \delta v_j \rangle + \langle v_j \rangle \langle \delta v_i \rangle + \langle \delta v_i \delta v_j \rangle \\ &= \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle + \langle \delta v_i \delta v_j \rangle, \end{aligned} \quad (228)$$

поскольку по определению (227)

$$\langle \delta v_{i,j} \rangle = \langle v_{i,j} - \langle v_{i,j} \rangle \rangle = \langle v_{i,j} \rangle - \langle v_{i,j} \rangle = 0. \quad (229)$$

Плотность потока импульса

$$P_{ij}(r) = n(r)m \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle + p_{ij}(r), \quad (230)$$

где  $p_{ij}(r)$  – тензор давления

$$p_{ij}(r) = n(r)m \langle \delta v_i \delta v_j \rangle. \quad (231)$$

Если среда как целое покоится, в плотности потока импульса остается только давление. В тензоре давления выделяют изотропную и анизотропную части:

$$p_{ij}(r) = \delta_{ij} p - \sigma_{ij}, \quad (232)$$

где  $p$  – собственно (скалярное) давление;

$\sigma_{ij}$  – тензор вязких напряжений (его мы всегда будем считать равным нулю).

В этих обозначениях уравнение переноса импульса (225) выглядит следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial t}(nm\langle v_i \rangle) + \frac{\partial}{\partial x_j}(nm\langle v_i \rangle \langle v_j \rangle) = -\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + \rho E_i + \frac{[\vec{j}, \vec{B}]_i}{c}, \quad (233)$$

где

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\delta_{ij}p - \sigma_{ij}) = \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}. \quad (234)$$

### 6.3.3 В т о р о й м о м е н т

Умножим уравнение Власова на  $v_i v_j$  и проинтегрируем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f v_i v_j d\vec{v} + \int v_i v_j v_r \frac{\partial}{\partial x_r} f d\vec{v} + \frac{e}{m} \int \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) v_i v_j \nabla_v f d\vec{v} = 0, \quad (235)$$

снова беря последний интеграл по частям

$$v_i v_j \frac{\partial}{\partial v_r} (F_r f) = \frac{\partial}{\partial v_r} (v_i v_j F_r f) - F_r f \frac{\partial}{\partial v_r} (v_i v_j) \rightarrow -F_r f \frac{\partial}{\partial v_r} (v_i v_j). \quad (236)$$

Если искать след уравнения (235), то есть положить  $i = j$  и просуммировать по этому индексу, в последнем интеграле (236) получим

$$-F_r f \frac{\partial}{\partial v_r} v^2 = -2F_r f v_r = -2f \frac{e}{m} (\vec{v}, \vec{E}), \quad (237)$$

так как

$$(\vec{v}, \vec{v}, \vec{B}) = 0. \quad (238)$$

Умножив результат на  $m/2$ , получим уравнение переноса энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} nm \langle v^2 \rangle \right) + \frac{\partial}{\partial x_r} \left( \frac{1}{2} nm \langle v^2 v_r \rangle \right) = (\vec{j}, \vec{E}), \quad (239)$$

где величина, стоящая под знаком дивергенции во втором слагаемом

$$Q_r = \int \frac{1}{2} m v^2 v_r f d\vec{v} = \frac{1}{2} nm \langle v^2 v_r \rangle, \quad (240)$$

называется вектором плотности потока энергии. Расписывая плотность потока энергии аналогично тому, как это было сделано для плотности потока импульса, получим

$$\begin{aligned} \langle v^2 v_i \rangle &= \langle v_j v_j v_i \rangle = \langle [\langle v_j \rangle^2 + 2\langle v_j \rangle \delta v_j + (\delta v_j)^2] (\langle v_i \rangle + \delta v_i) \rangle \\ &= \langle v_j \rangle^2 \langle v_i \rangle + \langle (\delta v_j)^2 \rangle \langle v_i \rangle + 2\langle v_j \rangle \langle \delta v_i \delta v_j \rangle + \langle (\delta v_j)^2 \delta v_i \rangle, \end{aligned} \quad (241)$$

где предполагается суммирование по  $j$ .

## 6.4 Уравнения переноса для равновесной плазмы

### 6.4.1 Средняя скорость частиц

Распределение Максвелла по модулю скорости

$$f = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} 4\pi v^2 e^{-mv^2/2T} (\cdot N). \quad (242)$$

Средняя степень модуля скорости

$$\langle v^n \rangle = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^{2+n} e^{-mv^2/2T} dv = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2T}{m}\right)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right), \quad (243)$$

где  $\Gamma(z)$  – гамма-функция

$$\Gamma(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, z > 0. \quad (244)$$

Если  $n$  нечетное,  $n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} (n \geq -2 \Rightarrow k \geq -1)$ , то

$$\begin{aligned} \langle v^n \rangle = \langle v^{2k+1} \rangle &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2T}{m}\right)^{\frac{2k+1}{2}} \Gamma\left(\frac{2k+1+3}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2T}{m}\right)^{k+\frac{1}{2}} \Gamma(k+2) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2T}{m}\right)^{k+\frac{1}{2}} (k+1)! \end{aligned} \quad (245)$$

поскольку для целых значений аргумента

$$\Gamma(z+1) = z! \quad (246)$$

В частности, при  $n = -1 (k = -1)$  будем иметь

$$\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2T}{m}\right)^{-\frac{1}{2}} 0! = \sqrt{\frac{2m}{\pi T}}, \quad (247)$$

а при  $n = 1 (k = 0)$  –

$$\langle v \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2T}{m}\right)^{\frac{1}{2}} 1! = \sqrt{\frac{8T}{\pi m}} - \quad (248)$$

среднюю скорость частицы.

Если  $n$  четное,  $n = 2k, k \in \mathbb{Z} (n \geq -2 \Rightarrow k \geq -1)$ , то

$$\langle v^{2k} \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2T}{m}\right)^k \Gamma\left(\frac{2k+3}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2T}{m}\right)^k \frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}} \sqrt{\pi} = (2k+1)!! \left(\frac{T}{m}\right)^k, \quad (249)$$

поскольку

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}, n \geq 0. \quad (250)$$

В частности, при  $n = 0 (k = 0)$ , будем иметь

$$\langle v^0 \rangle = 1!! \left(\frac{T}{m}\right)^0 = 1, \quad (251)$$

то есть нормировку функции распределения. При  $n = 2 (k = 1)$  –

$$\langle v^2 \rangle = 3!! \frac{T}{m}. \quad (252)$$

Если термодинамически равновесный газ движется (это ситуация, обычно рассматриваемая в газодинамике), то несмещенная максвелловская функция (242) описывает (изотропное) распределение скоростей частиц относительно средней скорости  $\langle v \rangle$ , поэтому найденный с ее помощью средний квадрат скорости соответствует  $\langle \delta v^2 \rangle$  в выражении для тензора плотности потока импульса – он определяет давление. С одной стороны

$$\text{tr } p_{ij} \equiv \sum_i p_{ii} = p \sum_i \delta_{ii} = 3p, \quad (253)$$

а с другой из (252) –

$$\text{tr } p_{ij} \equiv mn \sum_i \langle \delta v_i^2 \rangle = mn \langle \delta v^2 \rangle = 3nT, \quad (254)$$

так что

$$p = nT \quad (255)$$

уравнение состояния идеального газа.

#### 6.4.2 Перенос массы

Будем считать, что распределение частиц максвелловское, и подставим его в полученные уравнения переноса.

Уравнение переноса массы (220) не изменится. В тензорных обозначениях

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (n \langle v_j \rangle) = 0. \quad (256)$$

#### 6.4.3 Перенос импульса

Если пренебречь вязкостью  $\sigma$ , тензор давления будет диагональным, и уравнение переноса импульса примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (nm \langle v_i \rangle) + \frac{\partial}{\partial x_j} (nm \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho E_i + \frac{[\vec{j}, \vec{B}]_i}{c}, \quad (257)$$

где  $p$  – скалярное давление.

Согласно уравнению переноса массы (256) два (подчёркнутых) слагаемых в левой части уравнения переноса импульса (258) можно сократить

$$\begin{aligned} m \left( \langle v_i \rangle \frac{\partial n}{\partial t} + n \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial t} \right) + m \left[ \langle v_i \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} (n \langle v_j \rangle) + n \langle v_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} \langle v_i \rangle \right] \\ = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho E_i + \frac{[\vec{j}, \vec{B}]_i}{c}, \end{aligned} \quad (258)$$

так что

$$\rho_m \left( \frac{\partial}{\partial t} + \langle v_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \langle v_i \rangle = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho E_i + \frac{[\vec{j}, \vec{B}]_i}{c}, \quad (259)$$

где  $\rho_m = mn$  – массовая плотность вещества (в отличие от плотности заряда  $\rho$ ).

Иначе

$$\rho_m \frac{d}{dt} \langle v_i \rangle = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho E_i + \frac{[\vec{j}, \vec{B}]_i}{c}, \quad (260)$$

где введена субстанциональная производная (в обычном пространстве)

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \langle \vec{v} \rangle \nabla. \quad (261)$$

Уравнение (260) есть (гидродинамическое) уравнение Эйлера с учетом действующих на каждый элемент объема электромагнитных сил.

#### 6.4.4 Перенос энергии

В уравнении переноса энергии (239) величина  $nm \langle v^2 \rangle$  есть след тензора плотности потока импульса

$$\text{tr } P = \sum_i P_{ii} = \sum_i nm \langle v_i^2 \rangle = nm \langle v^2 \rangle. \quad (262)$$

Заменяя поток импульса суммой (230), считая тензор давления диагональным и замечая, что след единичного тензора размером  $3 \times 3$  равен трем, получим

$$nm \langle v^2 \rangle = \sum_i (nm \langle v_i \rangle^2 + p \delta_{ii}) = nm \langle v \rangle^2 + 3nT, \quad (263)$$

где использовано уравнение состояния идеального газа (255).

В векторе плотности потока энергии (240) и (241) слагаемое  $\frac{1}{2} nm \langle v \rangle^2 v_i$  описывает перенос кинетической энергии макроскопического движения, слагаемые (суммы по  $j$ )

$$\frac{1}{2} nm \langle v_i \rangle \langle (\delta v_j)^2 \rangle = \frac{p_{jj}}{2} \langle v_i \rangle = \frac{3}{2} nT \langle v_i \rangle, \quad (264)$$

$$nm \langle v_j \rangle \langle \delta v_j \delta v_i \rangle = p_{ji} \langle v_j \rangle = nT \delta_{ji} \langle v_j \rangle = nT \langle v_i \rangle \quad (265)$$

описывают перенос внутренней энергии за счет средней скорости среды (конвективный перенос). Последний член

$$q_i = \frac{1}{2} nm \langle (\delta v_j)^2 \delta v_i \rangle - \quad (266)$$

энергия, переносимая за счет теплопроводности. В итоге получим

$$Q_i = \frac{1}{2} nm \langle v \rangle^2 \langle v_i \rangle + \frac{5}{2} nT \langle v_i \rangle + q_i. \quad (267)$$

Подставляя (263) и (267) в уравнение переноса энергии (239), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} nm \langle v \rangle^2 + \frac{3}{2} nT \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} nm \langle v \rangle^2 \langle v_i \rangle + \frac{5}{2} nT \langle v_i \rangle \right) = (\vec{j}, \vec{E}) - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}, \quad (268)$$

где  $3/2 nT$  – внутренняя энергия;

$5/2 nT$  – энтальпия.



## 6.5 Интеграл столкновений в форме Ландау

Кулоновское взаимодействие между заряженными частицами медленно убывает с расстоянием, а это означает, что при рассмотрении взаимодействия частиц в плазме необходимо учитывать в основном далекие «столкновения». Хорошим обстоятельством является то, что изменение импульса при таких столкновениях мало. Раз изменение импульса мало, процесс можно рассматривать как диффузию в пространстве скоростей (импульсов):

$$\text{St } f = -\frac{\partial s_i}{\partial p_i}, \quad (269)$$

где  $\vec{s}$  – плотность потока частиц в импульсном пространстве.

Рассмотрим столкновение двух частиц.

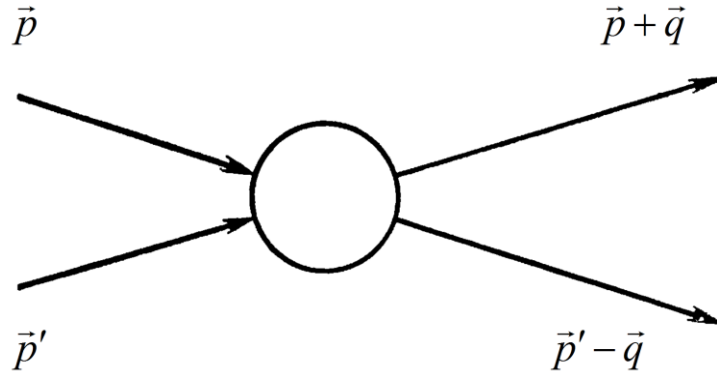


Рисунок 25 – Диаграмма рассеяния частиц [14]

Число столкновений в единицу времени для частицы с импульсом  $\vec{p}$ :

$$w f(\vec{p}) f'(\vec{p}') d^3 q d^3 p', \quad (270)$$

где

$$w = w\left(\vec{p} + \frac{\vec{q}}{2}, \vec{p}' - \frac{\vec{q}}{2}, \vec{q}\right) - \quad (271)$$

вероятность столкновения соответствующих частиц с таким изменением импульса. В силу принципа детального равновесия  $w$  симметрична по отношению к перестановке начальных и конечных частиц:

$$w\left(\vec{p} + \frac{\vec{q}}{2}, \vec{p}' - \frac{\vec{q}}{2}, \vec{q}\right) = w\left(\vec{p} + \frac{\vec{q}}{2}, \vec{p}' - \frac{\vec{q}}{2}, -\vec{q}\right), \quad (272)$$

то есть является четной функцией последнего аргумента.

Поток в импульсном пространстве

$$s_i = s_+ - s_-, \quad (273)$$

где  $s_+$  – поток в положительном направлении оси импульсов  $p$ , то есть поток в результате столкновений с увеличением импульса первой частицы

$$s_+ = \int_{q_i > 0} d^3 q \int d^3 p' \int_{p_i - q_i}^{p_i} dp_i w(\vec{p}, \vec{p}', \vec{q}) f(\vec{p}) f'(\vec{p}') - \quad (274)$$

(интеграл по подходящим начальным состояниям первой частицы ( $p_i$ ) и всем состояниям второй ( $\vec{p}'$ ))

$s_-$  – поток в отрицательном направлении

$$s_- = \int_{q_i > 0} d^3 q \int d^3 p' \int_{p_i - q_i}^{p_i} dp_i w(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}' - \vec{q}, -\vec{q}) f(\vec{p} + \vec{q}) f'(\vec{p}' - \vec{q}) - \quad (275)$$

(интеграл по возможным конечным состояниям первой частицы ( $p_i$ ) и всем состояниям второй ( $\vec{p}'$ ))

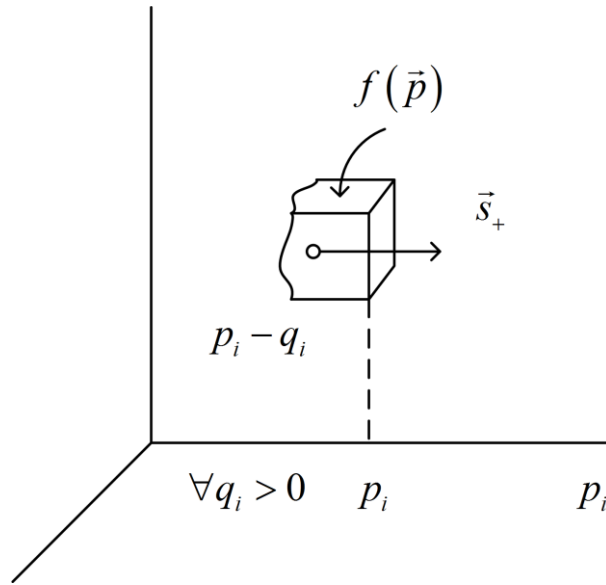


Рисунок 26 – Область интегрирования в пространстве импульсов

Поскольку вероятности в (274) и (275) равны, во внутреннем интеграле в полном потоке  $s_i$  будет стоять разность

$$\begin{aligned} & f(\vec{p})f'(\vec{p}') - f(\vec{p} + \vec{q})f'(\vec{p}' - \vec{q}) \\ & \approx f(\vec{p})f'(\vec{p}') - \left[ f(\vec{p}) + \frac{\partial f(\vec{p})}{\partial p_j} q_j \right] \left[ f'(\vec{p}') + \frac{\partial f'(\vec{p}')}{\partial p'_j} q_j \right] \\ & = \left[ f(\vec{p}) \frac{\partial f'(\vec{p}')}{\partial p'_j} - f'(\vec{p}') \frac{\partial f(\vec{p})}{\partial p_j} \right] q_j + \frac{\partial f(\vec{p})}{\partial p_j} \frac{\partial f'(\vec{p}')}{\partial p'_j} q_j^2. \end{aligned} \quad (276)$$

Последнее слагаемое второго порядка малости по  $q$ , пренебрежем им. Заменяя интегрирование по малому приращению импульса  $dp_i$  в (274) и (275) умножением на  $q_i$ , получим

$$s_i = \int_{q_i > 0} d^3 q \int d^3 p' w(\vec{p}, \vec{p}', \vec{q}) \left[ f(\vec{p}) \frac{\partial f'(\vec{p}')}{\partial p'_j} - f'(\vec{p}') \frac{\partial f(\vec{p})}{\partial p_j} \right] q_i q_j. \quad (277)$$

Введем вместо вероятности столкновений  $w$  (дифференциальное) сечение  $\sigma$ :

$$w d^3 q = |\vec{v} - \vec{v}'| d\sigma. \quad (278)$$

Учитывая, что  $w$  – четная функция третьего аргумента и распространяя интегрирование в (277) на полупространство  $q_i < 0$ , запишем

$$s_i = \int d^3 p' \left[ f(\vec{p}) \frac{\partial f'(\vec{p}')}{\partial p'_j} - f'(\vec{p}') \frac{\partial f(\vec{p})}{\partial p_j} \right] B_{ij}, \quad (279)$$

где

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \int q_i q_j |\vec{v} - \vec{v}'| d\sigma. \quad (280)$$

Не конкретизируя явный вид  $B_{ij}$ , то есть сечение, вынесем выражения, зависящие только от импульса первой частицы  $\vec{p}$ , из-под знака интеграла в (279) и запишем интеграл столкновений (269)

$$\begin{aligned} \text{St } f &= -\frac{\partial s_i}{\partial p_i} = -\frac{\partial}{\partial p_i} \left( f \int d\vec{p}' \frac{\partial f'(\vec{p}')}{\partial p'_j} B_{ij} \right) + \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \frac{\partial f}{\partial p_j} \int d\vec{p}' f' B_{ij} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial p_i} (f A_i) + \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \frac{\partial f}{\partial p_j} D_{ij} \right), \end{aligned} \quad (281)$$

где  $A_i$  – коэффициент трения (в пространстве импульсов);

$D_{ij}$  – коэффициент диффузии.

