

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Саровский физико-технический институт -

филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего
образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

(СарФТИ НИЯУ МИФИ)

ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра «Высшей математики»

УТВЕРЖДАЮ

Декан ФИТЭ, к.ф.-м.н , доцент

_____ **В.С. Холушкин**

«__» _____ 2021 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Математический анализ

наименование дисциплины

| | |
|--|--|
| Направление подготовки (специальность) | <u>09.03.01 Информатика и вычислительная техника</u> |
| Наименование образовательной программы | <u>Вычислительные машины, комплексы, системы и сети. Программное и аппаратное обеспечение высокопроизводительных вычислительных систем и сетей</u> |
| Квалификация (степень) выпускника | <u>бакалавр</u> |
| Форма обучения | <u>очная</u> |

Программа одобрена
на заседании кафедры ВМ

протокол № 01 от 18.08.2021г.

Зав. кафедрой ВМ

к.ф.-м.н., доцент

_____ **В.П. Чернявский**

«__» _____ 2021г.

г. Саров, 2021г.

Программа переутверждена на 202____/202____ учебный год с изменениями в соответствии с семестровыми учебными планами академических групп ФИТЭ на 20____/20____ учебный год.

Заведующий кафедрой ВМ, к.ф-м.н, доцент

В.П. Чернявский

Программа переутверждена на 202____/202____ учебный год с изменениями в соответствии с семестровыми учебными планами академических групп ФИТЭ на 20____/20____ учебный год.

Заведующий кафедрой ВМ, к.ф-м.н, доцент

В.П. Чернявский

Программа переутверждена на 202____/202____ учебный год с изменениями в соответствии с семестровыми учебными планами академических групп ФИТЭ на 20____/20____ учебный год.

Заведующий кафедрой ВМ, к.ф-м.н, доцент

В.П. Чернявский

Программа переутверждена на 202____/202____ учебный год с изменениями в соответствии с семестровыми учебными планами академических групп ФИТЭ на 20____/20____ учебный год.

Заведующий кафедрой ВМ, к.ф-м.н, доцент

В.П. Чернявский

| Семестр | В форме практической подготовки | Трудоёмкость, кред. | Общий объем курса, час. | Лекции, час. | Практич. занятия, час. | Лаборат. работы, час. | СРС, час. | КР/КП | Форма(ы) контроля, экз./зач./ЗсО/ |
|----------------|--|----------------------------|--------------------------------|---------------------|-------------------------------|------------------------------|------------------|--------------|--|
| 1 | | 4 | 144 | 48 | 48 | 0 | 48 | - | ЗсО |
| 2 | | 4 | 144 | 32 | 32 | 0 | 44 | - | Экзамен |
| 3 | | 4 | 144 | 32 | 32 | 0 | 44 | - | Экзамен |
| ИТОГО | | 12 | 432 | 112 | 112 | 0 | 136 | - | 72 |

АННОТАЦИЯ

Дисциплина «Математический анализ» обеспечивает приобретение знаний и умений в соответствии с государственным образовательным стандартом, содействует получению фундаментального образования, формированию мировоззрения и развитию системного и логического мышления. Математический анализ служит решению задач обоснования математического и прикладного прогнозирования, которые, в свою очередь, используются при планировании и организации производства, при анализе технологических процессов, и для многих других целей. В последние годы методы математического анализа всё шире и шире проникают в различные области науки, техники и экономики, способствуя их прогрессу.

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, практические занятия, самостоятельная работа студента, консультации.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля: текущий контроль успеваемости в форме выполнения домашних и аудиторных работ, промежуточный контроль в форме выполнения аудиторных и домашних контрольных работ и итоговый контроль в форме экзамена (2 и 3 семестры). Самостоятельная работа студента проверяется на основе расчетно-графических работ (индивидуальных домашних заданий).

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Математический анализ является базовой и одной из важнейших и необходимых составных частей математики. В то же время сама история появления и развития этой дисциплины ставит её на совершенно особое место в ряду математических наук. Зародившись, как наука, пытающаяся создать теорию движения тел, непрерывно развиваясь и прогрессируя благодаря усилиям большого числа ученых, к настоящему времени она нашла применение как во многих теоретических дисциплинах, так и в важнейших прикладных дисциплинах. Методы математического анализа широко применяются в различных отраслях естествознания и техники: в теории механизмов, машиноведении, в теоретической физике, геодезии, астрономии, и во многих других теоретических и прикладных науках.

Целью преподавания дисциплины «Математический анализ» является: обеспечение фундаментальной подготовки в одной из важнейших областей современной математики; ознакомление с основами классического и элементами современного анализа; обучение общим методам, пригодных для решения задач в других математических дисциплинах и в практике; ознакомление с историей развития математического анализа и с вкладом российских ученых. Поэтому данный курс включает в себя изложение основополагающих разделов математического анализа, различных методов аналитических решений, которые формируют у студентов определенное комбинаторное мышление, дают навыки применения изученных математических методов.

Задачи дисциплины - обучение студентов основным методам решения задач математического анализа и их применению при изучении последующих курсов высшей математики: «Дифференциальные уравнения», «Уравнения математической физики», «Теория функций комплексного переменного», «Теория вероятностей и математическая статистика» и т.д., а также навыкам построения и решения практических задач на базе математического анализа.

Обучение дисциплине «Математический анализ» по кафедре ВМ рассчитано на 2 первых семестра.

Цели освоения учебной дисциплины.

В результате изучения дисциплины студенты должны

иметь представление:

- о значении математического анализа, его месте в системе фундаментальных наук и роли в решении практических задач;

- об истории развития и современных направлениях в математическом анализе;
- о методологических вопросах математического анализа.

В результате изучения дисциплины в первом семестре студенты должны

знать:

- Понятие последовательности и её основные свойства.
- Пределы последовательностей и функций (конечный и бесконечный).
- Основные теоремы о пределах последовательностей и функций.
- Непрерывность функций. Теоремы о непрерывных на отрезке функциях.
- Классификация точек разрыва.
- Производная, геометрический и физический смысл. Касательная и нормаль к кривой. Дифференциал.
- Основная таблица производных.
- Производная сложной функции, обратной функции и функций, заданных в неявном виде и параметрически.
- Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши.
- Правило Лопиталя.
- Формулы Тейлора и Маклорена в общем виде и применительно к основным элементарным функциям.
- Экстремумы, точки перегиба, асимптоты кривых, схема построения графиков..

уметь:

- Вычислять пределы последовательностей и функций.
- Классифицировать точки разрыва функций.
- Свободно вычислять производные элементарных функций, сложной функции, обратной функции и функций, заданных в неявном виде и параметрически.
- Применять правило Лопиталя вычисления пределов.
- Применять формулы Тейлора и Маклорена.
- Находить экстремумы функций, интервалы монотонности, точки перегиба, асимптоты.
- Строить графики функций.
- Ставить и решать практические задачи с помощью математического анализа.

В результате изучения дисциплины в втором семестре студенты должны

знать:

- Неопределённый интеграл, основные методы его вычисления.
- Вычисление неопределённого интеграла от рациональных функций, дробно-линейных и квадратичных иррациональностей, некоторых тригонометрических выражений.
- Определённый интеграл по Риману, запись и основные методы его вычисления.
- Критерий существования определённого интеграла по Риману.
- Формула Ньютона-Лейбница, условия её применимости.
- Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода, признаки сходимости. Понятие главного значения несобственного интеграла.
- Евклидовы пространства, неравенство Коши-Буняковского, неравенство «треугольника», расстояние между точками.
- Дифференцируемость функций нескольких переменных. Дифференциал. Дифференцируемость сложной функции.
- Производная по направлению, касательная плоскость, градиент.
- Формула Тейлора для функций нескольких переменных.
- Локальные экстремумы функций нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума. Условный экстремум.
- Свойства числовых рядов, области их сходимости, вычисление конечных сумм.

- Абсолютно и условно сходящиеся ряды.

уметь:

- Использовать методы вычисления неопределённых и определённых интегралов.
- Применять признаки сходимости несобственных интегралов.
- Находить частные производные различных порядков.
- Находить производную по направлению, градиент, касательную плоскость.
- Вычислять дифференциалы первого и высших порядков.
- Искать экстремумы функций многих переменных.
- Применять метод Лагранжа неопределённых коэффициентом при нахождении условного экстремума.
- Использовать полученные знания для решения физических задач.