Это уравнение Фоккера-Планка.

Вернемся к вычислению тензора  $B_{ij}$ . На максвелловских распределениях с одинаковыми температурами интеграл столкновений должен обращаться в ноль:

$$f \propto e^{-p^2/2mT} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial p_j} = f \cdot \left( -\frac{p_j}{mT} \right), \quad (282)$$

$$\left[ f \frac{\partial f'}{\partial p'_j} - f' \frac{\partial f}{\partial p_j} \right] B_{ij} = f f' \cdot \left( -\frac{v'_j}{T} + \frac{v_j}{T} \right) B_{ij}, \quad (283)$$

то есть (подразумеваемая сумма по индексу  $j$ )

$$B_{ij}(v_j - v'_j) = 0. \quad (284)$$

Это означает, что тензор  $B_{ij}$  должен иметь вид

$$B_{ij} = \frac{B}{2} \left[ \delta_{ij} - \frac{(v_i - v'_i)(v_j - v'_j)}{(\vec{v} - \vec{v}')^2} \right], \quad (285)$$

так как в этом случае

$$B_{ij}(v_j - v'_j) = \frac{B}{2} \left[ (v_i - v'_i) - \frac{(v_i - v'_i)(v_j - v'_j)^2}{(\vec{v} - \vec{v}')^2} \right] = \frac{B}{2} (v_i - v'_i)[1 - 1] = 0. \quad (286)$$

Для нахождения нормировочного множителя  $B$  свернем тензор  $B_{ij}$ . Из (285) следует, что

$$\text{tr } B_{ij} \equiv B_{ii} = \frac{B}{2} (3 - 1) = B. \quad (287)$$

Но по определению (280)

$$B_{ii} = \frac{1}{2} \int q^2 |\vec{v} - \vec{v}'| d\sigma. \quad (288)$$

Слабые столкновения двух частиц практически не изменяют абсолютную величину «приведенного» импульса в системе центра масс (при переходе от задачи двух тел к задаче о движении тела с приведенной массой  $\mu$  относительно силового центра), а лишь вызывают его отклонение на малый угол  $\chi$ .

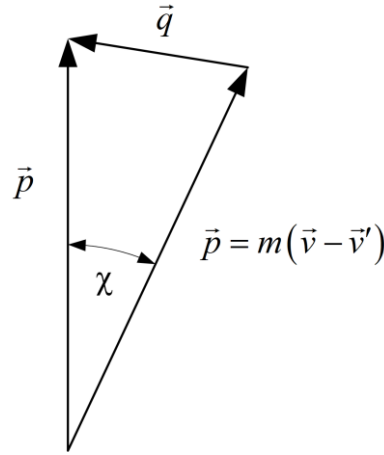


Рисунок 27 – Изменение импульса при слабом столкновении

По теореме косинусов

$$2p^2(1 - \cos \chi) = q^2. \quad (289)$$

Подставляя это выражение в (288) и вынося неизменную абсолютную величину импульса из-под интеграла, для скаляра  $B$  будем иметь

$$B = \frac{1}{2} \int 2p^2(1 - \cos \chi) |\vec{v} - \vec{v}'| d\sigma = \mu^2 |\vec{v} - \vec{v}'|^3 \sigma_T, \quad (290)$$

где введено транспортное сечение  $\sigma_T$ :

$$\sigma_T = \int (1 - \cos \chi) d\sigma. \quad (291)$$

Дифференциальное сечение кулоновского рассеяния на неподвижном центре определяется формулой Резерфорда:

$$d\sigma = \left( \frac{\alpha}{2mv_\infty^2} \right)^2 \frac{d\sigma}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} \quad (292)$$

где  $d\theta$  – телесный угол рассеяния;

$\alpha$  – константа взаимодействия

$$U = \frac{\alpha}{r}. \quad (293)$$

Связь между телесным углом рассеяния  $\theta$  и плоским углом  $\chi$  получается из рассмотрения площади сферической поверхности  $S$  шарового сегмента

$$dS = 2\pi r(z) \cdot R d\theta = 2\pi R^2 \cos \theta d\theta, \quad (294)$$

$$d\theta = \frac{dS}{R^2} = 2\pi \cos \theta d\theta = 2\pi \sin \chi d\chi. \quad (295)$$

где  $R$  – радиус шара.

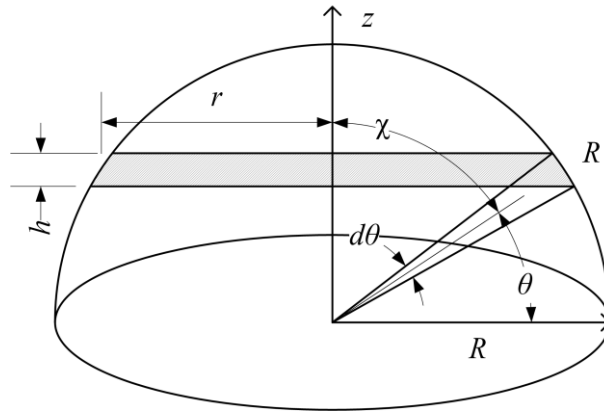


Рисунок 28 – Угол рассеяния

Используя (295), в приближении малых углов сечение Резерфорда (292) для нашего случая можно записать как

$$d\sigma = \frac{(ee')^2}{4\mu^2|\vec{v} - \vec{v}'|^4} \frac{d\theta}{\chi^4/16} = \frac{4(ee')^2 d\theta}{\mu^2|\vec{v} - \vec{v}'|^4 \chi^4} = \frac{8\pi(ee')^2 d\chi}{\mu^2|\vec{v} - \vec{v}'|^4 \chi^3}, \quad (296)$$

где  $e, e'$  – заряды сталкивающихся частиц.

В этом же приближении транспортное сечение (291)

$$\sigma_T \approx \int \frac{\chi^2}{2} d\sigma = \frac{4\pi(ee')^2}{\mu^2|\vec{v} - \vec{v}'|^4} \int \frac{d\chi}{\chi}. \quad (297)$$

Величина  $L$ , равная  $\int d\chi/\chi$ , называется кулоновским логарифмом (для столкновений данных типов частиц). Интеграл в выражении для кулоновского логарифма расходится, но интервал интегрирования можно обрезать: на верхнем пределе величиной  $\chi_{max} \sim 1$ , ибо дальше приближение малых углов теряет смысл; на нижнем пределе  $\chi_{min}$  определится из рассеяния на прицельном расстоянии порядка дебаевского радиуса, так как дальше поле экранировано.

С транспортным сечением, определяемым формулой (297), тензор  $B_{ij}$  (285) с константой  $B$  из (290) будет равен

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi(ee')^2}{|\vec{v} - \vec{v}'|} L \left[ \delta_{ij} - \frac{(v_i - v'_i)(v_j - v'_j)}{(\vec{v} - \vec{v}')^2} \right], \quad (298)$$

а поток частиц (279)

$$s_i = 2\pi L(ee')^2 \int d^3p' \left[ f \frac{\partial f'}{\partial p'_j} - f' \frac{\partial f}{\partial p_j} \right] \frac{|\vec{v} - \vec{v}'|^2 \delta_{ij} - (v_i - v'_i)(v_j - v'_j)}{(\vec{v} - \vec{v}')^3}. \quad (299)$$

Кинетическое уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + e \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = - \frac{\partial \vec{s}}{\partial \vec{p}} \quad (300)$$

называется (кинетическим) уравнением Ландау, а интеграл столкновений (269), (299) – интегралом столкновений в форме Ландау.

## 7 Транспорт

### 7.1 Двухкомпонентная гидродинамика

#### 7.1.1 Двухтемпературное приближение

Рассмотрим столкновения двух типов частиц с изотропными (максвелловскими) функциями распределения и найдем скорость передачи энергии от одних частиц другим. Воспользуемся интегралом столкновений в форме Ландау:

$$\text{St } f = -\text{div}_p \vec{s} \equiv -\frac{\partial s_i}{\partial p_i}, \quad (301)$$

где

$$s_i = \sum \int \left( f \frac{\partial f'}{\partial p'_j} - f' \frac{\partial f}{\partial p_j} \right) B_{ij} d\vec{p}', \quad (302)$$

а суммирование ведется по всем типам частиц, обозначенным штрихом. Как было отмечено в лекции, посвященной интегралу столкновений, тензор  $B_{ij}$  ортогонален разности скоростей  $v_j - v'_j$ , поэтому для двух максвелловских распределений с одной температурой интеграл столкновений равен нулю. Это означает, что в сумме (302) необходимо учитывать столкновения только пар частиц разных типов с разными температурами. Скорость передачи энергии частицам первого типа

$$Q_{coll} = \int \varepsilon \text{St } f d\vec{p} = - \int \varepsilon \text{div}_p \vec{s} d\vec{p} = - \int \text{div}_p (\varepsilon \vec{s}) d\vec{p} + \int \vec{s} \text{grad}_p \varepsilon d\vec{p}, \quad (303)$$

где  $\varepsilon = mv^2/2 = p^2/2m$  – кинетическая энергия частицы первого типа.

Первый интеграл в правой части по теореме Остроградского-Гаусса равен потоку вектора  $\varepsilon \vec{s}$  через бесконечно удаленную границу в пространстве импульсов, то есть обращается в ноль. Во втором интеграле

$$\text{grad}_p \varepsilon \equiv \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_j} = \frac{1}{2m} \frac{\partial (p_k p_k)}{\partial p_j} = \frac{1}{2m} 2p_k \delta_{jk} = \frac{p_j}{m} = v_j. \quad (304)$$

В итоге

$$Q_{coll} = \int (\vec{s}, \vec{v}) d\vec{p}. \quad (305)$$

Как обсуждалось ранее, в лекции, посвященной интегралу столкновений, производная максвелловской функции распределения по импульсу (ср. с (304))

$$\frac{\partial f}{\partial p_j} = f \cdot \frac{\partial}{\partial p_j} \left( -\frac{p^2}{2mT} \right) = f \cdot \left( -\frac{1}{T} \right) v_j. \quad (306)$$

Тогда

$$s_i = \int \left[ f f' \left( -\frac{v'_j}{T'} \right) - f' f \left( -\frac{v_j}{T} \right) \right] B_{ij} d\vec{p}' = \int f f' \left( \frac{v_j}{T} - \frac{v'_j}{T'} \right) B_{ij} d\vec{p}'. \quad (307)$$

Поскольку

$$B_{ij}(v_j - v'_j) = 0, \quad (308)$$

или

$$B_{ij}v_j = B_{ij}v'_j, \quad (309)$$

выражение (307) для потока превратится в

$$s_i = \int f f' \left( \frac{v_j}{T} - \frac{v'_j}{T'} \right) B_{ij} d\vec{p}' = \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T'} \right) \int f f' v_j B_{ij} d\vec{p}', \quad (310)$$

а для изменения энергии (305) будем иметь

$$Q_{coll} = \int s_i v_i d\vec{p} = \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T'} \right) \int f f' v_i v_j B_{ij} d\vec{p} d\vec{p}'. \quad (311)$$

Тензор  $B_{ij}$  зависит от разности скоростей  $\vec{v} - \vec{v}'$ . Для простоты аналитических оценок будем считать, что тепловая скорость частиц второго типа много больше скорости частиц первого, так что

$$\vec{v}' - \vec{v} \approx \vec{v}', \quad (312)$$

и  $B_{ij}$  можно вынести из-под знака интегрирования по импульсам первых частиц

$$Q_{coll} = \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T'} \right) \int d\vec{p}' f' B_{ij} \int d\vec{p} f v_i v_j, \quad (313)$$

и двукратный интеграл разделится на произведение двух однократных. Если вязкости нет, и газ как целое покоится, то второй интеграл

$$\int d\vec{p} f v_i v_j = n \langle v_i v_j \rangle = n \delta_{ij} \frac{T}{m}. \quad (314)$$

Для передачи энергии

$$Q_{coll} = \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T'} \right) \int d\vec{p}' f' B_{ij} \delta_{ij} n \frac{T}{m} = \frac{nT}{m} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T'} \right) \int d\vec{p}' f' B_{ii}. \quad (315)$$

При выполнении (312)

$$B_{ii} = B = \frac{4\pi(ee')^2}{|\vec{v}'|} L, \quad (316)$$

поэтому интеграл в (315) будет равен

$$\int d\vec{p}' f' B = 4\pi(ee')^2 L \int f' \frac{d\vec{p}'}{v'} = 4\pi(ee')^2 L n' \left\langle \frac{1}{v'} \right\rangle, \quad (317)$$

где

$$\left\langle \frac{1}{v'} \right\rangle = \sqrt{\frac{2m'}{\pi T'}}. \quad (318)$$

Окончательно получим



$$Q_{coll} = \frac{nT}{m} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T'} \right) 4\pi (ee')^2 L n' \sqrt{\frac{2m'}{\pi T'}} = \frac{4nn'(ee')^2 \sqrt{2\pi m'} L}{mT'^{3/2}} (T' - T). \quad (319)$$

Перепишем последнее выражение, заменяя скорость изменения энергии на скорость изменения температуры (то есть запишем скорость нагрева первых частиц)

$$Q_{coll} \equiv \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{3T}{2} n \right). \quad (320)$$

Получим

$$\frac{dT}{dt} = - \frac{T - T'}{\tau^\varepsilon}, \quad (321)$$

где

$$\tau^\varepsilon = \frac{3mT'^{3/2}}{8(ee')^2 \sqrt{2\pi m'} L} \quad (322)$$

называется временем температурной релаксации (временем установления теплового равновесия).

Оценим времена установления теплового равновесия электронной  $\tau_{ee}^\varepsilon$  и ионной компонент плазмы  $\tau_{ii}^\varepsilon$ , а также время электрон-ионной релаксации  $\tau_{ei}^\varepsilon$ . Считая для оценки заряд ионов равным единице, а температуру горячей компоненты и кулоновский логарифм во всех случаях одинаковыми, получим

$$\tau^\varepsilon \propto \frac{m_{cold}}{\sqrt{m_{hot}}}, \quad (323)$$

то есть

$$\tau_{ee}^\varepsilon : \tau_{ii}^\varepsilon : \tau_{ei}^\varepsilon = \sqrt{m_e} : \sqrt{m_i} : (m_i / \sqrt{m_e}) = 1 : \sqrt{m_i / m_e} : (m_i / m_e). \quad (324)$$

Это соотношение означает, что время установления теплового равновесия между электронами и ионами существенно больше времени установления равновесия внутри ионной и, тем более, электронной подсистем. Это позволяет рассматривать плазму как двухкомпонентную жидкость, в которой электронная и ионная составляющие могут иметь разную температуру. В этом случае уравнения (магнитной) гидродинамики для плазмы записывают отдельно для электронной и ионной компонент, добавляя в правую часть уравнения переноса энергии член, учитывающий обмен энергией между электронами и ионами (319).

#### *Одножидкостное приближение*

Если разделения зарядов в плазме не происходит, то можно считать, что электроны и ионы движутся вместе. За счет много большей массы основной вклад в перенос импульса будут давать ионы. Это позволяет оставить в двухтемпературной модели уравнения переноса массы и импульса только для ионов; уравнения переноса энергии необходимы для

обеих компонент, поскольку основной вклад в теплопроводность дают электроны, и энергию лазерного излучения поглощают они же. Такая модель называется одножидкостной двухтемпературной газодинамикой.

## 7.2 Транспортные коэффициенты

### 7.2.1 Интеграл столкновений в форме Крукса

Поглощение энергии электронной компонентой происходит в определенной точке пространства. Дальше энергия передается за счет теплопроводности. Определим, как это происходит.

Частота столкновений частиц типа 1 с частицами типа 2 (на одну частицу первого типа) пропорциональна произведению концентрации вторых частиц на транспортное сечение (297):

$$\nu_{12} = n_2 \sigma_T \nu_{\text{отн}} = \frac{4\pi n_2 (e_1 e_2)^2 L}{\mu^2 \nu_{\text{отн}}^3}. \quad (325)$$

Для столкновений электронов с электронами и ионами одинаковы относительная скорость (тепловая скорость электронов) и приведенная масса (масса электрона)

$$\nu_{ee} \propto n_e e^4 = Z n_i e^4, \quad (326)$$

$$\nu_{ei} \propto n_i (eZe)^2 = Z^2 n_i e^4. \quad (327)$$

Если  $Z \gg 1$ , электрон-ионные столкновения будут преобладать над электрон-электронными. Плазма, в которой можно пренебречь электрон-электронными столкновениями по сравнению с электрон-ионными называется лоренцевой.

Запишем интеграл столкновений в виде

$$\text{St } f = \frac{f_0 - f}{\tau}, \quad (328)$$

где  $f_0$  – равновесная (точнее, просто стационарная) функция распределения;

$\tau$  – время релаксации функции распределения.

Такая запись называется интегралом столкновений в форме (Батнагара-Гросса-) Крукса. Он не может быть получен из общего интеграла Больцмана путем каких-либо приближений, и поэтому называется модельным. Его можно сконструировать из общих соображений, соответствующих здравому смыслу (читай, H-теореме Больцама: при любых возмущениях функции распределения под действием столкновений частиц стремятся к термодинамически равновесному распределению) [14].