В результате изучения дисциплины в третьем семестре студенты должны

знать:

- Свойства знакопеременных и знакопеременных рядов, вычисление конечных сумм.
- Свойства функциональных рядов, области их сходимостей, вычисление конечных сумм.
- Свойства степенных рядов, области их сходимостей, вычисление конечных сумм.
- Определение ряда Фурье, расчет его коэффициентов и применение.
- Интеграл Фурье, Фурье-преобразование.
- Применение рядов для практических и математических задач.
- Двойные и тройные интегралы, запись и вычисление.
- Криволинейные интегралы, запись и вычисление.
- Поверхностные интегралы, запись и вычисление.
- Элементы теории поля, виды физических полей и их классификацию
- Связь математической теории поля с набором реальных физических полей.

уметь:

- Исследовать на сходимость числовые и функциональные ряды.
- Находить ряды Фурье для 2π - и $2l$ - периодических функций и их область сходимости.
- Ставить и решать практические задачи с помощью математического анализа.
- Применять двойные и тройные интегралы для решения конкретных физических и технических задач.
- Применять криволинейные интегралы для решения конкретных физических и технических задач.
- Применять поверхностные интегралы для решения конкретных физических и технических задач.
- Работать с такими операторами как градиент, дивергенция, ротор, лапласиан, оператор Гамильтона.
- Использовать полученные знания для решения производственных физических задач.

Общие задачи можно сформулировать так:

- Формирование представления о месте и роли математики в современной науке, технике и производстве.
- Воспитание математической культуры.
- Развитие логического мышления и способности оперировать с абстрактными объектами, овладение техникой математических рассуждений и доказательств.

- Формирование первичных навыков научного исследования и самостоятельной работы.
- Освоение логических основ курса и подготовка к их использованию при изучении других математических, естественно-научных и специальных дисциплин, а так же в профессиональной деятельности.

2. МЕСТО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП ВО

Для успешного усвоения данной дисциплины необходимы математические **знания и умения** на уровне среднего образования, а именно:

- свободно оперировать с простыми дробями, целыми и дробными степенями, с формулами сокращенного умножения;
- свободно оперировать векторами;
- знать координатный метод на плоскости и в пространстве;
- оперировать понятиями многочлен и функция;
- знать основные элементарные функции.

Владеть навыками работы с вещественными числами, алгебраическими выражениями.

Дисциплина является предшествующей для таких дисциплин как « Дифференциальные уравнения», «Физика», «Теория вероятности и математическая статистика», «Теория функций комплексного переменного», «Уравнения математической физики».

3. ФОРМИРУЕМЫЕ КОМПЕТЕНЦИИ И ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

В результате освоения дисциплины у студента развиваются следующие общепрофессиональные компетенции:

| Код и наименование профессиональной компетенции | Код и наименование индикатора достижения профессиональной компетенции |
|---|---|
| ОПК-1 Способен применять естественно-научные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности. | З-ОПК-1 Знать: основы математики, физики, вычислительной техники и программирования У-ОПК-1 Уметь: решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования В-ОПК-1 Владеть: навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности |

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Структура учебной дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины за 1 семестр составляет 4 кредита ECTS, 144 часа.

| № п/п | Раздел учебной дисциплины (модуль) | Недели | Виды учебной деятельности, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах) | | | Текущий контроль успеваемости (неделя, форма) | Аттестация раздела (неделя, форма) | Максимальный балл за раздел * |
|-----------|---|------------------------|--|----------------|-----------|--|---|-------------------------------------|
| | | | Лекции | Практ. занятия | СРС | | | |
| 1 семестр | | | | | | | | |
| 1 | Введение. Предел последовательности. | 1-4 | 14 | 14 | 14 | 1 - 4 ДЗ ¹ , 1 - 4 УО ² | 3РГР ³ 1 4КР ⁴ 1 | 10 баллов |
| 2 | Предел функции. Непрерывность. | 4-8 | 12 | 12 | 12 | 4 - 8 ДЗ 4 - 8 УО | 7РГР ³ 2 7КР ⁴ 2 | 13 баллов |
| 3 | Дифференциальное исчисление. | 8-16 | 20 | 20 | 20 | 8 - 16 ДЗ, 8- 16 УО | 9КР 3 15КР 4 | 20 баллов |
| 4 | Первообразная, неопределенный интеграл. | 16 | 2 | 2 | 2 | 16 ДЗ, 16 УО | | 2 балла |
| | Посещаемость | | | | | | | 5 баллов |
| | ИТОГО | 16 | 48 | 48 | 48 | | | 144 час\ 50 баллов |
| | Промежуточная аттестация | Зачет с оценкой | | | | | 17 | 50 баллов |
| | Итого за 1 семестр: | | | | | | | 100 |

* 100 баллов за семестр, включая зачет или экзамен.

¹ДЗ – домашнее задание

² УО – устный опрос

³ РГР – расчётно-графическая работа

⁴КР – контрольная работа

Общая трудоемкость дисциплины за 2 семестр составляет 4 кредита ECTS, 144 часа.

| № п/п | Раздел учебной дисциплины (модуль) | Недели | Виды учебной деятельности, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах) | | | Текущий контроль успеваемости (неделя, форма) | Аттестация раздела (неделя, форма) | Максимальный балл за раздел * |
|-----------|--|--------|--|----------------|-----|---|------------------------------------|-------------------------------|
| | | | Лекции | Практ. занятия | СРС | | | |
| 2 семестр | | | | | | | | |
| 1 | Неопределенный интеграл от рациональных, иррациональных и тригонометрических функций | 1-3 | 6 | 10 | 14 | 1 - 5 ДЗ, 1 - 5 УО | 5РГР 1 5КР 1 | 13 баллов |

| | | | | | | | | |
|----|--|-------|-----------|-----------|-----------|------------------------|-------------------|-------------------------------|
| 2 | Определённый интеграл. Несобственные интегралы. | 4-8 | 10 | 10 | 10 | 6 - 8 ДЗ 6 - 8 УО | 10РГР 2 10КР 2 | 12 баллов |
| 3 | Функции нескольких переменных, их предел и непрерывность. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. | 9-14 | 12 | 6 | 14 | 9 - 15 ДЗ, 9- 15 УО | 13КР 3 | 12 балла |
| 4. | Числовые ряды. | 15-16 | 4 | 6 | 6 | 15-16 ДЗ, 15-16 УО | 15РГР 3 16КР 4 | 8 баллов |
| | Посещаемость | | | | | | | 5 баллов |
| | ИТОГО | 16 | 32 | 32 | 44 | | | 144 час\ 50 баллов |
| | Экзамен | | | | | | | 50 |
| | Итого за 2 семестр: | | | | | | | 100 |

Общая трудоемкость дисциплины за 3 семестр составляет 4 кредита ECTS, 144 часа.

| № п/п | Раздел учебной дисциплины (модуль) | Недели | Виды учебной деятельности, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах) | | | Текущий контроль успеваемости (неделя, форма) | Аттестация раздела (неделя, форма) | Максимальный балл за раздел * |
|-----------|---|--------|--|----------------|-----------|---|------------------------------------|-------------------------------|
| | | | Лекции | Практ. занятия | СРС | | | |
| 3 семестр | | | | | | | | |
| 1 | Знакопеременные и знакопеременные числовые ряды. Функциональные последовательности и ряды | 1-7 | 14 | 14 | 20 | 1 - 7 ДЗ 1 - 7 УО | 7КР 1 | 20 баллов |
| 2 | Кратные, криволинейные, поверхностные интегралы. Элементы теории поля | 8-16 | 18 | 18 | 24 | 8 - 16 ДЗ 8 - 16 УО | 12КР 2 15КР 3 | 25 баллов |
| | Посещаемость | | | | | | | 5 баллов |
| | ИТОГО | 16 | 32 | 32 | 44 | | | 144 час\ 50 баллов |
| | Экзамен | | | | | | | 50 |
| | Итого за 3 семестр: | | | | | | | 100 |

4.2. Содержание дисциплины, структурированное по разделам (темам)

Лекционный курс

1 семестр (4 модуля укладываются в 48 лекционных часов).

Раздел 1. Введение. Предел последовательности (модуль 1)

Лекция 1

Элементы теории множеств. Операции над множествами (пересечение, объединение, разность множеств). Некоторые понятия математической логики. Условие, заключение, отрицание. Кванторы, формальное построение отрицания с помощью кванторов.

Лекция 2

Действительные числа. Свойства действительных чисел. Рациональные и иррациональные числа. Отрезок, полуинтервал, интервал, окрестность точки. Внутренняя точка множества, открытые множества. Ограниченное множество.