Для лоренцевой плазмы

$$\text{St } f = \frac{f_0 - f}{\tau_{ei}} = -\nu_{ei} \delta f, \quad (329)$$

где  $\tau_{ei} = 1/\nu_{ei}$  – время между столкновениями электронов с ионами;

$\delta f$  – отличие функции распределения от равновесной.

Будем считать ионы неподвижными (для одножидкостной модели это означает, что и электроны в среднем покоятся), а функцию распределения электронов  $f$  слабо отличающейся от максвелловской функции  $f_0$

$$\delta f \ll f_0. \quad (330)$$

Частота столкновений в (329) зависит от скорости электронов (ионы покоятся):

$$v_{ei}(v) = n_i v \sigma_T = n_i v \frac{4\pi(eeZ)^2 L}{m_e^2 v^4} = \frac{4\pi n_e z e^4 L}{m_e^2 v^3} \quad (331)$$

(поскольку масса электрона много меньше массы иона, приведенная масса равна массе электрона).

Напишем кинетическое уравнение с интегралом столкновений в форме Крука

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \nabla_r) + (\vec{w} \nabla_v) \right] (f_0 + \delta f) = -\frac{\delta f}{\tau_{ei}}. \quad (332)$$

В левой части оставим только производные от  $f_0 \gg \delta f$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \nabla_r) + (\vec{w} \nabla_v) \right] f_0 = -\frac{\delta f}{\tau_{ei}}. \quad (333)$$

Поскольку в интеграле столкновений в форме Крука стоит просто релаксация функции распределения к  $f_0$ , сама  $f_0$  полагается константой, и частная производная от нее по времени тождественно равна нулю. Считая скорости электронов не слишком большими, пренебрежем магнитной составляющей силы Лоренца

$$\vec{v} \frac{\partial f_0}{\partial \vec{r}} - e \vec{E} \frac{\partial f_0}{\partial \vec{p}} = -v_{ei}(\vec{v}) \delta f. \quad (334)$$

Подставим в получившееся уравнение распределение Максвелла(-Больцмана)

$$f_0 = \exp \frac{\mu - \varepsilon}{T}. \quad (335)$$

где  $\varepsilon = p^2/2m$  – кинетическая энергия электрона;

$\mu$  – химический потенциал. Он находится из условия нормировки функции распределения и может зависеть от координат в (обычном) пространстве.

Для производных функции распределения получим

$$\nabla_r f_0 = f_0 \nabla_r \left[ \frac{1}{T} (\mu - \varepsilon) \right] = f_0 \left[ -\frac{1}{T^2} \nabla_r T \cdot (\mu - \varepsilon) + \frac{1}{T} \nabla_r \mu \right] \quad (336)$$

(энергия есть функция от импульсов, поэтому в обычном пространстве ее градиент равен нулю),

$$\nabla_p f_0 = f_0 \nabla_p \left( -\frac{\varepsilon}{T} \right) = f_0 \left( -\frac{1}{T} \right) \vec{v}. \quad (337)$$

Подставляем полученные выражения в кинетическое уравнение (334)

$$\frac{\vec{v}f_0}{T} \left[ \nabla_r \mu - \frac{\nabla_r T}{T} (\mu - \varepsilon) + e\vec{E} \right] = -v_{ei}(\vec{v})\delta f. \quad (338)$$

Вводя для электронов энергию  $U$  как сумму химического потенциала и потенциальной энергии в электрическом поле

$$U = \mu - e\varphi, \quad (339)$$

для градиента получим

$$\nabla_r U = \nabla_r \mu - e\nabla_r \varphi = \nabla_r \mu + e\vec{E}. \quad (340)$$

С использованием последнего выражения (338) запишется как

$$\frac{\vec{v}f_0}{T} \left[ \nabla_r U - \frac{\nabla_r T}{T} (\mu - \varepsilon) \right] = -v_{ei}(\vec{v})\delta f. \quad (341)$$

### 7.2.2 Электрический ток

Поскольку функция распределения  $f_0$  изотропная, ток электронов

$$\vec{j} = -e \int \vec{v}(f_0 + \delta f) d\vec{p} = -e \int \vec{v} \delta f d\vec{p}. \quad (342)$$

Выразим  $\delta f$  из линейризованного кинетического уравнения для добавки к функции распределения (341)

$$\delta f = -\frac{\vec{v}f_0}{Tv_{ei}} \left[ \nabla_r U - \frac{\nabla_r T}{T} (\mu - \varepsilon) \right] \quad (343)$$

и подставим в выражение для тока (342). В (343) остались производные только по обычным координатам, поэтому в дальнейшем индекс  $r$  у оператора набла писать не будем. В компонентах

$$j_\beta = \int \frac{ef_0}{Tv_{ei}} v_\beta v_\alpha [\dots]_\alpha d\vec{p} = n_e \frac{e}{T} \left\langle \frac{v_\beta v_\alpha [\dots]_\alpha}{v_{ei}} \right\rangle, \quad (344)$$

где через  $[\dots]_\alpha$  обозначена  $\alpha$  компонента выражения в квадратных скобках из (343). В выражении, стоящем в квадратных скобках ни химический потенциал, ни температура, ни электрическое поле от скорости не зависят; кинетическая энергия зависит от абсолютной величины последней. Поскольку частота столкновений (331) также не зависит от направления скорости

$$v_{ei} = \frac{a}{v^3}, \quad (345)$$

где

$$a = \frac{4\pi n_e Z e^4 L}{m_e^2}, \quad (346)$$

то, если в тензоре плотности потока импульса не равны нулю только диагональные компоненты, то есть, отсутствует движение плазмы как целого и вязкость (ср. с (314))

$$v_\alpha v_\beta = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{3} v^2, \quad (347)$$

в угловых скобках в формуле (344) можно перейти к усреднению по абсолютной величине скорости

$$\langle \frac{v_\beta v_\alpha [\dots]_\alpha}{v_{ei}} \rangle = \frac{1}{3a} \langle v^5 \delta_{\alpha\beta} [\dots]_\alpha \rangle = \frac{1}{3a} \langle v^5 [\dots]_\beta \rangle. \quad (348)$$

Тогда выражение для тока (344) превращается в

$$\vec{j} = \frac{n_e e}{3Ta} \left[ \nabla U \langle v^5 \rangle - \frac{\nabla T}{T} \left( \langle v^5 \rangle \mu - \frac{m \langle v^7 \rangle}{2} \right) \right]. \quad (349)$$

Воспользовавшись выражениями для средних степеней скорости (245), получим

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \frac{n_e e}{3Ta} \left\{ \nabla U \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2T}{m} \right)^{5/2} 3! - \frac{\nabla T}{T} \left[ \mu \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2T}{m} \right)^{5/2} 3! - \frac{m}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2T}{m} \right)^{7/2} 4! \right] \right\} \\ &= \frac{n_e e}{3Ta} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2T}{m} \right)^{5/2} 3! \left[ \nabla U - \frac{\nabla T}{T} \left( \mu - \frac{m}{2} \frac{2T}{m} 4 \right) \right]. \end{aligned} \quad (350)$$

Подставив выражение (346) для коэффициента пропорциональности  $a$ , будем иметь

$$\vec{j} = \frac{n_e e}{3T} \left( \frac{m^2}{4\pi n_e Z e^4 L} \right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2T}{m} \right)^{5/2} 3! \left[ \nabla U - \frac{\nabla T}{T} (\mu - 4T) \right], \quad (351)$$

или

$$\vec{j} = \sigma \left[ \frac{\nabla U}{e} - \alpha \nabla T \right], \quad (352)$$

где  $\sigma$  – проводимость

$$\sigma = \frac{n_e e^2}{3T} \frac{m^2}{4\pi n_e Z e^4 L} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2T}{m} \right)^{5/2} 3! = \frac{2^{5/2} T^{3/2}}{Z e^2 \pi^{3/2} m^{1/2} L}; \quad (353)$$

$\alpha$  – термоэлектрический коэффициент

$$\alpha = \left( \frac{\mu}{T} - 4 \right) \frac{1}{e} \quad (354)$$

(множитель  $1/e$  появляется, потому что  $\sigma$  – выражение перед скобкой в (351), умноженное на  $e$ ).

### 7.2.3 Теплопроводность

Вектор плотности потока энергии

$$\vec{Q} = \int \vec{v} \varepsilon (f_0 + \delta f) d\vec{p} = \int \vec{v} \varepsilon \delta f d\vec{p}. \quad (355)$$

Функция  $f_0$  изотропна и не дает вклада в поток. Скорость  $\vec{v}$  – скорость частиц относительно общего потока плазмы, то есть та скорость, что при выводе уравнений переноса обозначалась как  $\delta \vec{v}$ . Поскольку движения плазмы как целого в данном случае нет, это полная скорость. По аналогии с выводом выражения для тока подставляем в (355)  $\delta f$  из (341) и, используя для произведения скоростей выражение (347), получаем

$$\begin{aligned}
Q_\beta &= - \int v_\beta \varepsilon \frac{f_0 v_\alpha}{T v_{ei}} \left[ \nabla U - \frac{\nabla T}{T} (\mu - \varepsilon) \right]_\alpha d\vec{p} \\
&= - \frac{n_e}{T^2} \left\langle \frac{\delta_{\alpha\beta} v^2}{3} \cdot \frac{v^3}{a} \cdot \frac{m v^2}{2} [T \nabla U - \nabla T (\mu - \varepsilon)]_\alpha \right\rangle \\
&= - \frac{n_e m}{6 a T^2} \langle v^7 [T \nabla U - \nabla T (\mu - \varepsilon)]_\beta \rangle \\
&= - \frac{n_e m}{6 a T^2} \left[ (T \nabla U - \mu \nabla T) \langle v^7 \rangle + \frac{m \nabla T}{2} \langle v^9 \rangle \right]_\beta.
\end{aligned} \tag{356}$$

Снова применяя формулы для средних степеней скорости, напомним

$$\begin{aligned}
\vec{Q} &= - \frac{n_e m}{6 a T^2} \left[ (T \nabla U - \mu \nabla T) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2T}{m} \right)^{7/2} 4! + \frac{m \nabla T}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2T}{m} \right)^{9/2} 5! \right] \\
&= - \frac{n_e m}{6 a T^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2T}{m} \right)^{7/2} 4! (T \nabla U - \mu \nabla T + 5 T \nabla T).
\end{aligned} \tag{357}$$

Подставляя коэффициент пропорциональности  $a$  (346), получим

$$\begin{aligned}
\vec{Q} &= - \frac{n_e m}{6 T^2} \cdot \frac{m^2}{4 \pi n_e Z e^4 L} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2T}{m} \right)^{7/2} 4! (T \nabla U - \mu \nabla T + 5 T \nabla T) \\
&= - \frac{2^{9/2} T^{3/2}}{\pi^{3/2} \sqrt{m} Z e^4 L} (T \nabla U - \mu \nabla T + 5 T \nabla T).
\end{aligned} \tag{358}$$

Все электроны не могут двигаться в одну сторону (противоположно градиенту температуры), потому что в этом случае возникало бы разделение зарядов. Поток горячих электронов вниз по градиенту температуры в точности компенсируется потоком холодных электронов вверх. Это означает, что ток  $j$  (352) равен нулю:

$$\nabla U = e \alpha \nabla T. \tag{359}$$

После подстановки в это выражение термоэлектрического коэффициента  $\alpha$  (354) будем иметь

$$\nabla U = \left( \frac{\mu}{T} - 4 \right) \nabla T, \tag{360}$$

а для потока энергии (358) –

$$\vec{Q} = - \left( \frac{8T}{\pi} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{m} Z e^4 L} [(\mu - 4T) \nabla T - \mu \nabla T + 5 T \nabla T] = - \left( \frac{8T}{\pi} \right)^{3/2} \frac{T \nabla T}{\sqrt{m} Z e^4 L}, \tag{361}$$

то есть поток энергии пропорционален градиенту температуры (закон Фурье)

$$\vec{Q} = -\kappa \nabla T, \tag{362}$$

где  $\kappa$  – коэффициент теплопроводности

$$\kappa = \frac{16 \sqrt{2} T^{5/2}}{\pi^{3/2} Z e^4 L \sqrt{m}}. \tag{363}$$

Эта формула для коэффициента теплопроводности была получена Спитцером, и такую теплопроводность называют спитцеровской.

Когда градиент температуры становится большим, линейная теория перестает работать. Поток энергии в принципе не может превосходить кинетического потока, то есть потока, возникающего тогда, когда все электроны движутся в одну сторону

$$Q_{kin} \sim T n_e v. \quad (364)$$

Спитцеровская формула верна, когда

$$L/\lambda \gg 1, \quad (365)$$

где  $L$  – характерный пространственный масштаб изменения температуры ( $\sim T/\nabla T$ );

$\lambda$  – длина свободного пробега электронов ( $\sim v\tau$ ).

В области больших градиентов реальный поток может быть меньше спитцеровского в десятки раз.

## 8 Волны в плазме

### 8.1 Электростатические волны

#### 8.1.1 Линеаризованные уравнения переноса

В плазме без наложенного магнитного поля могут существовать два (четко разделенных) типа волн (колебаний плотности электрического заряда): электростатическая электронная волна и электростатическая ионная волна. В первом случае фазовая скорость процесса  $\omega/k$  много больше тепловой скорости электронов  $v_e$

$$\omega/k \gg v_e, \quad (366)$$

во втором, наоборот,

$$v_i \ll \omega/k \ll v_e. \quad (367)$$

Задача описания электростатических волн одномерная, поскольку изменение всех величин происходит только в направлении распространения волны. Координату в направлении волнового вектора мы обозначим через  $x$ . Вначале получим уравнение малых колебаний плотности в общем виде, а затем воспользуемся соотношениями (366) и (367), чтобы рассмотреть предельные по частоте случаи.

Одномерные уравнения переноса для частиц каждого типа (256), (257)

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n\langle v \rangle) = 0, \quad (368)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(n\langle v \rangle) + \frac{\partial}{\partial x}(n\langle v \rangle^2) = \frac{nqE}{m} - \frac{1}{m} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (369)$$

Продифференцируем уравнение переноса массы (368) по времени, а уравнение переноса импульса (369) по пространству, и вычтем одно из другого

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(n\langle v \rangle^2) = -\frac{q}{m} \frac{\partial}{\partial x}(n_e E) + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (370)$$

Будем считать, что неоднородности невелики

$$n = n_0 + n_1, n_1 \ll n_0, \quad (371)$$

$$p = p_0 + p_1, p_1 \ll p_0 = n_0 T, \quad (372)$$

$$v = v_1, \quad (373)$$

$$E = E_1, \quad (374)$$

и линеаризуем комбинированное уравнение переноса массы-импульса (370), пренебрегая произведениями малых величин (с индексом 1). Производные невозмущенных величин равны нулю, поэтому уравнение сводится к

$$\frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} = -\frac{qn_0}{m} \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}. \quad (375)$$



### 8.1.2 Уравнения состояния

Если колебания быстрые по сравнению с характерной скоростью установления теплового равновесия в среде частиц данного типа, процесс адиабатический, если медленные – изотермический.

Для того, чтобы связать малые приращения давления и плотности в уравнении колебаний (375), воспользуемся уравнением политропы

$$\frac{p}{n^\alpha} = \text{const.} \quad (376)$$

При показателе  $\alpha$ , равном 1, оно переходит в уравнение изотермы

$$\frac{p}{n} = \text{const.} \quad (377)$$

При показателе  $\alpha$ , равном показателю адиабаты  $\gamma$ , – в уравнение адиабаты

$$\frac{p}{n^\gamma} = \text{const.} \quad (378)$$

С учетом уравнения состояния идеального газа (255), производная давления из (376)

$$\frac{dp}{dn} = \alpha n^{\alpha-1} \cdot \text{const} = \alpha \frac{p}{n} = \alpha T_0, \quad (379)$$

где  $T_0$  – невозмущенная температура.

В обозначениях предыдущего пункта на адиабате

$$p_1 = 3n_1 T_0 = 3n_1 m v_T^2, \quad (380)$$

поскольку показатель адиабаты для одномерного одночастичного больцмановского газа равен 3; на изотерме

$$p_1 = n_1 T_0 = n_1 m v_T^2. \quad (381)$$

где введена (одномерная) тепловая скорость частиц

$$T_0 = m v_T^2. \quad (382)$$

### 8.1.3 Дисперсионное уравнение для электронной волны

Частота колебаний электронной волны велика, поэтому ионы можно рассматривать как неподвижные, уравнения переноса для них исчезнут. Для электронов давление и электрическое поле в (375) как функции возмущений концентрации найдем, соответственно, из уравнения переноса энергии и из уравнения Максвелла для дивергенции электрического поля.

Уравнение переноса энергии для электронов – уравнение адиабаты (380), поэтому

$$\frac{1}{m_e} \frac{\partial^2 p_{e1}}{\partial x^2} = 3 v_T^2 \frac{\partial^2 n_{e1}}{\partial x^2}. \quad (383)$$

Уравнение Максвелла

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi(Zen_i - en_e), \quad (384)$$

где  $Z$  – заряд иона.

В нашем случае

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} = -4\pi en_{e1}, \quad (385)$$

поскольку

$$Zn_i = Zn_{i0} = n_{e0}. \quad (386)$$

Подставим (383) и (385) в линейризованное уравнение переноса (375)

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 3v_{eT}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega_{pe}^2 \right) n_{e1} = 0, \quad (387)$$

где  $\omega_{pe}$  – электронная плазменная частота

$$\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi n_{e0} e^2}{m_e}. \quad (388)$$

Если считать, что возмущение имеет вид плоской волны

$$n_{e1} \propto e^{-i(\omega t - kx)}, \quad (389)$$

из (387) получим дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3v_{eT}^2 k^2. \quad (390)$$

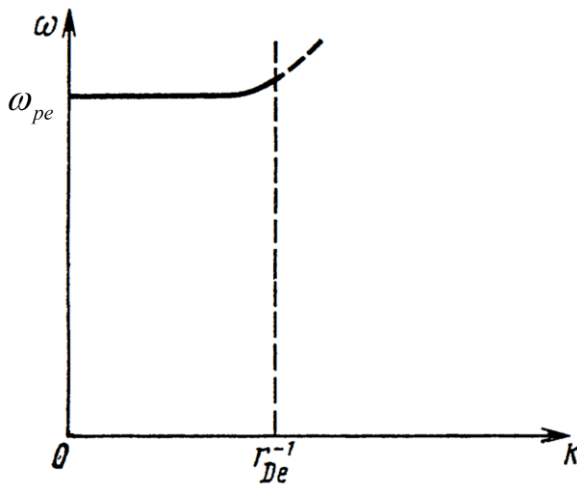


Рисунок 29 – Дисперсионная кривая продольных электронных волн [14]

#### 8.1.4 Дисперсионное уравнение для ионной волны

Для ионов сделаем все то же, что и для электронов, только напряженность электрического поля будем искать не из уравнения Максвелла, а из уравнения колебаний для электронов.