Лекция 3

Понятие функции. Способы задания функции. Основные элементарные функции. Сложная функция. Элементарные функции. Последовательности. Арифметические действия с последовательностями.

Лекция 4

Сходящаяся последовательность. Предел последовательности. Ограниченность сходящейся последовательности. Единственность предела сходящейся последовательности.

Лекция 5

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их связь. Неограниченная последовательность. Свойства бесконечно малых. Представление сходящейся последовательности в виде суммы своего предела и бесконечно малой последовательности. Основные теоремы о пределах последовательностей.

Лекция 6

Точная верхняя и нижняя грани числового множества, их существование у непустого ограниченного множества. Сходимость монотонной ограниченной последовательности. Принцип вложенных отрезков.

Лекция 7

Подпоследовательности числовых последовательностей. Необходимое и достаточное условие сходимости всех подпоследовательностей данной последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Критерий Коши сходимости последовательности, фундаментальные последовательности.

Раздел 2. Предел функции. Непрерывность (модуль 2).

Лекция 8

Предел функции в точке (определения по Коши и Гейне). Эквивалентность двух определенных предела функции. Предел функции на бесконечности. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Обобщенное определение предела.

Лекция 9

Основные теоремы о пределах. Критерий Коши существования предела функции. Первый замечательные пределы.

Лекция 10

Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых (бесконечно малые одного порядка, разных порядков, эквивалентные бесконечно малые). Необходимое и достаточное условие эквивалентности бесконечно малых.

Лекция 11

Непрерывность функции в точке и на интервале. Локальные свойства непрерывных функций (непрерывность суммы, произведения, частного, сохранение знака, непрерывность сложной функции). Непрерывность элементарных функций.

Лекция 12

Левый и правый односторонние пределы. Условие непрерывности функции в точке. Непрерывность функции слева и справа. Классификация точек разрыва.

Лекция 13

Непрерывность функции на отрезке. Теорема Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции и о достижении ею своих точных граней на отрезке. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции.

Раздел 3. Дифференциальное исчисление (модуль 3).

Лекция 14

Производная. Односторонние производные. Уравнение касательной и нормали к графику функции, геометрический и физический смысл производной.

Лекция 15

Дифференцируемость функции. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью. Производная сложной и обратной функции Производные основных элементарных функций.

Лекция 16

Дифференциал, его свойства и геометрический смысл. Инвариантность формы первого дифференциала. Производная суммы, произведения и частного. Производные функций, заданных неявно и в параметрическом виде.

Лекция 17

Производные высших порядков. Функции класса C^k . Формула Лейбница. Дифференциалы высших порядков. Неинвариантность формы второго дифференциала.

Лекция 18

Локальный экстремум. Теорема Ферма. Теорема Ролля о нуле производной. Теорема Лагранжа о конечных приращениях. Теорема Коши о конечных приращениях.

Лекция 19

Правило Лопиталю раскрытия неопределенностей. Формула Тейлора.

Лекция 20

Остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано, Лагранжа, Коши. Формулы Маклорена для функций e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.

Лекция 21

Экстремумы функции. Необходимое условие экстремума. Связь между монотонностью и производной. Достаточные условия экстремума (исследование по первым и высшим производным).

Лекция 22

Выпуклость кривой, точки перегиба. Связь между знаком второй производной и направлением выпуклости. Необходимое условие перегиба. Достаточные условия существования точек перегиба.

Лекция 23

Асимптоты графика функций. Необходимые и достаточные условия существования наклонных асимптот. Схема исследования функции. Дифференцирование векторных функций скалярного аргумента.

Раздел 4. Первообразная, неопределенный интеграл (модуль 4)

Лекция 24

Первообразная. Связь между первообразными одной и той же функции. Неопределенный интеграл, его свойства. Таблица основных интегралов. Замена переменных и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

2 семестр (4 модуля укладываются в 32 лекционных часа).

Раздел 1. Неопределенный интеграл от рациональных, иррациональных и тригонометрических функций (модуль 1)

Лекция 1

Краткие сведения о комплексных числах: алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа. Формула Эйлера. Комплексно-сопряженные числа, их свойства. Извлечение корня n -ой степени из комплексного числа. Многочлены.

Лекции 2

Основная теорема алгебры. Разложение действительного многочлена на линейные и квадратичные множители. Разложение правильной дроби на простейшие. Интегрирование простейших и правильных дробей. Интегрирование рациональных функций.

Лекции 3

Интегрирование дробно-линейных и квадратичных иррациональностей, подстановки Эйлера. Интегрирование некоторых тригонометрических выражений.

Раздел 2. Определенный интеграл. Несобственные интегралы (модуль 2)

Лекция 4

Разбиение отрезка, характеристика разбиения. Интегральные суммы. Определение интегрируемой функции и определённого интеграла по Риману. Ограниченность интегрируемой функции.

Лекция 5

Геометрический смысл и основные свойства определенного интеграла. Теорема о среднем. Производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу.

Лекция 6

Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям и подстановкой в определённом интеграле. Критерий интегрируемости ограниченной функции. Интегрируемость: а) монотонных ограниченных; б) непрерывных; в) кусочно-непрерывных функций. Приложения определённого интеграла к вычислению длины дуги и площади.

Лекция 7

Несобственные интегралы первого и второго рода. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. Абсолютно и условно сходящиеся интегралы.

Лекция 8

Признаки сходимости несобственных интегралов от неотрицательных (положительных) функций. Признак сходимости Дирихле. Несобственные интегралы с несколькими особенностями. Главное значение несобственного интеграла.

Раздел 3. Функции нескольких переменных, их предел и непрерывность.

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных (модуль 3)

Лекция 9

Понятие метрического и координатного n -мерного пространства. Определение евклидова пространства. Расстояние в \mathbb{R}^n . Шаровые и кубические окрестности. Внутренняя точка множества. Открытые и замкнутые множества. Связное множество, замкнутая область. Ограниченное множество. Понятие функции нескольких переменных. Сходимость последовательности точек в \mathbb{R}^n . Теорема Больцано-Вейерштрасса в \mathbb{R}^n .

Лекция 10

Предел функции нескольких переменных в точке (по Гейне и Коши). Критерий Коши существования предела. Бесконечно большие функции. Предел функции на бесконечности. Основные теоремы о пределах функций. Непрерывность функции в точке, на множестве. Сумма, произведение и частное непрерывных функций. Устойчивость знака непрерывной функции,

имеющей отличное от нуля значение. Непрерывность сложной функции. Свойства функций, непрерывных на ограниченных замкнутых множествах.

Лекция 11

Частное приращение функции нескольких переменных. Частные производные (первого порядка). Дифференцируемые функции. Необходимые условия дифференцируемости функции. Достаточные условия дифференцируемости функции. Класс функций C^1 . Дифференциал, его свойства. Непрерывность дифференцируемых функций.

Лекция 12

Производная сложной функции. Производная по направлению. Понятие гладкой поверхности. Касательная плоскость, нормаль к поверхности. Градиент. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных.

Лекция 13

Частные производные различных порядков. Теорема о равенстве смешанных производных. Классы функций C^n . Инвариантность формы полного дифференциала первого порядка. Дифференциалы высших порядков. Неинвариантность дифференциалов высших порядков. Формула Тейлора.

Лекция 14

Локальные экстремумы функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Достаточные условия экстремума функции класса C^2 , критерий Сильвестра.

Раздел 4. Числовые ряды (модуль 4).

Лекция 15

Числовые ряды. Сумма ряда, сходящиеся и расходящиеся ряды. Ряд геометрической прогрессии. Гармонический ряд. Теоремы о сумме, разности сходящихся рядов. Теорема об умножении членов ряда на число, отбрасывание конечного числа членов ряда. Признаки сравнения рядов с неотрицательными (положительными) членами.

Лекция 16

Критерий Коши сходимости ряда. Необходимый признак сходимости. Признаки Даламбера и Коши сходимости рядов с положительными членами. Интегральный признак Коши сходимости ряда.

3 семестр (2 модуля укладываются в 32 лекционных часа).

Раздел 1. Знакопеременные и знакопеременные числовые ряды.

Функциональные последовательности и ряды (модуль 1).

Лекция 1

Знакопеременные ряды. Теорема Лейбница. Знакопеременные ряды. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Теоремы о перестановке членов абсолютно и условно сходящихся рядов.

Лекция 2

Сходящиеся функциональные последовательности и ряды. Критерий Коши сходимости функциональных последовательностей и рядов. Равномерно сходящиеся функциональные последовательности и ряды. Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда.

Лекция 3

Теорема о непрерывности суммы функционального ряда. Теоремы о дифференцировании и интегрировании функциональных рядов. Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал сходимости, радиус сходимости.

Лекция 4

Определение радиуса сходимости степенного ряда. Формула Коши-Адамара. Непрерывность суммы, дифференцирование и интегрирование степенного ряда на интервале сходимости. Ряды Тейлора и Маклорена.

Лекция 5

Необходимое и достаточное условие сходимости ряда Тейлора к функции $f(x)$. Разложение в ряд Маклорена функций e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.

Лекция 6

Тригонометрические ряды. Достаточное условие абсолютной и равномерной сходимости тригонометрического ряда. Ряд Фурье, коэффициенты ряда Фурье 2π -периодической функции. Достаточные условия сходимости ряда Фурье. Ряды Фурье для чётных и нечётных функций.

Лекция 7

Разложение в ряд Фурье по синусам (косинусам) кратных дуг. Разложение в ряд Фурье $2l$ -периодической функции. Ряд Фурье в комплексной форме. Интеграл Фурье.

Раздел 2. Кратные, криволинейные, поверхностные интегралы.

Элементы теории поля (модуль 2).

Лекция 8

Двойной интеграл, определение и основные свойства. Вычисление площади и объёма с помощью двойного интеграла.

Лекция 9

Сведение двойного интеграла к двукратному. Матрица Якоби системы функций, определитель Якоби. Замена переменных в двойном интеграле.

Лекция 10

Переход к полярной системе координат в двойном интеграле. Тройной интеграл, его вычисление. Вычисление объёма с помощью тройного интеграла.

Лекция 11

Замена переменных в тройном интеграле. Переход к цилиндрической и сферической системам координат в тройном интеграле.

Лекция 12

Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода, физический смысл. Сведение криволинейных интегралов к определённым.

Лекция 13

Вычисление площади плоской области с помощью криволинейного интеграла. Формулы Грина. Гладкие поверхности. Ориентация поверхности. Двусторонние и односторонние поверхности. Лист Мёбиуса.

Лекция 14

Поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода. Сведение поверхностных интегралов к двойным интегралам. Поток векторного поля через поверхность.

Лекция 15

Формулы Стокса и Гаусса-Остроградского. Дивергенция и ротор векторного поля. Инвариантная форма записи формул Стокса и Гаусса-Остроградского.

Лекция 16

Определение оператора Гамильтона. Дивергенция, градиент и ротор как действия оператора на различные векторные и скалярные поля.

Практические/семинарские занятия

1-й семестр

| № | Наименование раздела /темы дисциплины | (час) | Аудиторные (А) и домашние (Д) задания |
|---|--|-------|---|
| Раздел 1. Введение. Предел последовательности. | | | |
| 1.1 | Множество, число, функция. Свойства функций. Построение графиков элементарных функций. | 2 | А: [2]: №№ 3, 5, 11-21(неч.), 23 (а, д), 26,29 Д: [2]: №№ 6, 12-20(чётн.),23 (б, в, г),37,38 |
| 1.2 | Построение графиков элементарных функций. Числовая последовательность и её свойства. Предел числовой последовательности. | 2 | А: [2]: №№ 39 (а, г, д), 41, 42(а, б), 53, 54, 59, 60, 65, 86,89, 167. Д: [2]: №№ 39(б, в), 43(а, б), 101, 102, 129, 130; [3]: со стр. 7: задача 1(1, 2, 3) |
| 1.3 | Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Вычисление пределов числовых последовательностей. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$. | 2 | А: [2]: №№ 170-180, 220. Д: [3]: со стр. 7: задача 2 (1, 2, 3), задача 3 (1, 2, 3), задача 4 (1, 7, 15), задача 5(1, 2, 4). |

| | | | |
|---|--|---|---|
| 1.4 | Вычисление пределов числовых последовательностей. Техника раскрытия неопределенностей вида $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, 1^∞ . | 2 | А: [3]: со стр. 10: задача 5(1, 2, 3, 11), задача 6 (1, 2, 3, 16, 23) Д: [3]: со стр. 10: задача 5(4, 5, 7, 12, 30), задача 6 (4, 5, 11, 24, 30). |
| Раздел 2. Предел функции. Непрерывность. | | | |
| 2.1 | КР № 1 «Предел последовательности». Предел функции одной переменной. Виды неопределенностей и их раскрытие. | 2 | А: [2]: №№181 – 184, 187 – 190, 191,193. Д: [2]: №№ 185, 186, 193-198. |
| 2.2 | Первый замечательный предел и его следствия. | 2 | А: [2]: №№ 200, 203, 206, 213, 216 – 226 (чётн.). Д: [2]: №№ 201, 202, 204, 210, 214, 215, 217-225 (нечётн.). |
| 2.3 | Замечательные пределы, о-символика. | 2 | А: [2]: №№234, 253, 237, 239, 293. Д: [2]: №№ 235, 236, 238, 240+ под запись. |
| 2.4 | Вычисление пределов с помощью эквивалентных бесконечно малых. | 2 | А: [2]: №№296-299, 302; [3]: со стр. 15: задача 11 (1-5) Д: [3]: со стр. 15: задача 11 (6-17) |
| 2.5 | Второй замечательный предел | 2 | А: [2]: №№ 241-252, 253, 258,259, 261. Д: [3]: задача 18 (6-17) |
| 2.6 | Непрерывность функций. Классификация точек разрыва. | 2 | А: [2]: 313, 315, 316 (б, в, д), 317, 319, 320, 328, 330. Д: [2]: №№318, 321-323, 325-327. |
| 2.7 | КР №2 «Предел и непрерывность функции» | 2 | См. ФОС. |
| Раздел 3. Дифференциальное исчисление. | | | |
| 3.1 | Вычисление производной функции по определению. Табличное дифференцирование. Дифференциал функции. | 2 | А: [2]: №№ 358 (а,б), 363, 367(а), 368, 373, 374, 375, 379-389 (неч.), 721, 728, 741 (б). Д: [2]: №№ 358 (в,г), 364, 376, 390-400 (чётн.), 723, 728+ выучить таблицу производных |
| 3.2 | Производные сложных функций. | 2 | А: [2]: №№ 414, 420, 425, 426, 427, 430, 435, 440, 453, 454, 459,464,475. Д: [2]: №№ 441-452 |
| 3.3 | КР №3 «Вычисление производных сложных функций». | 2 | А: задания по карточкам (см. ФОС). Д: [2]: №№ 500-522 (чётн.) |
| 3.4 | Логарифмическая производная. Производные неявных функций и функций, заданных параметрически. | 2 | А: [2]: №№ 570, 572, 578, 585, 587, 591, 610, 615, 618. Д: [2]: №№571, 573, 577, 582, 583, 593, 603, 607, 608, 611. |
| 3.5 | Производные и дифференциалы высших порядков. | 2 | А: [2]: №№ 673, 675, 684, 685, 692, 696, 697, 748, 750 Д: [2]: №№ 667-672, 693, 710, 749. |
| 3.6 | Правило Лопиталья. | 2 | А: [2]: №№ 777, 780, 783, 784, 788, 789 Д: [2]: №№ 779, 781,782, 785, 786, 790 |

| | | | |
|--|--|-----------------|--|
| 3.7 | Формула Тейлора. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора. | 2 | []: №№791, 793, 796, 797, 798, 799, 804. Д: [2]: №№ 794, 795, 800-803, 809. |
| 3.8 | Экстремумы функций одного аргумента. | 2 | А: [2]: №№ 814, 816, 821, 825, 831, 854, Д: [2]: №№ 811, 815, 817, 823, 846, 849, 850, 853. |
| 3.9 | Направление вогнутости. Точки перегиба. Асимптоты. | | А: [2]: №№ 891, 894, 895, 898, 900, 901, 904 Д: [2]: №№ 892, 893, 896, 897, 902, 903. |
| 3.10 | Исследование функций и построение графиков. | 2 | []: №№ 901, 904, 906, 909, 910, 911, 913, 921, 927 А: [2]: №№ 906, 909, 910, 911, 913, 921, 927 Д: [2]: №№ 905, 907, 912, 919, 923. |
| 3.11 | Исследование функций и построение графиков. | 2 | А: [2]: №№ 934, 937, 942, 946, 951, 957 Д: [2]: №№ 924-929. |
| 3.12 | КР №4 «Производная функции и её приложения». | 2 | По карточкам (см. ФОС). |
| Раздел 4. Первообразная, неопределенный интеграл. | | | |
| 4.1 | Первообразная и неопределенный интеграл. Табличное интегрирование. Подведение функции под знак дифференциала | 2 | А: [2]: №№ 1032, 1040, 1043, 1047, 1050, 1052-1066 (четн.), 1082, 1084 Д: [2]: №№ 1039, 1042, 1044-1046, 1053- 1065 (нечетн.). |
| ИТОГО: | | 48 часов | |