Частота колебаний ионной волны много меньше характерной частоты колебаний электронов – электронной плазменной частоты, – поэтому инерцией электронов можно пренебречь, то есть можно считать, что их масса в уравнении переноса (375) равна нулю

$$n_{e0}eE_1 = -\frac{\partial p_{e1}}{\partial x}, \quad (391)$$

а уравнение состояния – уравнение изотермы (381), так что

$$n_{e0}eE_1 = -T_e \frac{\partial n_{e1}}{\partial x}, \quad (392)$$

Учитывая соотношение между концентрациями (386) и полагая

$$n_{e1} = Zn_{i1}, \quad (393)$$

можно написать

$$E_1 = -\frac{T_e}{n_{e0}e} \frac{\partial n_{e1}}{\partial x} = -\frac{T_e}{n_{i0}e} \frac{\partial n_{i1}}{\partial x}. \quad (394)$$

Подставим полученное выражение для поля и линеаризованное уравнение состояния ионов типа (380) в уравнение колебаний (375)

$$\frac{\partial^2 n_{i1}}{\partial t^2} = \frac{Zen_{i0}}{m_i} \frac{T_e}{n_{i0}e} \frac{\partial^2 n_{i1}}{\partial x^2} + \frac{3T_i}{m_i} \frac{\partial^2 n_{i1}}{\partial x^2}, \quad (395)$$

или

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{ZT_e + 3T_i}{m_i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) n_{i1} = 0. \quad (396)$$

Дисперсионное уравнение для плоских волн

$$\omega^2 = v_s^2 k^2, \quad (397)$$

где  $v_s$  – скорость ионного звука

$$v_s^2 = \frac{ZT_e + 3T_i}{m_i}. \quad (398)$$

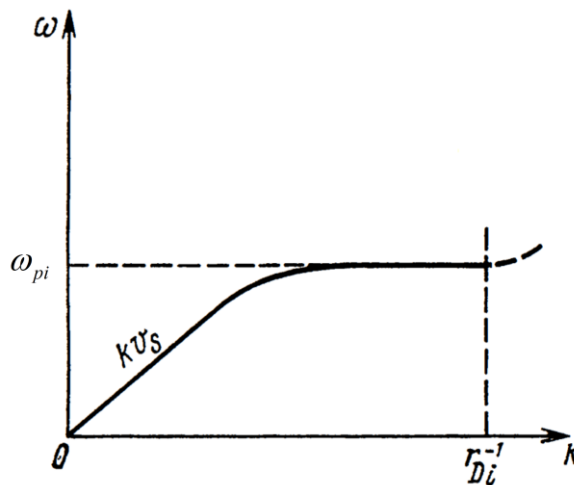


Рисунок 30 – Дисперсионная кривая ионно-звуковых волн [14]

## 8.2 Электромагнитные волны

### 8.2.1 Волновое уравнение

Уравнения Максвелла ( $\mu \approx 1 \Rightarrow \vec{B} = \vec{H}$ ) (202)

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \vec{E} = 4\pi\rho, \\ \text{div } \vec{B} = 0. \end{cases} \quad (399)$$

Нам понадобятся первые два уравнения. Дифференцируем уравнение для  $\text{rot } \vec{B}$  по времени

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (400)$$

Меняем в левой части порядок дифференцирования по пространственным координатам и по времени и подставляем выражение для  $\partial \vec{B} / \partial t$  из уравнения для  $\text{rot } \vec{E}$

$$-c \text{rot rot } \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (401)$$

или

$$\text{rot rot } \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (402)$$

волновое уравнение.

### 8.2.2 Электрическая индукция

Ток  $\vec{j}$  в волновом уравнении (402) – сумма тока внешних источников и тока, индуцированного в среде под действием поля

$$\vec{j} = \vec{j}_{\text{внеш}} + \vec{j}_{\text{индуц}}. \quad (403)$$

Внешние источники будем считать отсутствующими

$$\text{rot rot } \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial \vec{j}_{\text{индуц}}}{\partial t}. \quad (404)$$

Введем электрическую индукцию  $\vec{D}$  по формуле

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi \vec{j}_{\text{индуц}}, \quad (405)$$

так что (404) превратится в

$$\text{rot rot } \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0. \quad (406)$$

В дальнейшем токи и поля будем считать плоскими волнами. В этом случае определение (405) переходит в

$$-i\omega \vec{D} = -i\omega \vec{E} + 4\pi \vec{j}_{\text{индуц}} \quad (407)$$

или

$$\vec{D} = \vec{E} + \frac{4\pi i}{\omega} \vec{j}_{\text{индуц}}, \quad (408)$$

а волновое уравнение (406) записать в виде ( $\text{rot} \rightarrow i\vec{k}$ )

$$[\vec{k}, [\vec{k}, \vec{E}]] + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{D} = 0. \quad (409)$$

8.2.3 Дисперсионное уравнение для электронной волны

Для того, чтобы связать входящий в волновое уравнение индуцированный в среде ток  $j$  (а значит, и электромагнитную индукцию  $D$ ) с напряженностью электрического поля, рассмотрим колебания плазмы, происходящие под действием падающей на нее электромагнитной волны.

После подстановки уравнения переноса массы в уравнение переноса импульса для электронной жидкости, последнее принимает вид (все величины дальше относятся к электронам, нижний индекс  $e$  не пишем)

$$n \frac{\partial \langle \vec{v} \rangle}{\partial t} + \underline{n \langle \vec{v} \rangle \nabla \langle \vec{v} \rangle} = \frac{nq}{m} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \underline{\langle \vec{v} \rangle \times \vec{B}} \right) - \frac{\nabla p}{m}. \quad (410)$$

Колебания происходят с частотой, большей электронной плазменной частоты, поэтому рассматриваем ионы как однородный нейтрализующий фон. Считаем, что концентрация электронов слабо отклоняется от постоянного значения (колебания поперечные, сгущения и разрежения плотности заряда не происходит), так что ее производной в давлении можно пренебречь. Среднюю скорость электронов как целого снова полагаем малой, поэтому пренебрегаем магнитной составляющей силы Лоренца и произведением скорости на ее дивергенцию. Пренебрегая полчеркнутыми слагаемыми в (410), получаем

$$\frac{\partial \langle \vec{v} \rangle}{\partial t} = -\frac{e\vec{E}}{m}. \quad (411)$$

Если колебания гармонические

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \quad (412)$$

то уравнение (411) также можно проинтегрировать

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{e}{im\omega} \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t} = \frac{e}{im\omega} \vec{E}(\vec{r}, t). \quad (413)$$

Плотность тока

$$\vec{j} = -en \langle \vec{v} \rangle = \frac{-ine^2}{m\omega} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{i\omega_{pe}^2}{4\pi\omega} \vec{E}(\vec{r}, t) = \sigma \vec{E}(\vec{r}, t), \quad (414)$$

где  $\sigma$  – высокочастотная проводимость плазмы

$$\sigma = \frac{i\omega_{pe}^2}{4\pi\omega}. \quad (415)$$

$\omega_{pe}$  – электронная плазменная частота (388).

Индукция (408)

$$\vec{D} = \vec{E} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma \vec{E} = \varepsilon \vec{E}, \quad (416)$$

где  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}. \quad (417)$$

В волновом уравнении (409) раскроем двойное векторное произведение и выразим индукцию через напряженность электрического поля (416). Так как волна поперечная, скалярное произведение напряженности поля на волновой вектор равно нулю, поэтому будем иметь

$$-\vec{E}k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \vec{E} = 0 \quad (418)$$

или

$$\varepsilon = n^2, \quad (419)$$

где  $n$  – показатель преломления (в общем случае, комплексный)

$$n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{ck}{\omega}. \quad (420)$$

Подставив в (419) диэлектрическую проницаемость в виде (417), получим дисперсионное уравнение

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} = \frac{c^2 k^2}{\omega^2}, \quad (421)$$

или

$$\omega^2 - \omega_{pe}^2 = c^2 k^2. \quad (422)$$

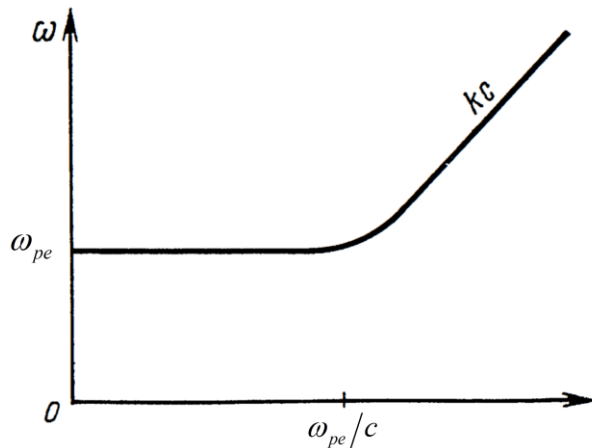


Рисунок 31 – Дисперсионная кривая поперечных электронных волн [14]

### Наклонное падение

Рассмотрим наклонное падение плоской электромагнитной волны на границу раздела двух сред с разными показателями преломления (см. Рисунок 32) и запишем закон Снеллиуса:

$$\sin \theta_1 = \frac{n_2}{n_1} \sin \theta_2, \quad (423)$$

или

$$n \sin \theta = \text{const.} \quad (424)$$

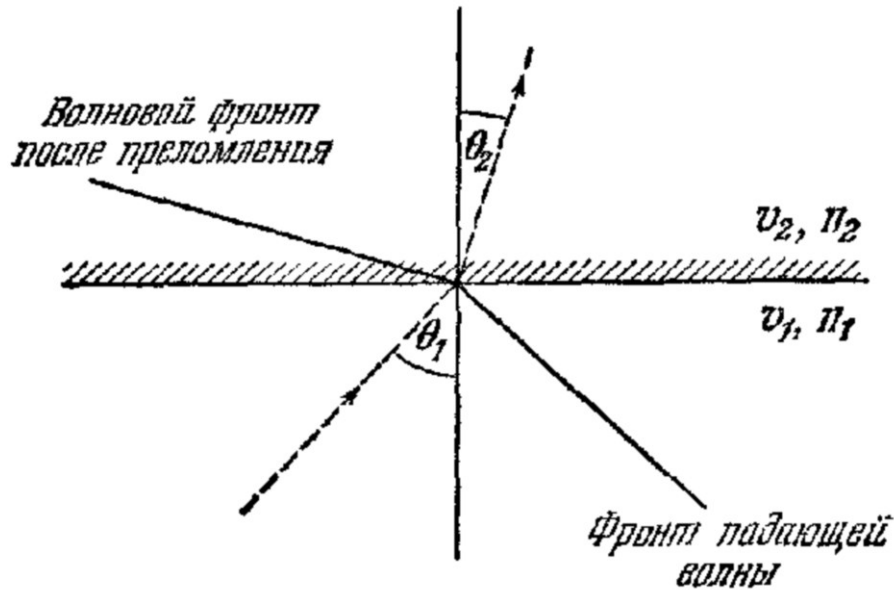


Рисунок 32 – Падение плоской волны на границу раздела двух сред [15]

Воспользовавшись определением показателя преломления (420), запишем дисперсионное уравнение для поперечных волн в виде

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{n_e}{n_c}. \quad (425)$$

где  $n_c$  – критическая плотность

$$\frac{4\pi n_c e^2}{m_e} = \omega^2. \quad (426)$$

Это соотношение означает, что с увеличением плотности плазмы ее показатель преломления уменьшается от 1 до 0.

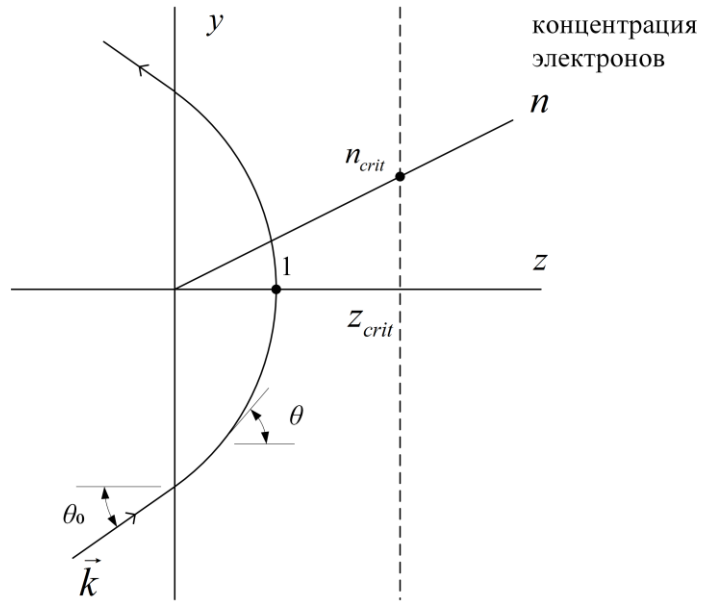


Рисунок 33 – Траектория луча  
в плазме с градиентом плотности

С увеличением координаты  $z$  на рисунке показатель преломления уменьшается, и луч отклоняется все дальше от нормали. В некоторой точке угол  $\theta_1$  станет равным  $\pi/2$ . Закон Снеллиуса (424) для этой точки

$$n_1 \sin \theta_1 = n_0 \sin \theta_0 \Rightarrow n_1 \cdot 1 = 1 \cdot \sin \theta_0 \quad (427)$$

или

$$n_1^2 = \sin^2 \theta_0. \quad (428)$$

С учетом (425) последнее равенство запишется как

$$1 - \frac{n_{e1}}{n_c} = \sin^2 \theta_0, \quad (429)$$

или

$$n_{e1} = n_c \sin^2 \theta_0. \quad (430)$$

Дальше точки с такой концентрацией электронов волна в плазму не проникнет. Эта точка называется точка поворота. Для нормального падения угол падения  $\theta_0$  равен 0, и концентрация электронов в точке поворота  $n_{e1}$  равна критической  $n_c$ .

Если падающая волна имела s-поляризацию, ничего необычного не произойдет: образуется стоячая волна, амплитуда которой будет экспоненциально затухать после точки поворота.



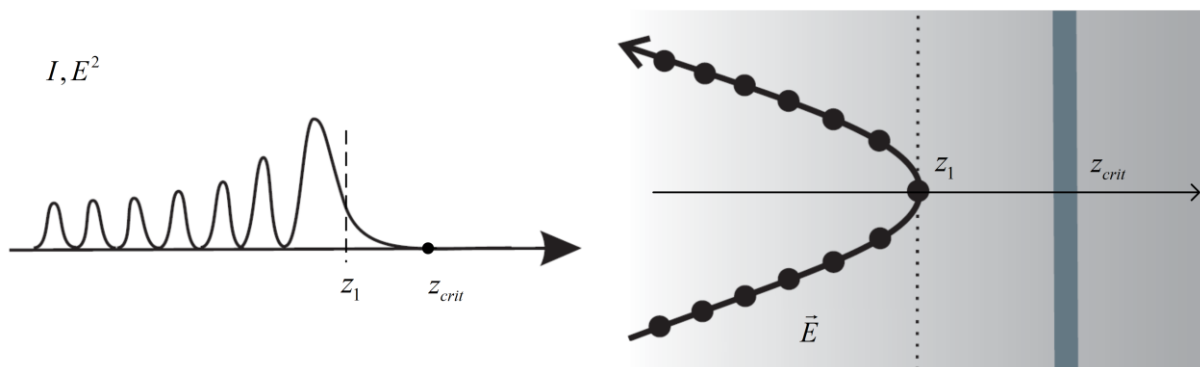


Рисунок 34 – Поле s-поляризованной волны  
вблизи точки поворота [8]

Если волна р-поляризованная, то в точке поворота она будет раскачивать продольные колебания. В критической точке частота продольных (ленгмюровских) колебаний совпадает с частотой волны, поэтому, если волна падает под углом достаточно большим, чтобы z-компонента поля была велика, но достаточно малым для того, чтобы развернуться вблизи критической точки, она будет возбуждать резонансные ленгмюровские колебания вблизи точки с критической плотностью.

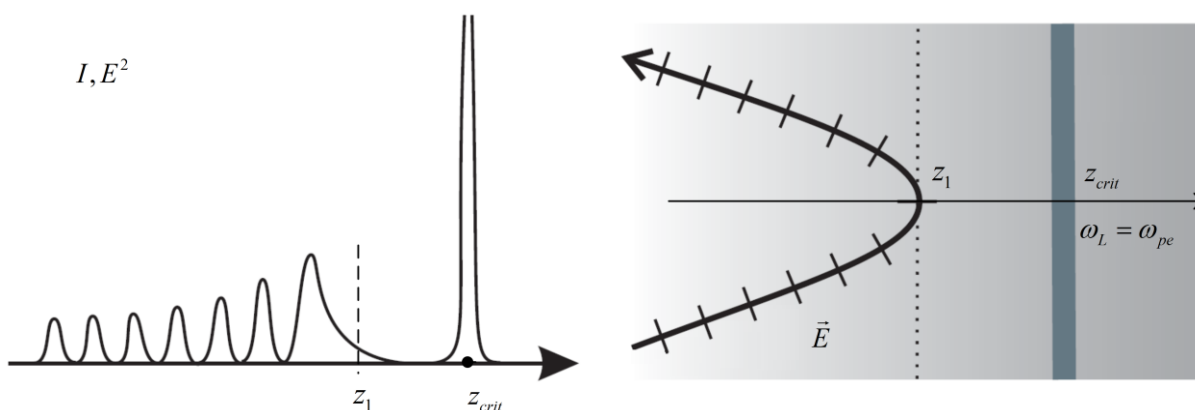


Рисунок 35 – Поле р-поляризованной волны  
вблизи точки поворота [8]

Резонансно может поглощаться до 50% излучения, дошедшего до точки поворота.