2-й семестр

| № | Наименование раздела /темы дисциплины | (час) | Аудиторные (А) и домашние (Д) задания |
|--|---|-------|---|
| Раздел 1. Неопределённый интеграл | | | |
| 1.1 | Замена переменной и интегрирование по частям в неопределённом интеграле. | 2 | А: [2]: №№1191-1195, 1205, 1211, 1212, 1221, 1223 Д: [2]: №№ 1107-1109, 1123, 1201, 1202, 1215, 1217, 1224, 1227, 1228. |
| 1.2 | Интегрирование рациональных дробей. | 2 | А: [2]: №№ 1255, 1259, 1282, 1284, 1294, 1299 Д: [4]: РГР со стр. 47. Задания 1 - 3 (все три уровня), задания 4-5 (первый и второй уровень). |
| 1.3 | Интегрирование дробно-линейных и квадратичных иррациональностей. Интегрирование иррациональных функций. | 2 | А: [2]: №№ 1315-1325 (неч), 1333, 1336 Д: [2]: №№ 1316-1324 (чётн), 1332, 1334, 1335 |
| 1.4 | Интегрирование тригонометрических выражений | 2 | А: [2]: №№ 1339-1343 (неч.), 1365, 1367, 1371, 1373, 1378 Д: [5]: РГР №1 «Вычисление неопределённых интегралов» со стр. 47 (по вариантам): Задания 1 - 3 (все три уровня), задания 4-5 (первый и второй уровень). |
| 1.5 | КР №1 «Неопределённый интеграл» | 2 | Д[3]: РГР «Интегралы», инд. в-т №1-12 |

| Раздел 2. Определённый интеграл. Несобственные интегралы. | | | |
|---|--|----------------|--|
| 2.1 | Формула Ньютона-Лейбница. Основные методы вычисления определённого интеграла. | 2 | А: [2]: №№ 1521 – 1527 (неч), 1536, 1537, 1540, 1542, 1577, 1582, 1584, 1587, 1590 Д: [2]: №№ №№ 1522 – 1528 (неч), 1535, 1538, 1541, 1540, 1588, 1589, 1591-1594 |
| 2.2 | Интегрирование по частям и замена переменной в определённом интеграле. Геометрические приложения определённого интеграла. | 2 | А: [2]: №№ 1599 – 1601, 1623-1626, 1631, 1655, 1689. Д: [2]: №№ 1602-1604, 1627, 1628, 1632, 1636, 1638, 1665, 1667, 1685. |
| 2.3 | Вычисление несобственных интегралов | 2 | А: [2]: №№ 1546- 1558 (чётн), 1564, 1566 Д: [2]: №№ 1547-1565 (неч.) |
| 2.4 | КР №2 «Определённый и несобственный интегралы. Приложения определённых интегралов» | 2 | Д[3]: РГР «Интегралы», инд. в-т №14-17 |
| Раздел 3. Функции нескольких переменных, их предел и непрерывность. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. | | | |
| 3.1 | Пределы ФНП. Производные ФНП. Полный дифференциал ФНП. Дифференцирование сложных функций | 2 | А: [2]: 1801, 1802, 1804, 1821, 1833, 1837, 1839, 1851 (а, б), 1856- 1862 (чётн), 1874. Д: [2]: 1803, 1805, 1806, 1814, 1834, 1836, 1838, 1851 (в), 1857- 1863 (неч.), 1873. |
| 3.2 | Производная по направлению и градиент ФНП. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. | 2 | А: [2]: №№ 1876-80 (чётн), 1884, 1887, 1981. Д: [2]: №№ 1877, 1879, 1885, 1886, 1889, 1985, 1987. |
| 3.3 | Частные производные и дифференциалы высших порядков. Экстремум ФНП. | 2 | А: [2]: №№ 1892-1900 (чётн.), 1906, 1916, 1917, 2008-2012 (чётн.). Д: [2]: №№ 1891-1901 (неч.), 1907, 1924, 1925, 2009-2013(неч.). |
| 3.4 | КР №3 «Функции нескольких переменных» | 2 | А: по карточкам (см. ФОС) |
| Раздел 4. Числовые ряды. | | | |
| 4.1 | Числовой ряд, сумма ряда, его сходимость. Необходимый признак сходимости. Эталонные ряды. Признаки сравнения для рядов с положительными членами. | 2 | А: [2]: №№ 2401, 2404, 2409, 2411, 2414, 2416, 2423; [3]: раздел 6 «Ряды»: задачи 2.1-2.6; 3.1-3.5 Д: [2]: №№ 2402, 2403, 2405, 2412 [3]: раздел 6 «Ряды»: задачи 1.1, 1.30; 2.9, 2.10, 3.9-3.12. |
| 4.2 | Признаки сходимости Даламбера и Коши. Интегральный признак сходимости. | 2 | А: [2]: №№ 2427-2430, 2441, 2450-2456. Д: [3]: раздел VI «Ряды»: задачи 4.9-4.13; 5.18 -5.21, 6.1, 6.30. |
| 4.3 | КР №4 «Числовые ряды» | 2 | А: по карточкам (см. ФОС) |
| ИТОГО: | | 32 часа | |

3-й семестр

| № | Наименование раздела /темы дисциплины | (час) | Аудиторные (А) и домашние (Д) задания |
|---|---------------------------------------|-------|---------------------------------------|
|---|---------------------------------------|-------|---------------------------------------|

| Раздел 1. Знакопередающиеся и знакопеременные числовые ряды. Функциональные последовательности и ряды. | | | |
|---|--|---|---|
| 1.1 | Знакопеременные ряды. Признак сходимости Лейбница знакопередающихся рядов. Абсолютно и условно сходящиеся знакопеременные числовые ряды. | 2 | А: [3]: раздел 6 «Ряды»: задачи 7.1-7.6; 7.30, 7.31, 8.1 Д: [3]: раздел 6 «Ряды»: задачи 7.7-7.13, 8.2. |
| 1.2 | Сходимость функциональных и степенных рядов | 2 | А: [3]: раздел 6 «Ряды»: задачи 9.1, 9.2, 9.31, 10.5-10.8, 11.1 Д: [3]: раздел 6 «Ряды»: задачи 9.17, 9.27, 9.30, 10.1-10.4, 11.10 |
| 1.3 | Ряды Тейлора и Маклорена | 2 | А: [3]: раздел 6 «Ряды»: задачи 14.1-14.4; 14.18, 14.24. Д: [3]: раздел 6 «Ряды»: задачи 14.6-14.10; 14. 12. |
| 1.4 | Приложения степенных рядов | 2 | А: [2]: №№ 2642, 2644, 2648, 2654, 2657 Д: [3]: раздел 6 «Ряды»: задачи 15.1-15.5 |
| 1.5 | Ряд Фурье для 2π – периодических функций | 2 | А: [2]: 2671, 2672, 2674, 2679, 2657, 2696 Д: [2]: 2673, 2676, 2677, 2680. |
| 1.6 | Ряд Фурье чётных и нечётных функций. Ряд Фурье для $2l$ – периодических функций. Неполные ряды Фурье. | 2 | А: [2]: №№ 2681, 2685, 2686, 2699, 2702 Д: [2]: №№ 2692, 2695, 2698, 2701 |
| 1.7 | КР №1 «Знакопеременные и функциональные ряды» | 2 | А: по карточкам (см. ФОС) |
| Раздел 2. Кратные, криволинейные, поверхностные интегралы. Элементы теории поля. | | | |
| 2.1 | Вычисление двойных интегралов в декартовых координатах | 2 | А: [2]: №№ 2113, 2115, 2121, 2125, 2127, 2128, 2131, 2136, 2145. Д: [2]: №№ 2116, 2124, 2126, 2129, 2130, 2135 (а, б, в), 2145, 2150. |
| 2.2 | Замена переменных в двойном интеграле. Приложения двойного интеграла | 2 | А: [2]: №№ 2143, 2165, 2166, 2169, 2175 (а), 2180, 2182, 2188. Д: [3]: раздел 7 «Кратные интегралы»: задачи 6.1, 6.2, 6.31, 7.30, 7.31, 8.2, 8.28, 11.4. |
| 2.3 | Вычисление тройных интегралов в декартовых координатах. | 2 | А: [4]: Часть 3 (со стр. 118) №№ 3.6, 3.8, 3.12, 3.16, 3.18. Д: [4]: Часть 3 (со стр. 118) №№ 3.1, 3.3, 3.7, 3.9, 3.10, 3.11, 3.15. |
| 2.4 | Замена переменных в тройном интеграле. Приложения тройных интегралов. | 2 | А: [4]: Часть 3 (со стр. 120) №№ 5.1, 5.3, 5.5, 5.7, 6.1, 6.3; стр. 304, задача 4 (1,3,5). Д: [4]: Часть 3 (со стр. 120) №№ 5.2, 5.4, 5.6, 5.8, 6.2, 6.4; стр. 304, задача 1 (8, 10), задача 2 (13, 14), задача 4 (7, 30). |
| 2.5 | КР №2 по теме «Двойные и тройные интегралы» | 2 | А: по карточкам (см. ФОС) |
| 2.6 | Вычисление криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода | 2 | А: [2]: №№ 2294, 2297, 2301, 2312, 2314, 2323, 2326(б, в) Д: [2]: 2292, 2298, 2300, 2310, 2313, 2316, 2324, 2326(а, г) |