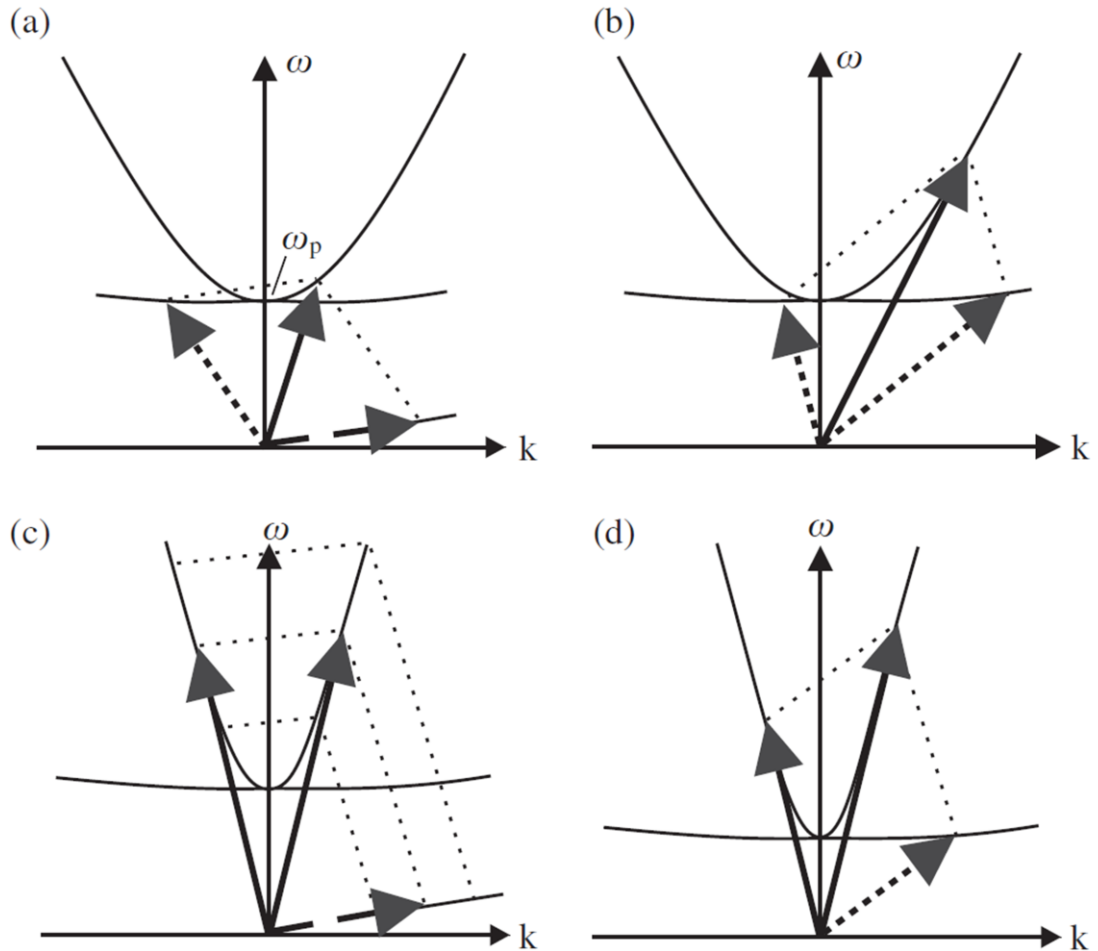
### 8.3 Нелинейные эффекты

В достаточно сильных лазерных полях могут наблюдаться нелинейные эффекты. Сущность нелинейных эффектов – взаимодействие волн друг с другом. В плазме это необязательно взаимодействие лазерных фотонов друг с другом, но и их взаимодействие с другими колебаниями: ленгмюровскими, ионно-звуковыми волнами, рассеянным излучением. Мы ограничимся только трехволновыми процессами, представляющими собой распад лазерного фотона на две (квази-) частицы. Для того чтобы взаимодействие имело место, необходимо выполнение законов сохранения энергии и импульса

$$\begin{cases} \omega_L = \omega_1 + \omega_2, \\ \vec{k}_L = \vec{k}_1 + \vec{k}_2, \end{cases} \quad (431)$$

где индекс  $L$  означает лазерный фотон.

Квант электромагнитных колебаний называется фотоном, электронных (ленгмюровских) колебаний – плазмоном, ионно-звуковых – фононом.



(a) – параметрический распад, (b) – двухплазмонный распад,  
(c) – бриллюэновское рассеяние, (d) – рамановское рассеяние

Рисунок 36 – Параметрические неустойчивости [8]

При параметрическом распаде частота фонона мала, поэтому частота фотона близка к критической, то есть этот процесс происходит вблизи критической поверхности (точки).

При двухплазмонном распаде  $\omega_L \approx 2\omega_p$ , а это означает, что распад идет вблизи  $n_c/4$ .

Бриллюэновское рассеяние по частоте не ограничено, поэтому может происходить во всем объеме подкритической плазмы.

Рамановское рассеяние идет при  $\omega_L = \omega_{Langmuir} + \omega_{scatter} > 2\omega_p$ , то есть в области с низкой концентрацией электронов:  $n < n_c/4$ .

Если свести все процессы в одну диаграмму, получим следующее.

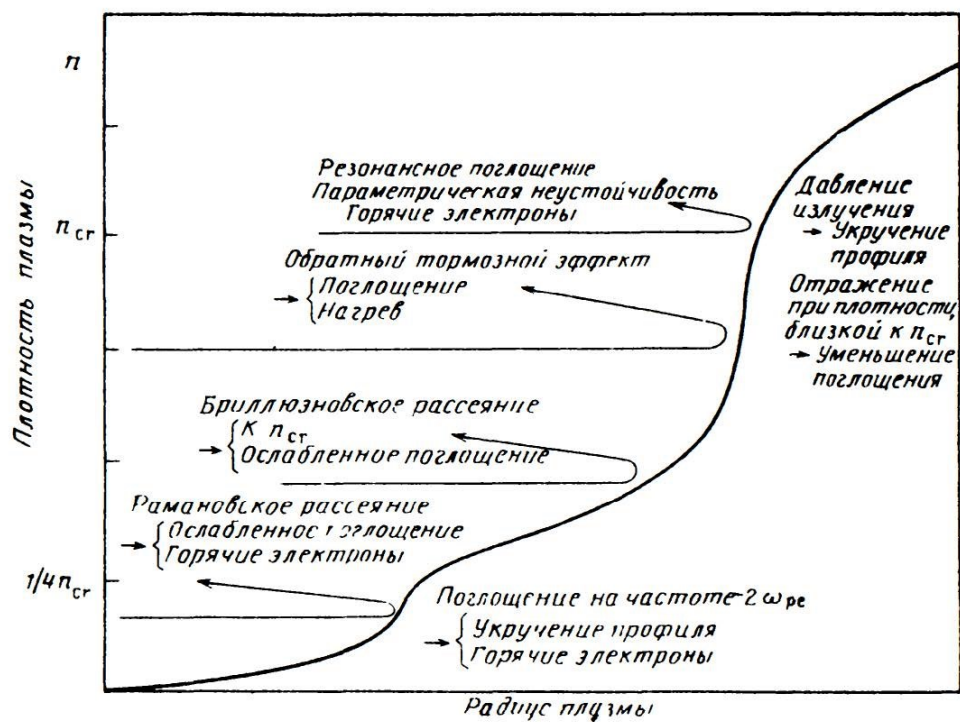


Рисунок 37 – Механизмы взаимодействия лазерного излучения с плазмой [12]

## 9 Рентгеновское излучение

### 9.1 Фотометрия

Основной величиной, характеризующей поле излучения, является интенсивность. (Спектральная) интенсивность излучения – это количество лучистой энергии, падающее в единичном интервале частот за единицу времени в единичном телесном угле в некотором направлении, характеризуемом единичным вектором  $\vec{\Omega}$ , на единичную площадку, расположенную перпендикулярно к направлению распространения излучения:

$$I_\nu(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = dE/d\sigma d\nu d\Omega dt, \quad (432)$$

обычно измеряется в Дж/см<sup>2</sup> · кэВ · ср · с = Вт/см<sup>2</sup> · кэВ · ср.

Если рассматривать излучение как совокупность частиц – фотонов, – то поле характеризуется функцией распределения  $f$ , которая связана с интенсивностью соотношением

$$I_\nu(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = h\nu c f(t, \vec{r}, \vec{\Omega}, \nu), \quad (433)$$

где  $h\nu$  – энергия кванта,

$c$  – скорость света.

Функция распределения – это количество квантов в единичном спектральном интервале вблизи частоты  $\nu$ , находящихся в момент времени  $t$  в единичном элементе объема около точки  $\vec{r}$  и имеющих направление движения в единичном телесном угле вблизи направления  $\vec{\Omega}$ . Спектральная плотность энергии на единицу объема

$$U_\nu(t, \vec{r}) = h\nu \int f d\Omega = \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega, \quad (434)$$

$$[U_\nu] = \text{Дж/см}^3 \cdot \text{кэВ}.$$

Поток энергии из точки пространства

$$\vec{S}_\nu = \int I_\nu \vec{\Omega} d\Omega = \int I_\nu d\vec{\Omega}, \quad (435)$$

где через  $d\vec{\Omega}$  обозначено произведение  $\vec{\Omega} d\Omega$ . Поток энергии через единичную площадку с нормалью  $\vec{n}$  равен проекции вектора потока на направление, задаваемое вектором нормали

$$\text{Пр}_{\vec{n}} \vec{S}_\nu = \left( \vec{n}, \int I_\nu d\vec{\Omega} \right) = \int I_\nu \cos(\widehat{\vec{\Omega}, \vec{n}}) d\Omega. \quad (436)$$

Если излучение изотропно, то есть если  $f$  (и  $I_\nu$ ) не зависят от  $\vec{\Omega}$ , то их можно вынести из-под знаков интегралов

$$U_\nu = \frac{I_\nu}{c} \cdot 4\pi, \quad (437)$$

$$\text{Пр}_{\vec{n}} \vec{S}_\nu = I_\nu \int \cos(\widehat{\vec{\Omega}, \vec{n}}) d\Omega. \quad (438)$$

Если в последнем выражении перейти в сферическую систему координат, где ось аппликат направлена по  $\vec{n}$ , то получим

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2} = \frac{Rd\varphi \cdot R \sin \theta d\theta}{R^2} = \sin \theta d\theta d\varphi \quad (439)$$

(то же, что (295), но без интегрирования по углу  $\varphi$ ),

$$\cos(\widehat{\vec{\Omega}, \vec{n}}) = \cos \theta, \quad (440)$$

откуда

$$\text{Пр}_{\vec{n}} \vec{S}_v = I_v \int \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi. \quad (441)$$

Односторонний поток (в полупространство)

$$S_v = I_v \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \theta \Big|_0^{\pi/2} = \pi I_v, \quad (442)$$

полный поток

$$S_v = I_v \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \theta \Big|_0^{\pi} = 0, \quad (443)$$

как и следовало ожидать для изотропного излучения.

## 9.2 Равновесное излучение

Фотоны – это бозоны, и в состоянии термодинамического равновесия фотонный газ описывается функцией Бозе-Эйнштейна. Уравнения электродинамики линейны, это означает, что фотоны друг с другом не взаимодействуют; поэтому для установления теплового равновесия в системе необходимо наличие небольшого количества вещества (наличие большого количества вещества, с которым взаимодействуют фотоны, сделает газ неидеальным). Механизм, обеспечивающий установления равновесия, заключается в поглощении и испускании фотонов веществом. В связи с этим возникает существенная особенность фотонного газа по сравнению, например, с электронным, – число частиц в нем является переменной величиной. Требование минимальности свободной энергии такого газа приводит к необходимости равенства нулю его химического потенциала. Таким образом, распределение фотонов по квантовым состояниям дается функцией Бозе-Эйнштейна с химическим потенциалом  $\mu$ , равным нулю:

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{h\nu/T} - 1}. \quad (444)$$

Напишем спектральную плотность энергии для такой функции распределения

$$U_\nu d\nu = h\nu \cdot \bar{n} \cdot d\tau, \quad (445)$$

где  $\tau$  – число квантовых состояний в интервале частот фотонов от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$

$$d\tau = g \frac{d\vec{p} d\vec{q}}{h^s}, \quad (446)$$

$g$  – статистический вес состояния (равен двум для фотона из-за разных возможных поляризаций);

$s$  – количество степеней свободы (равно трем).

Поскольку нас интересует только распределение по частотам, проинтегрируем последнее выражение по пространственным координатам

$$d\tau = 2 \frac{V}{h^3} d\vec{p} = \frac{2}{h^3} d\vec{p} \quad (447)$$

для единичного объема.

Перейдем в сферическую систему координат

$$d\tau = \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 dp \quad (448)$$

и заменим импульс фотона частотой по формуле

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}. \quad (449)$$

Получим

$$d\tau = \frac{2}{h^3} 4\pi \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 d\left(\frac{h\nu}{c}\right) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu. \quad (450)$$

Подставим полученное выражение в формулу для спектральной плотности энергии (445)

$$U_{\nu,Pl} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/T} - 1}, \quad (451)$$

это распределение Планка.

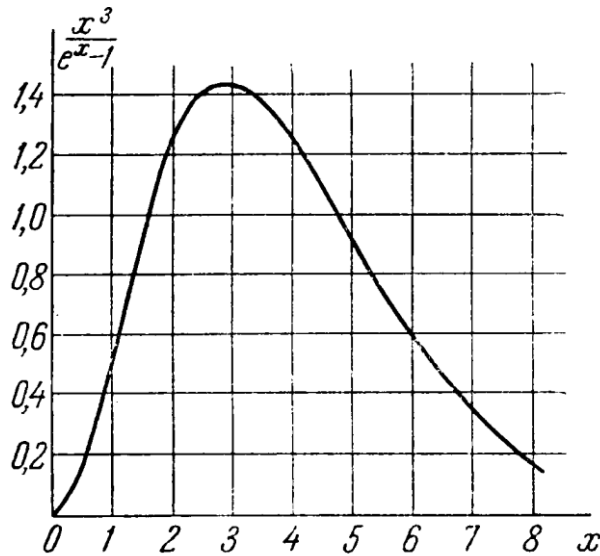


Рисунок 38 – Функция Планка [16]

Распределение Планка имеет максимум при

$$h\nu/T = 2,822, \quad (452)$$

то есть при повышении температуры максимум смещается в сторону больших частот пропорционально температуре (закон смещения Вина).

Интегральная по спектру плотность энергии

$$U_{Pl} = \int_0^{\infty} U_{\nu, Pl} d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{T}{h}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx, \quad (453)$$

где сделана замена переменной

$$h\nu/T = x. \quad (454)$$

Интеграл в (453) выражается через гамма-функцию и дзета-функцию Римана

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{4-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(4)\zeta(4) = 3! \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}, \quad (455)$$

поэтому плотность энергии (453)

$$U_{Pl} = \frac{8\pi}{h^3 c^3} \cdot \frac{\pi^4}{15} \cdot T^4 = \frac{4}{c} \cdot \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} \cdot \left(\frac{T}{k}\right)^4 = \frac{4}{c} \cdot \sigma \cdot \left(\frac{T}{k}\right)^4, \quad (456)$$

где  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-5}$  эрг/см<sup>2</sup> · с · К<sup>4</sup> – постоянная Стефана-Больцмана

$k$  – постоянная Больцмана;

температура выражена в энергетических единицах.

В дальнейшем будем считать, что плотность энергии записывается в более привычном виде

$$U_{Pl} = \frac{4\sigma T^4}{c}, \quad (457)$$

а множитель  $1/k^4$  включен в постоянную Стефана-Больцмана.

Равновесное излучение изотропно, поэтому его интенсивность связана с плотностью энергии формулой (437)

$$I_{\nu, Pl} = \frac{c U_{\nu, Pl}}{4\pi}. \quad (458)$$

Интегральный по спектру односторонний поток (442)

$$S_{Pl} = \int \pi I_{\nu, Pl} d\nu = \int \frac{c U_{\nu, Pl}}{4} d\nu = \sigma T^4. \quad (459)$$

Тело, которое поглощает все падающее на него излучение, называется абсолютно черным телом. В силу принципа детального равновесия с поверхности тела, находящегося в термодинамическом равновесии с излучением, должно излучаться столько же энергии, сколько поглощается; в противном случае тело будет нагреваться, а излучение терять энергию и остывать, то есть равновесия не будет. Это означает, что абсолютно черное тело с температурой  $T$  излучает поток энергии, равный одностороннему потоку равновесного излучения (459).

### 9.3 Уравнение переноса излучения

Для функции распределения фотонов можно написать кинетическое уравнение; но, поскольку эта функция с точностью до постоянного множителя совпадает с

интенсивностью излучения (433), кинетическое уравнение пишется непосредственно для последней

$$\frac{1}{c} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + c(\vec{\Omega}, \nabla_r) \right] I_\nu = j_\nu - \kappa_\nu I_\nu, \quad (460)$$

где  $j_\nu$  – спектральный коэффициент испускания излучения (с учетом рассеяния в данный интервал частот);

$\kappa_\nu$  – спектральный коэффициент поглощения излучения (с учетом рассеяния из данного интервала частот).

Правая часть уравнения (460) – аналог интеграла столкновений, но с учетом возможности рождения и уничтожения частиц – фотонов, а не только рассеяния с изменением импульса (частоты фотонов). Для энергий фотонов малых по сравнению с энергией покоя электрона (0,511 МэВ) рассеяние на свободных электронах происходит практически без изменения частоты с сечением, определяемым классическим радиусом электрона  $r_0$  ( $e^2/r_0 = mc^2$ )

$$\sigma_T = \frac{8}{3} \pi r_0^2 = 6,65 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2 - \quad (461)$$

томсоновское рассеяние. Такое рассеяние существенно лишь в сильно ионизованном разреженном газе, и нас оно интересовать не будет.