| | | | |
|-----|---|---|--|
| 2.7 | Вычисление поверхностных интегралов 1-го и 2-го рода | 2 | А: [2]: №№ 2348, 2350, 2351, 2352, 2354 Д: [2]: №№ 2347, 2349, 2353, 2355 |
| 2.8 | КР №3 по теме «Криволинейные и поверхностные интегралы» | 2 | А: по карточкам (см. ФОС) |
| 2.9 | Дивергенция, градиент и ротор как действия оператора набла на различные векторные и скалярные поля. | 2 | А: [2]: №№ 2375(а, в), 2377(а, в), 2381(а, в), 2384(а, в), 2383, 2385, 2389, 2400 Д: [2]: №№ 2375(б, г), 2377(б, г), 2381(б), 2382, 2384(б), 2387, 2397 |

5. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Фонд оценочных средств по дисциплине обеспечивает проверку освоения планируемых результатов обучения (компетенций и их индикаторов) посредством мероприятий текущего, рубежного и промежуточного контроля по дисциплине.

5.1. Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине

Связь между формируемыми компетенциями и формами контроля их освоения представлена в следующей таблице:

| Семестр 1 | | | | |
|--------------------------|--|-------------|---------------------------|--------------------------|
| № | Наименование раздела | Компетенция | Индикаторы освоения | Текущий контроль, неделя |
| 1 | Введение. Предел последовательности. | ОПК-1 | 3-ОПК-1, У-ОПК-1, В-ОПК-1 | УО*, 1-4 |
| Рубежный контроль | | ОПК-1 | 3-ОПК-1, У-ОПК-1, В-ОПК-1 | РГР 1, 3; КР 1, 4 |
| 2 | Предел функции. Непрерывность. | ОПК-1 | 3-ОПК-1, У-ОПК-1, В-ОПК-1 | УО, 4-8 |
| Рубежный контроль | | ОПК-1 | 3-ОПК-1, У-ОПК-1, В-ОПК-1 | РГР 2, 7; КР 2, 7 |
| 3 | Дифференциальное исчисление. | ОПК-1 | 3-ОПК-1, У-ОПК-1, В-ОПК-1 | УО, 8-16 |
| Рубежный контроль | | ОПК-1 | 3-ОПК-1, У-ОПК-1, В-ОПК-1 | КР 3, 9; КР 4, 15 |
| 4 | Первообразная, неопределённый интеграл | ОПК-1 | 3-ОПК-1, У-ОПК-1, В-ОПК-1 | УО, 16 |

| | | | |
|--------------------------|-------|---------------------------|------------------------|
| Итоговый контроль | ОПК-1 | 3-ОПК-1, У-ОПК-1, В-ОПК-1 | Зачёт с оценкой |
|--------------------------|-------|---------------------------|------------------------|

* УО – устный опрос, КР – контрольная работа, РГР – расчётно-графическая работа

| Семестр 2 | | | | |
|--------------------------|--|--------------------|----------------------------|---------------------------------|
| № | Наименование раздела | Компетенция | Индикаторы освоения | Текущий контроль, неделя |
| 1 | Неопределённый интеграл. | ОПК-1 | 3-ОПК-1, У-ОПК-1, В-ОПК-1 | УО, 1-5 |
| Рубежный контроль | | ОПК-1 | 3-ОПК-1, У-ОПК-1, В-ОПК-1 | РГР 1, 5; КР 1, 5 |
| 2 | Определённый интеграл. Несобственные интегралы. | ОПК-1 | 3-ОПК-1, У-ОПК-1, В-ОПК-1 | УО, 6-8 |
| Рубежный контроль | | ОПК-1 | 3-ОПК-1, У-ОПК-1, В-ОПК-1 | РГР 2, 10; КР 2, 10 |
| 3 | Функции нескольких переменных, их предел и непрерывность. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. | ОПК-1 | 3-ОПК-1, У-ОПК-1, В-ОПК-1 | УО, 9-15 |
| Рубежный контроль | | ОПК-1 | 3-ОПК-1, У-ОПК-1, В-ОПК-1 | КР 3, 13 |
| 4 | Числовые ряды. | ОПК-1 | 3-ОПК-1, У-ОПК-1, В-ОПК-1 | УО, 15-16 |
| Рубежный контроль | | ОПК-1 | 3-ОПК-1, У-ОПК-1, В-ОПК-1 | РГР 3, 15; КР 4, 16 |
| Итоговый контроль | | ОПК-1 | 3-ОПК-1, У-ОПК-1, В-ОПК-1 | Экзамен |

| Семестр 3 | | | | |
|------------------|---|--------------------|----------------------------|---------------------------------|
| № | Наименование раздела | Компетенция | Индикаторы освоения | Текущий контроль, неделя |
| 1 | Знакопеременные и знакопеременные ряды. Функциональные последовательности и ряды. | ОПК-1 | 3-ОПК-1, У-ОПК-1, В-ОПК-1 | УО, 1-7 |

| | | | | |
|---|--|-------|---------------------------|-----------------------|
| | Рубежный контроль | ОПК-1 | З-ОПК-1, У-ОПК-1, В-ОПК-1 | КР 1, 7 |
| 2 | Кратные, криволинейные, поверхностные интегралы. | ОПК-1 | З-ОПК-1, У-ОПК-1, В-ОПК-1 | УО, 8-15 |
| | Рубежный контроль | ОПК-1 | З-ОПК-1, У-ОПК-1, В-ОПК-1 | КР 2, 13; КР 3, 15 |
| 3 | Элементы теории поля. | ОПК-1 | З-ОПК-1, У-ОПК-1, В-ОПК-1 | УО, 16 |
| | Итоговый контроль | ОПК-1 | З-ОПК-1, У-ОПК-1, В-ОПК-1 | Экзамен |

5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Оценка успеваемости студентов осуществляется по результатам:

- самостоятельного выполнения домашних заданий;
- активной работы на лекциях и практических занятиях;
- решения задач на практических занятиях;
- выполнения контрольных работ;
- выполнения РГР по математическому анализу;
- сдачи экзамена.

Формы контроля.

Текущий контроль в основном проводится в форме:

- проверки домашних и тестовых заданий;
- опроса студентов на каждом практическом занятии;
- защиты РГР.

Рубежный контроль предполагает проведение коллоквиума и контрольных работ.

Итоговый контроль проводится на экзамене.

Фонд оценочных средств по дисциплине обеспечивает проверку освоения планируемых результатов обучения (компетенций и их индикаторов) посредством мероприятий текущего, рубежного и промежуточного контроля по дисциплине.

5.2.1. Контрольно-оценочные материалы для проведения текущего контроля

Средствами оценки текущей успеваемости студентов по ходу освоения модуля дисциплины являются:

Перечень вопросов, ответы на которые дают возможность студенту продемонстрировать, а преподавателю оценить степень усвоения теоретических и фактических знаний на ознакомительном уровне.

1-й семестр

- Что такое числовая последовательность?
- Дайте определение расходящейся последовательности.
- Какая последовательность называется неограниченной?
- Верно ли, что если последовательность расходится, то она стремится к бесконечности? Является неограниченной?
- Обязательно ли сходящаяся последовательность является ограниченной? Обязательно ли ограниченная последовательность является сходящейся?
- Сформулируйте теорему Больцано-Вейерштрасса.
- В радианах или градусах выражается x в первом замечательном пределе $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$?
- Как понимать неопределённость 1^∞ ?
- Дайте определение левого и правого пределов функции в точке.
- Какая связь между пределом функции и её левым и правым пределами?
- Что означает непрерывность функции в точке справа?
- Дайте определение разрыва первого рода.
- Когда разрыв первого рода называется устранимым и почему?
- Верно ли, что разрыв второго рода является бесконечным разрывом?
- Можно ли считать, что точная верхняя грань множества значений функции совпадает с максимальным значением функции?
- Сформулируйте теорему Вейерштрасса для непрерывных функций.
- Можно ли в условии теоремы Вейерштрасса заменить непрерывность функции на отрезке непрерывностью на интервале или даже полуинтервале?
- Можно ли в условии теоремы о промежуточных значениях функции заменить непрерывность функции на отрезке непрерывностью на интервале или даже полуинтервале?
- Сформулируйте условия применимости правила Лопиталья.
- Как продифференцировать функцию $f(x)^{g(x)}$?
- Как с помощью правила Лопиталья вычислять неопределённости $0 \cdot \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 ?
- Дайте определение локального максимума функции.
- Сформулируйте теорему Ферма. Сформулируйте необходимое условие экстремума.
- Как находить вертикальные асимптоты?
- Как находить наклонные асимптоты?
- Верно ли, что если в стационарной точке экстремума нет, то в этой точке – перегиб?

- Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – некоторые первообразные функции $f(x)$. Как связаны между собой $F_1(x)$ и $F_2(x)$?

2-й семестр

- Сколько различных значений имеет $\sqrt[4]{-1}$? Чему они равны?
- Дайте определение простейших дробей 1-го и 2-го рода.
- Можно ли разложить дробь $f(x)$ на простейшие дроби, если а) $f(x) = \frac{1}{(x^2 - 2x - 3)^2}$
б) $f(x) = \frac{1}{(x^2 - 2x + 3)^2}$?
- Может ли функция, интегрируемая по Риману на отрезке, быть на этом отрезке а) неограниченной б) разрывной?
- Может ли быть интегрируемой по Риману а) ограниченная б) неограниченная на отрезке функция?
- Сформулируйте предельный признак сходимости несобственных интегралов.
- Дайте определение главного значения несобственного интеграла (1-го и 2-го рода).
- Какой несобственный интеграл называется условно сходящимся?
- Дать определение сходимости последовательности точек в пространстве \mathbb{R}^n .
- Какое множество называется линейно-связным?
- Дайте определение замкнутой области.
- Сформулируйте теорему о равенстве смешанных производных.
- Дифференциал какого порядка функции многих переменных инвариантен относительно замены переменных?
- Скалярной или векторной величиной является производная скалярной функции в точке по направлению вектора?
- Какая формула связывает $\frac{\partial u}{\partial l}$ и $grad u$?
- Что такое нормаль к поверхности?
- В направлении какого вектора скалярная функция возрастает быстрее всего?
- Сформулируйте теорему о необходимых условиях локального экстремума дифференцируемой функции многих переменных.
- Сформулируйте теорему о достаточных условиях локального экстремума функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^2$.
- Что такое сумма ряда.
- Дайте определение расходящегося ряда.
- Сформулируйте необходимый признак сходимости ряда.

3 семестр

- В чем отличие знакопеременного ряда от знакочередующегося?

- Дайте определение абсолютно сходящегося ряда и условно сходящегося ряда.
- Сформулируйте признак Лейбница о сходимости знакочередующегося ряда.
- Дайте определение двойного интеграла как предела интегральных сумм.
- Сформулируйте теорему о сведении двойного интеграла к повторному.
- Сформулируйте теорему о замене переменных в двойном интеграле.
- Каковы формулы перехода от прямоугольных координат к а) полярным б) сферическим в) цилиндрическим координатам?
- Чему равен якобиан перехода от декартовых координат к полярным в двойном интеграле?
- Дайте определение тройного интеграла как предела интегральных сумм.
- Сформулируйте теорему о сведении тройного интеграла к повторному.
- Сформулируйте теорему о замене переменных в тройном интеграле.
- Каковы формулы вычисления площади плоской фигуры и объема тела с помощью кратных интегралов?
- Сформулируйте определение криволинейного интеграла первого рода.
- Формулы для вычисления криволинейного интеграла первого рода?
- Геометрические и физические приложения криволинейного интеграла первого рода?
- Формула связи между интегралами первого и второго рода.
- Формулу Грина и условия, при которых она справедлива.
- Сформулируйте условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования? Геометрические и физические приложения криволинейного интеграла второго рода.
- Какие способы задания поверхности вы знаете? Для каждого способа приведите пример.
- Сформулируйте определение поверхностного интеграла первого рода и теорему о вычислении его с помощью двойного интеграла для поверхности, заданной параметрически и явно.
- Формулы сведения поверхностного интеграла второго рода к двойному интегралу для поверхности, заданной параметрически и явно.
- Формулу Гаусса – Остроградского и условия, при которых она справедлива.
- Какие геометрические и физические приложения поверхностных интегралов вы знаете?

5.2.2. Контрольно-оценочные материалы для проведения рубежного контроля

Данный вид контроля производится на основе баллов, полученных студентом при выполнении контрольных работ.

Образцы вариантов аудиторных контрольных работ за 1 семестр.

Контрольная работа №1

Вариант 1

1. Доказать по определению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 2n}{1 - 3n} = -\frac{2}{3}; \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 4) = +\infty$$

2. Вычислить

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3 - n)^2 + (3 + n)^2}{(3 - n)^2 - (3 + n)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(\sqrt{n(n^4 - 1)} - \sqrt{n^5 - 8})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{\sqrt{9n^4 + 1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + 3}{n + 5}\right)^{4-n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8n^3 + 1}{n^3 - 1}\right)^{2n - n^3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - 1)! + 3(n + 1)!}{(n^2 + 4n)(n - 1)!}$$

Контрольная работа №2

Вариант 1

1. Дать определение

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$$

2. Вычислить

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{x^2 + \operatorname{tg}^3 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 3x}{\sin^2 7x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \ln(1 + \sqrt[3]{x}))^{\frac{1}{2\operatorname{tg} \sqrt[3]{x}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + x}{3 - x}\right)^{x+2}$$

3. Определить порядок малости величины

$$\alpha = 2\sin x^2 + o(3x^5) - \sqrt{2x}, x \rightarrow 0$$

Контрольная работа №3

Вариант 1

1. Исходя из определения производной, найти y' , если $y = \sqrt[5]{x} + 2$

2. Найти производные первого порядка

$$y = 2e^{-7x^7} + x^4 + \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$y = \ln(3\cos x + 6^x)$$

$$y = \frac{x^4 - 4x^2 + x}{15\sqrt{2 - 4x}}$$

$$y = (5x - 2)^5(2 - 5x)^6$$

$$y = \operatorname{ctg}^3(3^{-2x^3})$$

$$y = \arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^4}$$

$$y = \operatorname{ctg} \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} \frac{1}{5}$$

$$y = x^5 \log_2^4(1 + 5x)$$

Контрольная работа №4

Вариант 1

1. Найти касательную и нормаль к графику функции $y = 1 + \frac{3}{x^2}$ в точке $x_0 = 1$.

2. Найти y_{xx}'' , если $\begin{cases} x = t \cos 3t \\ y = \operatorname{arctg} 2t \end{cases}$

3. Найти интервалы возрастания, убывания и экстремумы функции $y = (x + 3)^3(1 - x)^2$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^6 + \frac{1}{4}x^3 + 1$ на отрезке $[-1, 1]$.

5. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции $y = \frac{1}{28}x^8 + \frac{1}{5}x^6 - \frac{2}{3}x^4$.

6. Вычислить приближенно с помощью дифференциала $\sqrt{15,8}$

7. Показать, что функция $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ удовлетворяет уравнению $xy' = (1 - x^2)y$

Образцы вариантов аудиторных контрольных работ за 2 семестр.