В коэффициент испускания  $j_\nu$  помимо спонтанного испускания, обусловленного только свойствами самого вещества, необходимо включить вынужденное испускание, пропорциональное интенсивности  $I_\nu$

$$j_\nu^{full} = j_\nu \left( 1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu \right), \quad (462)$$

где  $j_\nu$  – спонтанное испускание.

В состоянии равновесия правая часть кинетического уравнения (460) должна быть равна нулю, поэтому

$$j_{\nu,Pl} \left( 1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_{\nu,Pl} \right) - \kappa_{\nu,Pl} I_{\nu,Pl} = 0. \quad (463)$$

Если выразить интенсивность через плотность энергии (458) и воспользоваться формулой Планка (451)

$$I_{\nu,Pl} = \frac{cU_{\nu,Pl}}{4\pi} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/T} - 1}, \quad (464)$$

то вместо (463) получим

$$j_{\nu,Pl} \left( 1 + \frac{1}{e^{h\nu/T} - 1} \right) - \kappa_{\nu,Pl} I_{\nu,Pl} = 0, \quad (465)$$

$$\frac{j_{\nu,Pl}}{1 - e^{-h\nu/T}} = \kappa_{\nu,Pl} I_{\nu,Pl}, \quad (466)$$



$$\frac{j_{\nu,Pl}}{\kappa_{\nu,Pl}} = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/T} = I_{\nu,Pl}(1 - e^{-h\nu/T}) - \quad (467)$$

закон Кирхгофа (с учетом вынужденного испускания).

Состояние системы из вещества и излучения, при котором излучение находится в термодинамическом равновесии с веществом, называется (полным) термодинамическим равновесием. Состояние системы, в котором вещество находится в термодинамическом равновесии (независимо от состояния излучения), называется локальным термодинамическим равновесием (ЛТР). Так как коэффициенты испускания и поглощения определяются состоянием только вещества, а не излучения, то для выполнения закона Кирхгофа достаточно, чтобы существовало локальное термодинамическое равновесие. В предположении существования ЛТР выражения (467), связывающие  $j_\nu$  и  $\kappa_\nu$ , можно подставить в общее уравнение переноса излучения (460) с учетом вынужденного излучения

$$\frac{1}{c} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + c(\vec{\Omega}, \nabla_r) \right] I_\nu = j_\nu \left( 1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu \right) - \kappa_\nu I_\nu. \quad (468)$$

Получим

$$\frac{1}{c} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + c(\vec{\Omega}, \nabla_r) \right] I_\nu = \underbrace{\frac{j_\nu}{\kappa_\nu I_{\nu,Pl}(1 - e^{-h\nu/T})}}_{\kappa' I_{\nu,Pl}} + \underbrace{\frac{j_\nu}{\kappa_\nu \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/T}} \cdot \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu - \kappa_\nu I_\nu}_{\kappa_\nu e^{-h\nu/T} I_\nu - \kappa_\nu I_\nu = -\kappa' I_\nu}, \quad (469)$$

или

$$\frac{1}{c} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + c(\vec{\Omega}, \nabla_r) \right] I_\nu = -\kappa'_\nu (I_{\nu,Pl} - I_\nu), \quad (470)$$

где  $\kappa'_\nu$  – коэффициент поглощения с поправкой на вынужденное излучение

$$\kappa'_\nu = \kappa_\nu (1 - e^{-h\nu/T}). \quad (471)$$

#### 9.4 Диффузионное приближение

Найдем первый момент кинетического уравнения (470), для чего умножим его на  $\vec{\Omega}$  и проинтегрируем по направлениям

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{S}_\nu}{\partial t} + \int (\vec{\Omega}, \nabla) I_\nu d\vec{\Omega} = 0 - \kappa'_\nu \vec{S}_\nu, \quad (472)$$

где ноль в правой части – планковский поток, исчезающий в силу изотропии (443). Найдем интеграл

$$\int \Omega_i \Omega_j (\nabla I_\nu)_j d\Omega. \quad (473)$$

Если считать функцию распределения фотонов не сильно отличающейся от изотропной, интенсивность можно вынести из-под знака интеграла. То, что останется, должно быть пропорционально тензору  $\delta_{ij}$ , поскольку выделенного направления нет

$$\int \Omega_i \Omega_j \frac{\partial I_\nu}{\partial x_j} d\Omega = \frac{\partial I_\nu}{\partial x_j} \cdot A \delta_{ij} = A \frac{\partial I_\nu}{\partial x_i}, \quad (474)$$

где  $A$  – коэффициент пропорциональности.

Для того чтобы найти  $A$ , свернем интеграл по (нижнему) индексу

$$\text{tr} \int \Omega_i \Omega_j d\Omega = \int \Omega_i \Omega_i d\Omega = \int |\vec{\Omega}|^2 d\Omega = \int d\Omega = 4\pi. \quad (475)$$

В то же время

$$\text{tr} A \delta_{ij} = 3A, \quad (476)$$

то есть

$$A = 4\pi/3. \quad (477)$$

С учетом (474) и (477) уравнение первый момент кинетического уравнения (472) запишется как

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{S}_\nu}{\partial t} + \frac{4\pi}{3} \nabla I_\nu = -\kappa'_\nu \vec{S}_\nu. \quad (478)$$

Для (почти) изотропного излучения в соответствии с (458)

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{S}_\nu}{\partial t} + \frac{c \nabla U_\nu}{3} = -\kappa'_\nu \vec{S}_\nu. \quad (479)$$

Если поле излучения (квази-)стационарно, производной по времени можно пренебречь

$$\vec{S}_\nu = -\frac{c}{3\kappa'_\nu} \nabla U_\nu = -\frac{l'_\nu c}{3} \nabla U_\nu, \quad (480)$$

где  $l'_\nu$  – пробег фотона

$$l'_\nu = 1/\kappa'_\nu. \quad (481)$$

Это диффузионное приближение. Условие его применимости – малость градиента плотности энергии излучения, то есть высокая изотропия потока.

### 9.5 Приближение лучистой теплопроводности

Если излучение не просто однородно, но и близко к равновесному, в формуле для потока (480) можно написать  $U_{\nu,Pl}$  вместо  $U_\nu$

$$\vec{S}_\nu = -\frac{l'_\nu c}{3} \nabla U_{\nu,Pl}. \quad (482)$$

Проинтегрируем поток по спектру

$$\vec{S} = -\int \frac{l'_\nu c}{3} \nabla U_{\nu,Pl} d\nu = -\frac{c}{3} \int l'_\nu \nabla U_{\nu,Pl} d\nu. \quad (483)$$

Распределение Планка зависит только от температуры, поэтому заменим градиент плотности энергии на производную по температуре

$$\nabla U_{\nu,Pl} = \frac{dU_{\nu,Pl}}{dT} \nabla T \quad (484)$$

и вынесем градиент температуры из-под знака интеграла по частоте

$$\vec{S} = -\frac{c}{3} \int l'_v \frac{dU_{v,Pl}}{dT} \nabla T dv = -\frac{c}{3} \nabla T \cdot \int l'_v \frac{dU_{v,Pl}}{dT} dv. \quad (485)$$

Введем средний пробег по формуле

$$\bar{l} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int l'_v \frac{dU_{v,Pl}}{dT} dv}{\int \frac{dU_{v,Pl}}{dT} dv}. \quad (486)$$

Так определенный пробег называется росселандовым. С учетом связи между плотностью энергии и температурой (457) поток запишется как

$$\begin{aligned} \vec{S} &= -\frac{c}{3} \nabla T \cdot \bar{l} \int \frac{dU_{v,Pl}}{dT} dv = -\frac{c}{3} \nabla T \cdot \bar{l} \frac{d}{dT} \int U_{v,Pl} dv = -\frac{c}{3} \nabla T \cdot \bar{l} \frac{d}{dT} \left( \frac{4\sigma T^4}{c} \right) \\ &= -\frac{16}{3} \sigma \bar{l} T^3 \nabla T. \end{aligned} \quad (487)$$

Это приближение лучистой теплопроводности. Поток энергии пропорционален градиенту температуры, как для электронной теплопроводности (362).

### 9.6 Коэффициенты поглощения излучения

В правую часть кинетического уравнения для фотонов (470) входит коэффициент поглощения излучения. Излучение в плазме поглощается при электронных переходах в ионах. Схема энергетических уровней простейшего иона (кулоновский центр притяжения и один электрон) изображена на Рисунке 39. За ноль энергии принята граница между свободным и связанным состоянием электрона.



Рисунок 39 – Схема энергетических уровней системы протон-электрон [16]

Спектр энергетических состояний свободных электронов непрерывен. В связанном состоянии электрон может находиться только на дискретных уровнях энергии (в атомных единицах)

$$E_n = -\frac{Z^2}{2n^2}. \quad (488)$$

Одна атомная единица энергии – 27,2 эВ. Энергия связи электрона в атоме водорода 1 а.е./2 или 13,6 эВ; эта величина называется ридбергом.

Все электронные переходы можно разделить на три типа: связанно-связанные (I), связанно-свободные (II и III) и свободно-свободные (IV).

Так как связанные состояния обладают дискретным спектром энергии, при таких переходах поглощаются линейчатые спектры, то есть каждому переходу соответствует достаточно узкий интервал энергий (частот) фотонов, которые могут вызвать такой переход.

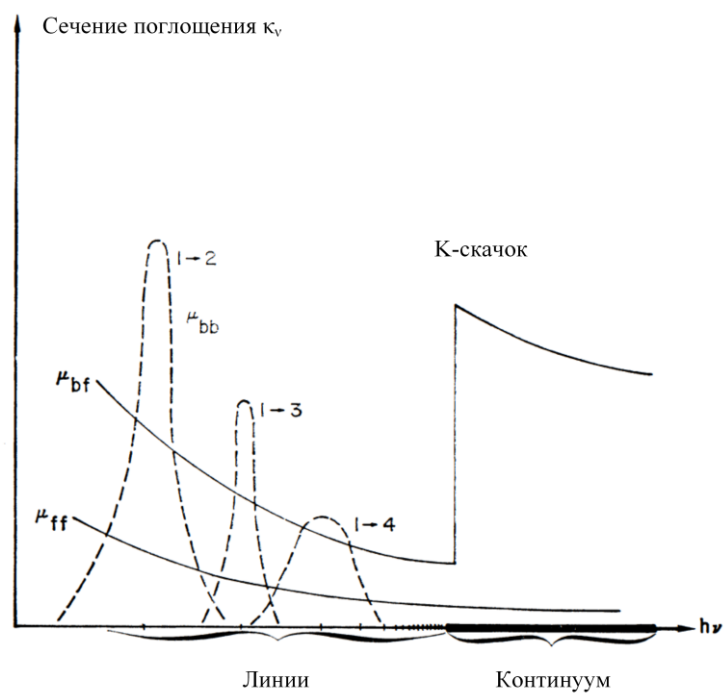
При связанно-свободных переходах электрон поглощает энергию, большую его энергии связи. Избыток энергии превращается в кинетическую энергию свободного электрона. Для того чтобы осуществился такой переход, энергия кванта должна превышать определенное значение (энергию связи электрона), поэтому спектр поглощения – (кусочно) непрерывный, но ступенчатый.

Если свободный электрон, пролетая в поле иона, поглощает фотон, он приобретает дополнительную кинетическую энергию. Так как спектр электрона непрерывен и в начальном, и в конечном состоянии, то ограничений на энергию фотона нет, и спектр поглощения непрерывный и гладкий.

Энергия фотона с длиной волны 1 мкм – около 1 эВ

$$\begin{aligned} \varepsilon = \hbar\omega = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} &= \frac{2\pi \cdot 1,05 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с} \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}}{10^{-4} \text{ см}} = 2 \cdot 10^{-12} \text{ эрг} \\ &= 2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}, \end{aligned} \quad (489)$$

поэтому лазерное излучение с такой длиной волны может вызвать только свободно-свободные переходы. Рентгеновское излучение с малыми длинами волн, то есть с большими энергиями квантов, может поглощаться за счет всех механизмов. Качественно спектр поглощения рентгеновского излучения в плазме имеет следующий вид.



$\mu_{bb}$  – линии, соответствующие переходам  
 с одного из связанных уровней на другой;  
 $\mu_{bf}$  – связанно-свободные переходы со скачком поглощения;  
 $\mu_{ff}$  – свободно-свободные переходы

Рисунок 40 – Поглощение рентгеновского излучения  
 (вблизи К-скачка) [17]

## 10 Газодинамика

### 10.1 Адиабатическое сжатие

Уравнения переноса без электромагнитного поля (256), (257)

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(nv_j) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(nv_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(nv_iv_j) = 0, \end{cases} \quad (490)$$

где  $\vec{v}$  – средняя скорость.

Как при выводе уравнений для электростатических волн в плазме (375), напомним

$$\frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} = \frac{1}{m} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}. \quad (491)$$

Для быстрого (адиабатического) процесса в идеальном газе с показателем адиабаты  $\gamma$  (380)

$$\frac{p_1}{n_1} = \gamma T_0 = \gamma \frac{p_0}{n_0}. \quad (492)$$

Отсюда уравнение распространения малых (звуковых) колебаний

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{m} \cdot \gamma \frac{p_0}{n_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) n_1 = 0, \quad (493)$$

и дисперсионное уравнение

$$(-i\omega)^2 - \gamma \frac{p_0}{\rho_0} (-ik)^2 = 0, \quad (494)$$

или

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} = c_s^2, \quad (495)$$

где  $c_s$  – адиабатическая скорость звука.

### 10.2 Ударное сжатие

#### 10.2.1 Ударные волны

Сжатие топлива в мишени для инерциального синтеза происходит под действием абляционного давления на поверхности мишени, которая интенсивно испаряется при поглощении энергии драйвера. Возмущения, вносимые в мишень, не малы, а режим распространения возмущений не линеен.

В линейном режиме возмущения распространяются без искажения профиля. В нелинейном режиме это не так. Скорость звука (495) растет с плотностью

$$c_s^2 = \gamma \frac{\text{const} \cdot \rho^\gamma}{\rho} \propto \rho^{\gamma-1}, \quad (496)$$

то есть

$$\frac{\partial c_s}{\partial \rho} > 0. \quad (497)$$

Это означает, что в нелинейном режиме возмущения в областях с более высокой плотностью будут распространяться быстрее, чем в областях с более низкой плотностью, что приведет к укручению фронта возмущения.

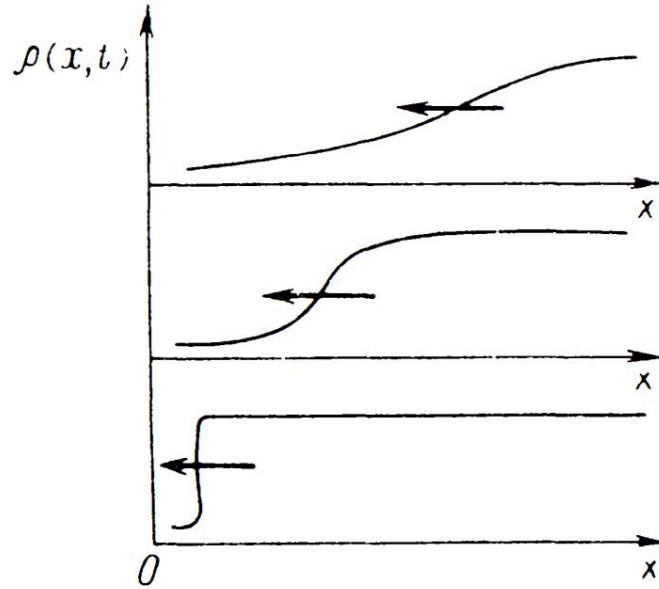


Рисунок 41 – Образование ударной волны [12]

В конечном счете в распределении скорости, давления, плотности и т.д. возникнет разрыв. На поверхности разрыва должны выполняться законы сохранения потока вещества (ось  $x$  перпендикулярна плоскости разрыва)

$$\vec{j} \equiv \rho \vec{v} = const, \quad (498)$$

потока импульса

$$P_{ij} \equiv p \delta_{ij} + \rho v_i v_j = const, \quad (499)$$

и потока энергии

$$\vec{Q} = \left( \frac{\rho v^2}{2} + \frac{5}{2} nT \right) \vec{v} = const. \quad (500)$$

В проекциях на ось  $x$

$$[\rho v_x] = 0, \quad (501)$$

$$\begin{cases} [p + \rho v_x^2] = 0, \\ [\rho v_x v_y] = 0, \\ [\rho v_x v_z] = 0, \end{cases} \quad (502)$$

$$\left[ \rho v_x \left( \frac{v^2}{2} + w \right) \right] = 0, \quad (503)$$

где  $w$  – энтальпия на единицу массы;

квадратные скобки означают разность величин с двух сторон разрыва.

Эти законы сохранения называются соотношениями Рэнкина-Гюгонио.

В нашем случае поток вещества через разрыв не равен нулю

$$\rho v_x \neq 0, \quad (504)$$

поэтому из (второго и третьего уравнений) сохранения потока импульса следует

$$\begin{cases} [v_y] = 0, \\ [v_z] = 0, \end{cases} \quad (505)$$

а из сохранения потока энергии –

$$\left[ \frac{v^2}{2} + w \right] = 0. \quad (506)$$

Такие разрывы называются ударными волнами.

### 1 0 . 2 . 2 А д и а б а т а Г ю г о н и о

Рассмотрим изменение состояния вещества после того, как по нему прошла ударная волна. В соответствии с уравнениями (505),  $y$  и  $z$  компоненты скорости с разных сторон разрыва одинаковы. Перейдем в систему координат, движущуюся в плоскости разрыва так, что эти компоненты в ней равны нулю. В уравнениях останется лишь  $x$  компонента скорости; индекс  $y$  у нее писать не будем. Выразим поток вещества  $\rho v = \text{const}$  из первого уравнения для потока импульса

$$p + \frac{(\rho v)^2}{\rho} = \text{const}. \quad (507)$$

Получим

$$p_1 + \frac{(\rho v)^2}{\rho_1} = p_2 + \frac{(\rho v)^2}{\rho_2} \quad (508)$$

или

$$(\rho v)^2 = \frac{p_1 - p_2}{\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}} \quad (509)$$

прямая Рэлея-Михельсона (прямая в координатах  $p - V$ ).

Аналогично, выразим поток вещества  $\rho v = \text{const}$  из уравнения для потока энергии (506)

$$\frac{(\rho v)^2}{2\rho^2} + w = \text{const}. \quad (510)$$

Получим

$$\frac{(\rho v)^2}{2\rho_1^2} + w_1 = \frac{(\rho v)^2}{2\rho_2^2} + w_2 \quad (511)$$

или



$$(\rho v)^2 = \frac{w_2 - w_1}{\frac{1}{2\rho_1^2} - \frac{1}{2\rho_2^2}}. \quad (512)$$

Приравняем правые части (509) и (512)

$$\frac{p_1 - p_2}{\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}} = \frac{w_2 - w_1}{\frac{1}{2\rho_1^2} - \frac{1}{2\rho_2^2}}, \quad (513)$$

или

$$w_1 - w_2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) (p_2 - p_1) = 0 - \quad (514)$$

ударная адиабата или адиабата Гюгонио.

Определим степень сжатия газа в ударной волне, для чего выразим энтальпию через плотность и давление. Для больцмановского газа

$$c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1}, \quad (515)$$

откуда энтальпия, отнесенная к единице массы,

$$w = \frac{c_p T}{m} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p}{\rho}, \quad (516)$$

где  $m$  – масса частицы.

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) (p_2 - p_1) = 0. \quad (517)$$

Из последнего выражения найдем отношение объемов до и после ударной волны

$$\left( \frac{\gamma p_1}{\gamma - 1} + \frac{p_2 - p_1}{2} \right) \frac{1}{\rho_1} = \left( \frac{\gamma p_2}{\gamma - 1} + \frac{p_2 - p_1}{2} \right) \frac{1}{\rho_2} \quad (518)$$

или

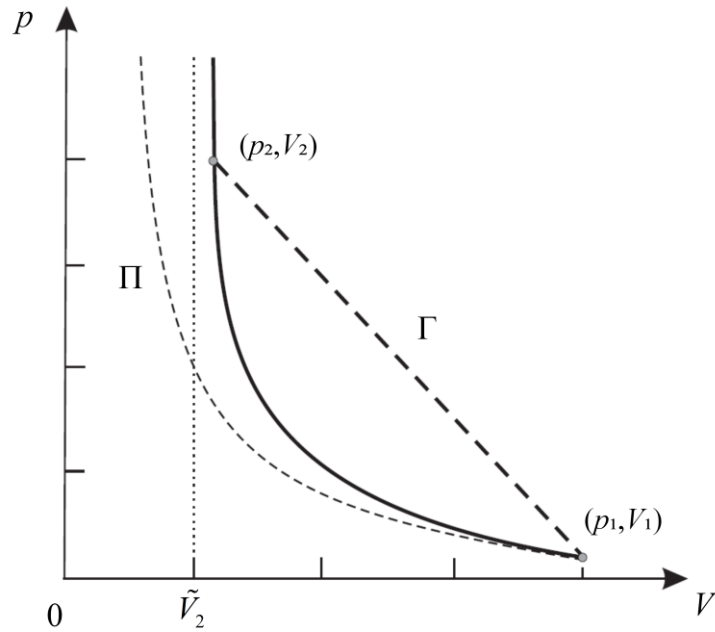
$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{2\gamma p_1 + (\gamma - 1)(p_2 - p_1)}{2\gamma p_2 - (\gamma - 1)(p_2 - p_1)} = \frac{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2}{(\gamma + 1)p_2 + (\gamma - 1)p_1}. \quad (519)$$

Для волны большой интенсивности  $(\gamma - 1)p_2 \gg (\gamma + 1)p_1$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (520)$$

Для одноатомного газа показатель адиабаты  $\gamma$  равен 5/3, и отношение плотностей  $\rho_2/\rho_1$  равно 4, то есть такой газ сожмется после прохождения по нему ударной волны максимум в 4 раза.

Графически ударная адиабата выглядит следующим образом.



П – адиабата Пуассона, Г – адиабата Гюгоню;  
 прямая  $V = \tilde{V}_2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} V_1$  – асимптота

Рисунок 42 – Адиабата Гюгоню и адиабата Пуассона [8]

«Движение» по адиабате осуществляется вверх: конечное состояние (2) находится выше и левее начального (1). Движение осуществляется скачком: вещество не проходит промежуточные состояния между (1) и (2), в отличие от адиабатического сжатия по адиабате Пуассона, движение вдоль которой осуществляется непрерывно.

### 10.2.3 Квазиизотропическое сжатие

Если по веществу, через которое прошла одна ударная волна, пропустить вторую, его можно сжать до плотности, большей, чем  $\tilde{\rho}_2 = 1/\tilde{V}_2$

$$\tilde{V}_2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} V_1, \quad (521)$$

$$\tilde{V}_3 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} V_2 < \tilde{V}_2. \quad (522)$$

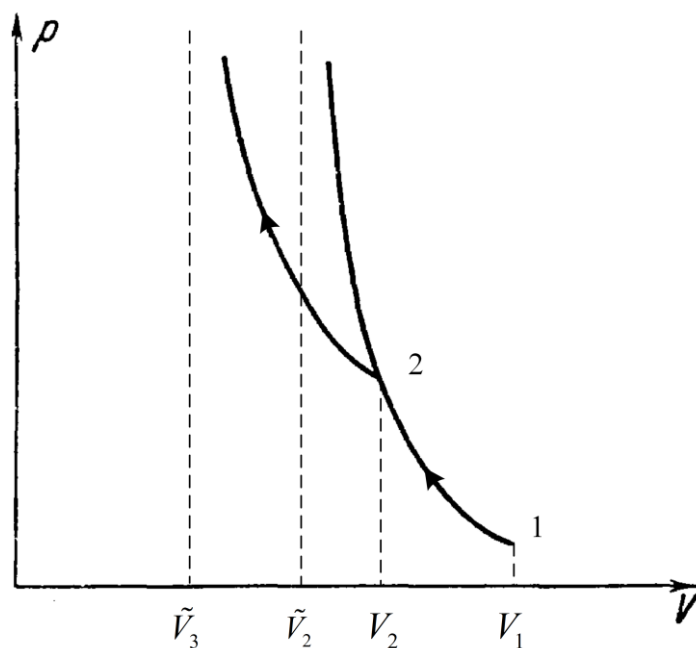
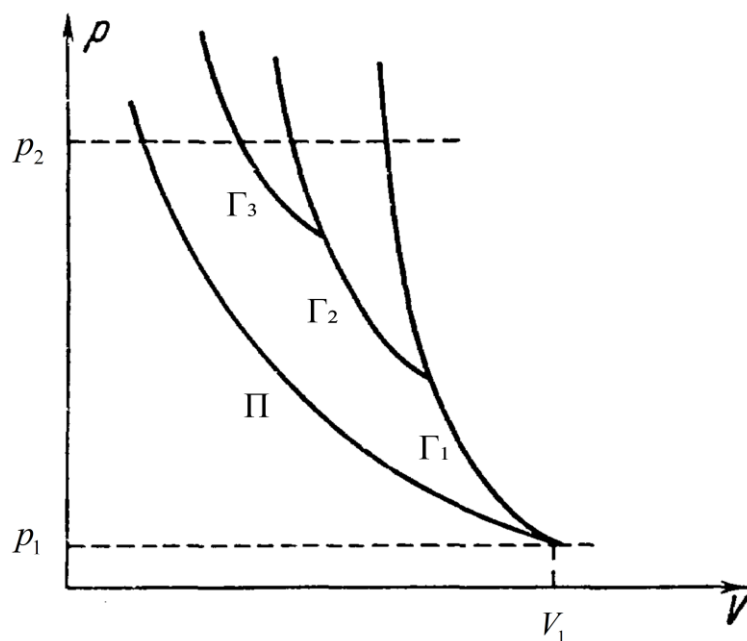


Рисунок 43 – Две последовательные ударные волны [16]

Если использовать несколько последовательных ударных волн, можно обеспечить сильное квазиизоэнтропическое сжатие и приблизиться к адиабате Пуассона.



Π – адиабата Пуассона,  $\Gamma_i$  – адиабаты Гюгонио

Рисунок 44 – Многократное ударное и адиабатическое сжатие [16]

Для того чтобы не удаляться от адиабаты Пуассона, то есть не вносить много энтропии в топливо, ударные волны должны быть несильными.

То, что было рассмотрено, – это ударная волна в плоской геометрии. Если волна создана «сферическим поршнем», как это происходит в мишенях для ЛТС, образуется сходящаяся к центру сферическая ударная волна. В момент фокусировки сильной волны в

идеальном газе с показателем адиабаты  $5/3$  достигается максимальное сжатие  $\tilde{\rho}_2/\rho_1$  около 10. После этого возникает отраженная ударная волна, расширяющаяся навстречу движущемуся к центру веществу. На обратном проходе идет дальнейшее ударное сжатие, достигающее в сумме 33 раз.

### 10.3 Гидродинамические неустойчивости

Давление, формирующее начальные радиальные возмущения плотности вещества, распространяющиеся затем к центру в виде ударных волн, прикладываются на фронте абляции. Фактически при этом предпринимается попытка ускорить плотную среду (холодное топливо), толкая ее более разреженной средой (веществом, испаряющимся с поверхности). Такой процесс является гидродинамически неустойчивым и может привести возникновению неустойчивости Рэлея-Тейлора. Классическим примером, иллюстрирующим механизм развития неустойчивости Рэлея-Тейлора, является сосуд, заполненный двумя несмешивающимися жидкостями, находящийся в поле тяжести. Если граница жидкостей – плоскость, они находятся в равновесии.

Пусть плотность верхней жидкости больше плотности нижней. Если внести возмущения в форму поверхности раздела, то система выйдет из равновесия. Амплитуда искажений  $\xi$  будет расти со временем (на линейной стадии) как  $e^{\gamma t}$ , как показано на Рисунок 45 а). Инкремент нарастания

$$\gamma = \sqrt{Aak}, \quad (523)$$

где  $a$  – ускорение поверхности раздела (в случае поля тяжести –  $g$ );

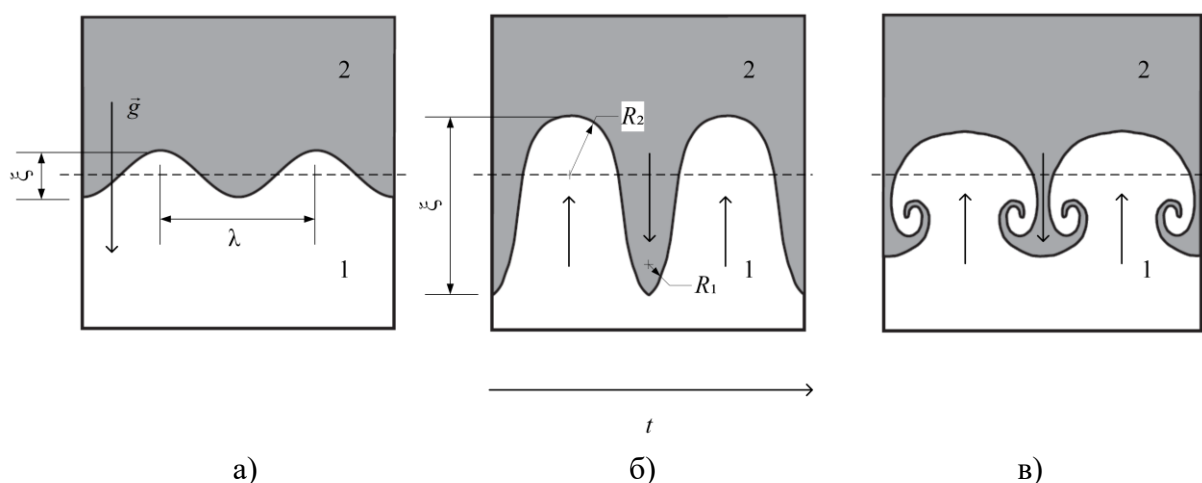
$k$  – волновое число возмущения;

$A$  – число Атвуда

$$A = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}. \quad (524)$$

Для малых длин волн волновое число, а с ним и инкремент нарастания, становится большим; но для таких искажений необходимо учитывать вязкость жидкости и поверхностное натяжение, которые будут снижать скорость роста.

Когда амплитуда возмущений станет сравнимой с длиной волны  $\lambda$  (Рисунок 45 б)), предположения, в которых была получена формула (523), перестанут работать. Неустойчивость перейдет в нелинейный режим, и ее рост замедлится, а форма поверхности раздела исказится: образуются опускающиеся с постоянным ускорением струи тяжелой жидкости и поднимающиеся с постоянной скоростью пузыри легкой, радиус кривизны пузыря  $R_2$  больше радиуса кривизны струи  $R_1$ .



$R_1, R_2$  – радиусы кривизны поверхности

Рисунок 45

На близкой к вертикали границе раздела будет развиваться неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, связанная с трением друг о друга слоев жидкостей, движущихся в разные стороны (одна вниз, другая вверх) (Рисунок 45 в)).

В мишени фронт абляции, на котором и развивается неустойчивость, не покоится, а движется сквозь вещество. Поток вещества сквозь границу раздела сносит искажения в испаряющуюся область и, таким образом, оказывает стабилизирующее действие на процесс развития неустойчивости. Инкремент нарастания (523) должен быть уменьшен на величину, пропорциональную скорости потока сквозь фронт абляции  $v_a$

$$\gamma = \sqrt{Aak} - bkv_a, \quad (525)$$

где  $b$  – числовой коэффициент (обычно близкий к 3 или 4), получаемый из сравнения с результатами расчетов.

Это формула Такабе.

Начальные возмущения на фронте абляции, из которых развивается неустойчивость, – неоднородность засветки поверхности капсулы лазерным или рентгеновским излучением и неидеальная сферичность поверхности, возникшая при изготовлении мишени. Также неустойчивость может развиваться в центре мишени при торможении более холодного и плотного топлива о более горячий и разреженный hot spot на конечной стадии имплозии.

## 11 Зажигание и горение

### 11.1 Условие разогрева

Рассмотрим однородный hot spot с однородной холодной плазмой вокруг.

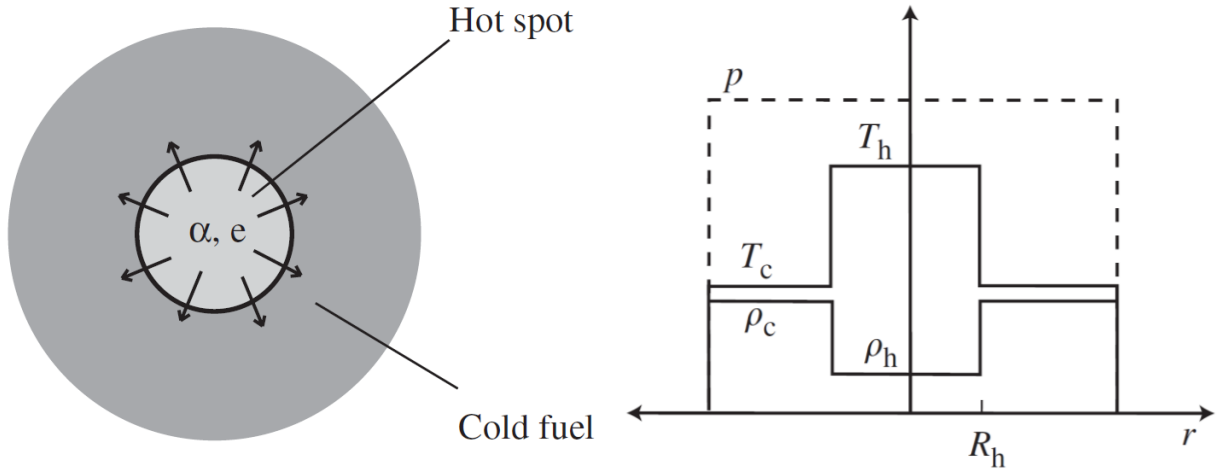


Рисунок 46 – Характеристики топлива в момент зажигания в изобарной модели [8]

Изменение энергии центральной части

$$\frac{dE}{dt} = W_{dep} - W_m - W_r - W_e, \quad (526)$$

где  $W_{dep}$  – выделение термоядерной энергии;

$W_m$  – механическая работа;

$W_r$  – радиационные потери;

$W_e$  – потери на теплопроводность;

все величины будут писаться для единичного объема.

*Термоядерное энерговыделение*

Мощность, выделяемая в реакциях

$$W_{fus} = RQ, \quad (527)$$

где  $R$  – скорость реакции ( $1/\text{см}^3 \cdot \text{с}$ );

$Q$  – энерговыделение в 1 акте.

Для эквимольной смеси

$$R = n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle = \left( \frac{\rho N_A}{A} \right)^2 \langle \sigma v \rangle, \quad (528)$$

поэтому

$$W_{fus} \propto \rho^2 \langle \sigma v \rangle. \quad (529)$$

Мощность, оставленная в hot spot

$$W_{dep} = W_\alpha f_\alpha + W_n f_n = W_\alpha f_\alpha + 4W_\alpha f_n = W_\alpha (f_\alpha + 4f_n), \quad (530)$$

где  $f_\alpha, f_n$  – доля мощности, оставленная  $\alpha$ -частицами и нейтронами;

$W_\alpha, W_n$  – мощности, выделяемые в  $\alpha$ -частицах и нейтронах.

Доля  $f_\alpha$  зависит от пробега  $\alpha$ -частиц

$$f_\alpha = f_\alpha(\tau_\alpha), \quad (531)$$

где  $\tau_\alpha$  – отношение радиуса центральной области к пробегу

$$\tau_\alpha = R_h/l_\alpha. \quad (532)$$

Пробег

$$l_\alpha = \int_0^\infty v_\alpha dt. \quad (533)$$

При характерных условиях в мишени  $\alpha$ -частицы теряют скорость за счет столкновений с электронами (с отклонением на малые углы и с малой передачей энергии за счет большой разности масс). В этом случае

$$\frac{dv_\alpha}{dt} = -\frac{v_\alpha}{t_{\alpha e}}, \quad (534)$$

где  $t_{\alpha e}$  – характерное время передачи энергии (ср. с  $\tau_{ei} \propto \frac{T_h^{3/2}}{n_{fast} L_{ei}}$  – временем электрон-ионной релаксации)

$$t_{\alpha e} \propto \frac{T_h^{3/2}}{\rho_h L_{\alpha e}}, \quad (535)$$

где  $T_h$  – температура электронов.

Нагретые электроны отдают энергию ионам с характерным временем  $\tau_{ei}$ . При этом

$$\tau_{ei} \approx t_{\alpha e}, \quad (536)$$

(процесс тот же: рассеяние заряженных частиц разной массы друг на друге). Пробег (533) с учетом (534)

$$l_\alpha = \int_{t=0}^{t \rightarrow \infty} v_\alpha \cdot \left( -\frac{t_{\alpha e} dv_\alpha}{v_\alpha} \right) = -t_{\alpha e} v_\alpha \Big|_{t=0}^{t \rightarrow \infty} = t_{\alpha e} v_{\alpha 0}, \quad (537)$$

где  $v_{\alpha 0}$  – скорость, соответствующая энергии 3,5 МэВ (около  $1,3 \cdot 10^9$  см/с).

Относительный пробег

$$\tau_\alpha = \frac{R_h}{v_{\alpha 0} t_{\alpha e}} \propto \frac{\rho_h R_h L_{\alpha e}}{v_{\alpha 0} T_h^{3/2}} \quad (538)$$

пропорционален  $\rho R$ .

Из (535) и (537) видно, что  $\alpha$ -частицы быстро тормозятся в окружающем hot spot холодном плотном топливе

$$t_{\alpha e} \propto \frac{T^{3/2}}{\rho}, \quad (539)$$

таким образом нагревая только тонкий слой вокруг центральной части – так распространяется волна горения.

Считаем, что нейтроны в мишени не тормозятся, и все энергосодержание происходит только за счет  $\alpha$ -частиц.

#### *Потери на теплопроводность*

Закон Фурье для потока энергии через единицу площади

$$Q = -\kappa \nabla T, \quad (540)$$

где  $\kappa$  – теплопроводность (например, спитцеровская)

$$\kappa \propto \frac{T^{5/2}}{L\sqrt{m}}. \quad (541)$$

Из (541) видно, что ионная теплопроводность много меньше электронной

$$\kappa_i/\kappa_e = \sqrt{m_e/m_i}. \quad (542)$$

Ионной теплопроводностью мы пренебрежем.

Градиент температуры в (540) на границе областей у нас обращается в бесконечность, но по порядку величины можно написать

$$\nabla T \sim \frac{T_h}{R_h} \quad (543)$$

(это единственные параметры с подходящей размерностью у нас). Тогда

$$W_e = -\frac{\kappa_e \nabla T_e \cdot S}{V} \propto \frac{T_e^{7/2}}{R_h L_{ei}} \quad (544)$$

(для лоренцевой плазмы кулоновский логарифм только электрон-ионный).

#### *Потери на излучение*

Мощность тормозных потерь для оптически тонкой плазмы (без вывода)

$$W_r \propto \underbrace{\rho_h^2}_{N_e N_i} T_h^{1/2}. \quad (545)$$

#### *Механическая работа*

$$W_m = \frac{1}{V} \frac{dE}{dt} = \frac{1}{V} \frac{pdV}{dt} = \frac{\tilde{n} T}{V} \cdot \frac{S dr}{dt} \propto \frac{\rho T}{R} \cdot u, \quad (546)$$

где использовано уравнение состояния идеального газа

$$p = nT, \quad (547)$$

$u$  – скорость поверхности hot spot. Для изобарной модели

$$u = 0. \quad (548)$$

#### *Условие разогрева*

Температура hot spot растет со временем, если



$$\frac{dE}{dt} = W_{dep} - \underbrace{W_m}_0 \text{ для изобарной системы} - W_r - W_e > 0. \quad (549)$$

$$\underbrace{W_\alpha}_{A\alpha\rho_h^2\langle\sigma v\rangle} f_\alpha - A_b\rho_h^2 T_h^{1/2} - \frac{A_e T_e^{7/2}}{R_h^2 L_{ei}} > 0 \Big| \cdot R_h^2. \quad (550)$$

$$[A_\alpha\langle\sigma v\rangle f_\alpha(T_h, \rho_h R_h) - A_b T_h^{1/2}](\rho_h R_h)^2 - \frac{A_e T_e^{7/2}}{L_{ei}} > 0. \quad (551)$$

Уравнение

$$g(T_h, \rho_h R_h) = 0 \quad (552)$$

задает некоторую кривую на плоскости  $(\rho R, T)$ .

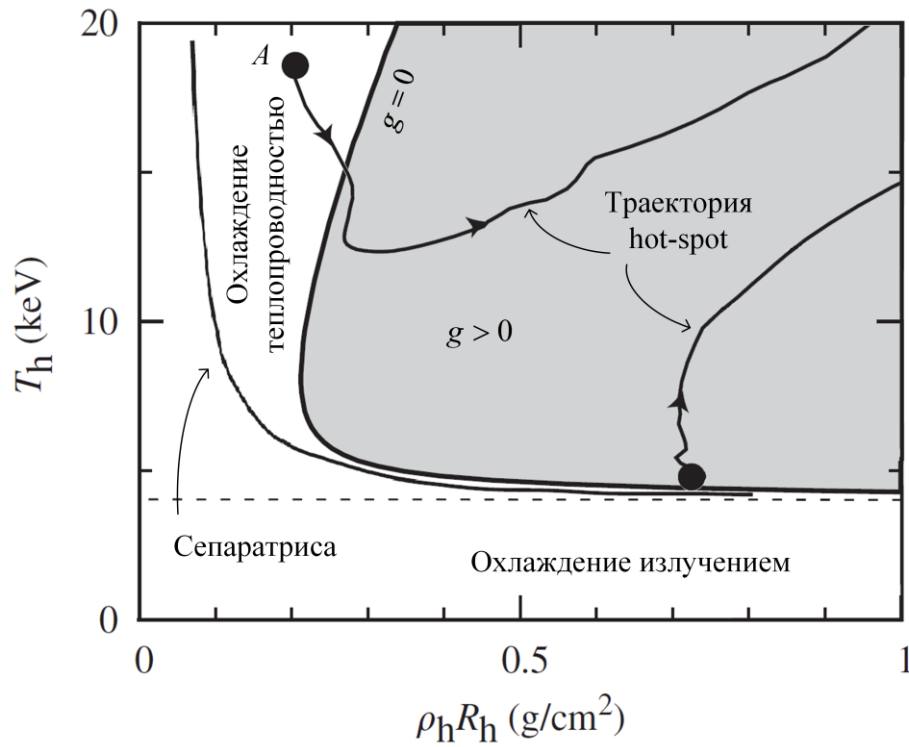


Рисунок 47

Для того, чтобы решение уравнения (552) существовало, необходимо, чтобы множитель в квадратных скобках был больше нуля. В области малых температур реакционная способность  $\langle\sigma v\rangle$  слишком мала – меньше радиационных потерь, – там решения нет (radiation cooling). При большей температуре (там, где решение существует), если  $\rho R$  мало, то погрешность на теплопроводность больше энерговыделения.

Точка типа А изначально не удовлетворяет условию  $g > 0$ . Но  $\alpha$ -частицы и электронная теплопроводность греют тонкий слой вокруг начальной hot spot, тем самым увеличивая ее массу и  $\rho R$ . Если точка попадет в область  $g > 0$ , она будет разогреваться.

Поэтому сепаратриса областей зажигания и незажигания проходит снаружи границы  $g = 0$ .

## 11.2 Усиление

Усиление  $G$  определяется как

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \frac{E_{fusion}}{E_{driver}}, \quad (553)$$

где  $E_{fusion}$  – термоядерное энерговыделение

$$E_{fusion} = qMF, \quad (554)$$

$q$  – энергозапас единицы массы топлива (340 Дж/мг для эквимольного DT);

$M$  – масса топлива

$$M = M_{hot} + M_{cold} = \frac{4\pi}{3} [\rho_h R_h^3 + \rho_c (R_c^3 - R_h^3)], \quad (555)$$

$f$  – степень выгорания (см. критерий  $\rho R$ )

$$f = \frac{H_{fuel}}{H_B + H_{fuel}}, \quad (556)$$

$$H_{fuel} = H_{hot} + H_{cold} = \rho_h R_h + \rho_c (R_c - R_h). \quad (557)$$

КПД передачи энергии в топливо

$$\eta \stackrel{\text{def}}{=} E_{fuel}/E_{driver} \lesssim 10\%. \quad (558)$$

Для схемы с прямым облучением он определяется поглощением лазерного излучения, для схемы с непрямым – конверсией в рентгеновское излучение и последующим поглощением рентгеновского излучения капсулой.

Смотря на график разогрева, можно задаться минимальным  $H = \rho R$  и  $T$  для hot spot.

Составим из них комбинацию

$$H_h T_h = \rho_h R_h T_h. \quad (559)$$

Замечая, что для идеального газа

$$p = nt = \frac{\rho N_A}{A} T, \quad (560)$$

введем параметр

$$F \stackrel{\text{def}}{=} p R_h = 2 \frac{N_A}{A} \rho_h T_h R_h = 2 \frac{N_A}{A} H_h T_h, \quad (561)$$

где  $p$  одинаково во всем топливе в изобарном приближении;

множитель 2 соответствует однозарядным ионам и электронам.

Холодное топливо близко к вырожденному электронному газу. В полностью вырожденном газе (см. лекцию по энергии связи ядра)

$$p_{deg} = A_{deg} \rho^{5/3}. \quad (562)$$

Введем параметр  $\alpha$  – показатель адиабаты

$$p_c = \alpha A_{deg} \rho_c^{5/3} (= p_h = p), \quad (563)$$

характеризующий степень отклонения газа от идеальности

$$\alpha = p_c(\rho_c)/p_{deg}(\rho_c). \quad (564)$$

Энергия всего топлива

$$\underbrace{E_{fuel}}_{\eta E_{driver}} = \frac{3}{2} p V = \frac{3}{2} p \cdot \frac{4\pi}{3} R_c^3 = 2\pi p R_c^3 \quad (565)$$

(это выражение верно для идеальных больцмановского и ферми-газа).

В итоге имеем

$$G = \frac{4\pi}{3} [\rho_h R_h^3 + \rho_c (R_c^3 - R_h^3)] \frac{\rho_h R_h + \rho_c (R_c - R_h)}{H_B + \rho_h R_h + \rho_c (R_c - R_h)} \cdot \frac{q}{E_{driver}}, \quad (566)$$

где  $R_h = F/p$ ;

$$\rho_h = H_h/R_h;$$

$$\rho_c = (p/\alpha A_{deg})^{3/5};$$

$$R_c = \left( \frac{\eta E_{driver}}{2\pi p} \right)^{1/3};$$

так что

$$G = G(E_{driver}; p, \alpha, \eta) \Big|_{\substack{F, H_h, H_B, q \\ \text{определяются} \\ \text{физикой ТЯ} \\ \text{реакций}}} \quad (567)$$

Графики (в двойном логарифмическом масштабе).

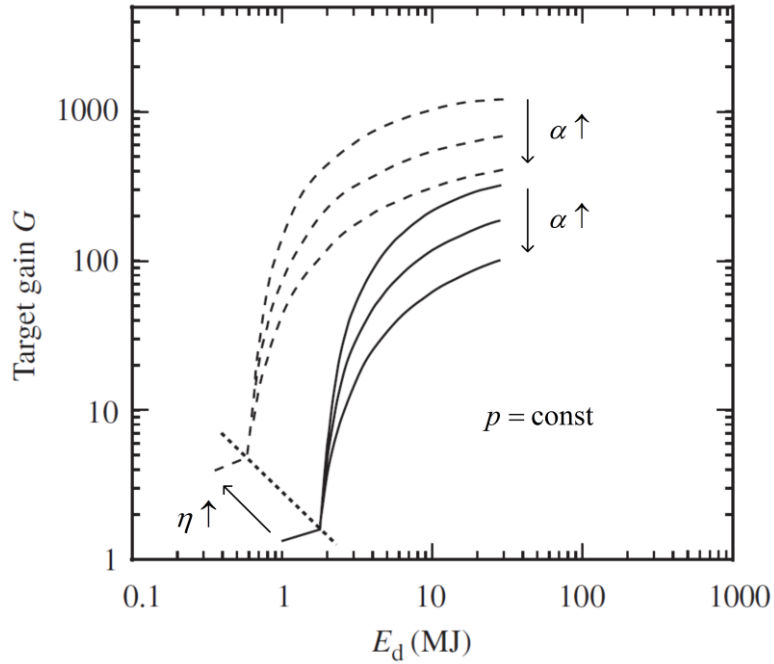


Рисунок 48

С увеличением КПД передачи энергии  $\eta$  снижается пороговая энергия драйвера (очевидно), и растет усиление (при неизменной энергии)

$$\begin{cases} E_{driver}^{ignition} = \frac{2\pi p R_c^3}{\eta} = \frac{2\pi p}{\eta} \left(\frac{F}{p}\right)^3 = \frac{2\pi}{\eta} \cdot \frac{F^3}{p^2}; \\ G^{ignition} = qM \frac{H_h}{H_B + H_h} \cdot \frac{1}{E_h/\eta} = \frac{\eta q}{e_h} \cdot \frac{H_h}{H_B + H_h}; \end{cases} \quad (568)$$

где предполагается, что все топливо состоит из hot spot ( $H_{fuel} = H_h, R_c = R_h$ ). Результат (567), (568) не зависит от  $\alpha$ ,  $\partial E/\partial \eta < 0$ ,  $\partial G/\partial \eta > 0$ .

Асимптотика при больших энергиях драйвера

$$G(E_d \rightarrow \infty) \xrightarrow{R_c \rightarrow \infty} \frac{q\eta}{e_c} \cdot \underbrace{\frac{H_c}{H_B + H_c}}_{\frac{H_c}{H_c}=1} \rightarrow \frac{q\eta}{e_c} \propto \eta \alpha^{-2/5} p^{-3/5}, \quad (569)$$

где использована связь

$$e_c \propto \alpha \rho^{2/3} \propto \alpha (p/\alpha)^{2/5} = \alpha^{3/5} p^{2/5}; \quad (570)$$

где

$$p_c \propto \alpha \rho^{5/3} \Rightarrow \rho \propto (p_c/\alpha)^{3/5}. \quad (571)$$

Если мы фиксируем  $\eta$ ,  $\alpha$ , но меняем  $p$  (то есть радиус hot spot), то с увеличением  $p$  (с уменьшением  $R_h$ ) пороговое усиление  $G^{ignition}$  не изменяется, энергия драйвера  $E_{driver}^{ignition}$  уменьшается, асимптотическое усиление также становится меньше (линейно в двойном логарифмическом масштабе).

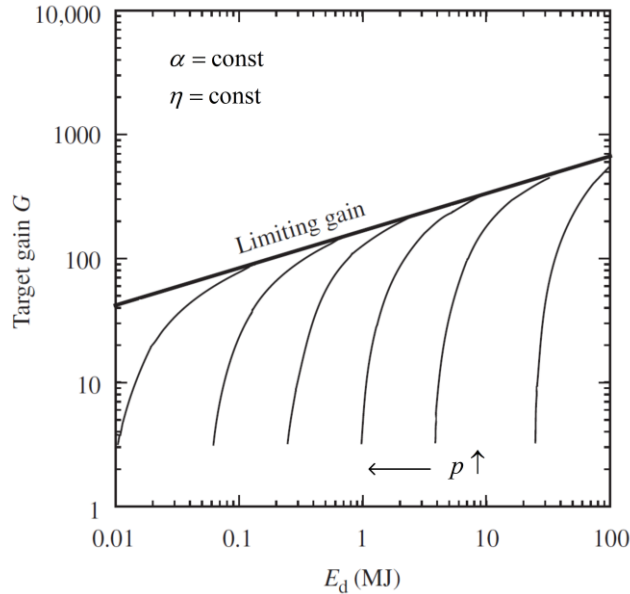


Рисунок 49

Выход на насыщение связан с выгоранием термоядерного топлива в асимптотическом режиме. Увеличивая давление, мы вкладываем много энергии в сжатие больших объемов холодного топлива.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике. М.: Наука (1974).
- 2 Н.Е. Кочин. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Москва: Наука (1965).
- 3 Э. Маделунг. Математический аппарат физики. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит. (1961).
- 4 S. Pfalzner. An Introduction to Inertial Confinement Fusion. Boca Raton, FL: CRC Press (2006).
- 5 G.M. McCracken, P. Stott. Fusion. The Energy of the Universe. Elsevier Inc. (2005).
- 6 А.П. Кондрашов, и. др. Новейший справочник необходимых знаний. М.: РИПОЛ КЛАССИК (2003).
- 7 J. Freidberg. Plasma Physics and Fusion Energy. Cambridge University Press
- 8 S. Atzeni, J. Meyer-ter-Vehn. Inertial Fusion. Oxford: Clarendon Press (2004).
- 9 М.В. Федорюк. Метод перевала.
- 10 А.М. Тер-Крикоров, М.И. Шабунин. Курс математического анализа. М.: Издательство МФТИ (2000).
- 11 Г. Бейтман. МГД-неустойчивости. М.: Энергоатомиздат (1982).
- 12 Д. Дюдерштадт, Г. Мозес. Инерциальный термоядерный синтез. М.: Энергоатомиздат (1984).
- 13 T.J.M. Boyd, J.J. Sanderson. The Physics of Plasmas. Cambridge: Cambridge University Press (2003).
- 14 А.Ф. Александров и др. Основы электродинамики плазмы. Москва: Высшая школа (1988).
- 15 М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики. Москва: Наука (1973).
- 16 Я.Б. Зельдович, Ю.П. Райзер. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. Москва: Наука (1966).
- 17 G.C. Pomraning. The Equations of Radiation Hydrodynamics. Pergamon Press (1973).