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. $\int (2e^{-x/3} + 3 \sin(4x) - \frac{3}{x^2}) dx$

2. $\int \frac{x dx}{4x^2+7}$
3. $\int \frac{x dx}{(x^2-5x+4)(x-3)}$
4. $\int \frac{(x-1) dx}{x^2+4x+8}$
5. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-\arctg^2 x}}$
6. $\int (2x+1)e^{-x} dx$
7. $\int \sin^2 x \cos x dx$
8. $\int \frac{dx}{9-8\sin^2 x}$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+x}}$

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. $\int_0^{\pi} 3x \sin x dx$
2. $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2} dx$
3. $\int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1+\ln(x-1) dx}{x-1}$
4. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:
 а) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ б) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x+8}$
5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
 $y = x^2 - 7x + 8, \quad y = x + 1$

Контрольная работа № 3

Вариант 1

1. Дана функция $z = (y^2 x + 2)^2$
 - 1.1. Найти частные производные первого и второго порядков, убедиться в равенстве смешанных производных;
 - 1.2. Найти второй дифференциал в точке $P(-1, 1)$;
 - 1.3. Найти производную в точке $M(1, 1)$ в направлении вектора $\vec{i}(1, 4)$;
 - 1.4. Найти угол между градиентами функции в точках $M(1, 1)$ и $P(-1, 1)$
2. Построить уравнение касательной плоскости к поверхности $z - x^2 - 2y^2 = 0$ параллельно плоскости $4x + 8y - 2z = 10$.
3. Найти z_{xy}'' , если $z = z(t, s), t = 2x - y, s = xy$.
4. Найти экстремумы функции $z = x^2 - (y-1)^2 + 8$.

5. Показать, что функция $z = \frac{y^2}{2x} + \arcsin(xy)$ удовлетворяет уравнению $x^2 z'_x - xyz'_y + y^2 = 0$.

Контрольная работа № 4

Вариант 1

Исследовать на сходимость

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+3n}} \sin \frac{1}{n+1}$
2. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(3n-1) \ln^2(4n-7)}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{2^n(3n+5)}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5} \right)^{n^2}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n+4}$
6. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)}$.

Образцы вариантов аудиторных контрольных работ за 3 семестр.

Контрольная работа № 1

Вариант 1

Исследовать на сходимость ряды

1. а) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln^2 n}{2^n}$ б) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (1+\frac{1}{n})^n}{\sqrt[3]{n+1}}$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[5]{n}}$
3. Найти область сходимости ряда
 - а) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}(x-2)^n}{n^2+1}$ б) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n(x^2-5x+10)^n}$.
4. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} nx}{n^2+x^2}$.
5. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ функцию $f(x) = \frac{7}{12-x-x^2}$.

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint_D f(x, y) dx dy$ в декартовой системе координат и в полярной системе координат по области D , ограниченной линиями $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4a^2$, $|x| - y \geq 0$, $x \leq 0$.
2. Записать повторный интеграл или сумму повторных интегралов в виде двойного и нарисовать множество интегрирования
 - а) $\int_{-1}^2 dx \int_{x^2-1}^{3+2x-x^2} f(x, y) dy$
 - б) $\int_0^{1/2} dy \int_{\sqrt{1-2y}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_{1/2}^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$.
3. Вычислить $\iint_D (1-y^2)^\alpha dx dy$ по области D , ограниченной линиями $y = \sqrt[3]{|x|}$, $y = 1$.
4. Записать интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ в виде повторного, где D ограничена линиями $y = ax^2$, $y = bx^2$, $xy = p$, $xy = q$, $0 < a < b$, $0 < p < q$ с помощью замены переменных в двойном интеграле.
5. Восстановить область интегрирования в $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$ по повторным интегралам $\int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^n f(x, y, z) dz$ и расставить пределы интегрирования в порядке $(z; y; x)$.

Контрольная работа № 3

Вариант 1

1. Вычислить $\int_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} dl$, $\Gamma: x^2 + y^2 = ax$.
2. Вычислить $\int_{\Gamma} x dy - y dx$; Γ – часть кривой $y = x^3$, $1 \leq x \leq 2$, пробегаемая в направлении возрастания параметра x .
3. Вычислить $\int_{\Gamma} xy^2 dx + x dy + (e^x + xy - 3y) dz$, $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25, (z < 0) \end{cases}$ пробегаемый по часовой стрелке, если смотреть из начала координат.
4. Найти поток поля $\vec{a} = \{x^2 y, -xy^2, x^2 + y^2\}$ через боковую поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, $0 \leq z \leq H$
5. Найти поток поля $\vec{a} = (0, yz^2, 0)$ через часть боковой поверхности конуса $x^2 + z^2 = y^2$, $0 \leq y \leq H$, $z \geq 0$.

5.2.3. Контрольно-оценочные материалы для проведения итогового контроля

Данный вид контроля производится на основе баллов, полученных студентом при сдаче экзамена.

Вопросы к экзамену

1-й семестр

Элементы теории множеств. Операции над множествами. Кванторы, отрицания. Действительные числа. Отрезок, полуинтервал, интервал, окрестность точки. Внутренняя точка множества, открытые множества. Ограниченное множество. Понятие функции. Способы задания функции. Основные элементарные функции. Сложная функция. Элементарные функции.

Последовательности. Арифметические действия с последовательностями. Сходящаяся последовательность. Предел последовательности. Ограниченные последовательности. Ограниченность сходящейся последовательности. Единственность предела сходящейся последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их связь. Неограниченная последовательность. Свойства бесконечно малых. Представление сходящейся последовательности в виде суммы своего предела и бесконечно малой последовательности. Основные теоремы о пределах последовательностей. Точная верхняя и точная нижняя грани множества. Сходимость монотонной ограниченной последовательности. Принцип вложенных отрезков. Подпоследовательности числовых последовательностей. Необходимое и достаточное условие сходимости всех подпоследовательностей данной последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Фундаментальные последовательности, критерий Коши сходимости последовательности.

Предел функции в точке (определения по Коши и Гейне), их эквивалентность. Предел функции на бесконечности. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Основные теоремы о пределах. Критерий Коши существования предела функции. Первый и второй замечательные пределы. Непрерывность функции в точке и на интервале. Непрерывность сложной функции. Непрерывность элементарных функций. Левый и правый односторонние пределы. Условие непрерывности функции в точке. Классификация точек разрыва. Непрерывность функции на отрезке. Свойства непрерывных на отрезке функций. Сравнение бесконечно малых (бесконечно малые одного порядка, разных порядков, эквивалентные бесконечно малые).

Производная. Геометрический и физический смысл производной. Производные основных элементарных функций. Дифференцируемость функции. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью. Производная суммы, произведения и частного. Производная сложной функции. Производная обратной функции и функций, заданных в параметрическом виде. Дифференциал и его свойства. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница. Теоремы о среднем значении (теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши). Правило Лопиталя (в точке и на бесконечности). Формула Тейлора. Остаточный член в форме Лагранжа, Коши и Пеано. Формулы Маклорена для функций e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.

Локальный экстремум. Необходимое условие экстремума. Связь между монотонностью и производной. Достаточные условия экстремума. Выпуклость кривой, точки перегиба. Связь между знаком второй производной и направлением выпуклости. Необходимое условие перегиба. Достаточные условия существования точек перегиба. Асимптоты графика функций. Необходимые и достаточные условия существования наклонных асимптот. Схема исследования функции.

Первообразная. Связь между первообразными одной и той же функции. Неопределенный интеграл, его свойства. Таблица основных интегралов.

2-й семестр

Первообразная. Связь между первообразными одной и той же функции. Неопределенный интеграл, его свойства. Таблица основных интегралов. Замена переменной и интегрирование по частям для неопределённого интеграла. Краткие сведения о комплексных числах: алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа. Формула Эйлера. Комплексно-сопряженные числа, их свойства. Извлечение корня n -ой степени из комплексного числа. Многочлены. Основная теорема алгебры. Разложение действительного

многочлена на линейные и квадратичные множители. Разложение правильной дроби на простейшие. Интегрирование простейших, правильных и неправильных дробей.

Определенный интеграл (по Риману) как предел интегральных сумм. Необходимое условие существования определенного интеграла. Геометрический смысл и основные свойства определенного интеграла. Теорема о среднем. Производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу. Формула Ньютона - Лейбница. Интегрирование по частям и подстановкой в определенном интеграле. Интегрируемость: а) монотонных ограниченных; б) непрерывных; в) кусочно - непрерывных функций.

Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла с единственной особенностью. Сходимость интегралов $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ и $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$. Абсолютно и

условно сходящиеся несобственные интегралы. Признаки сходимости несобственных интегралов от неотрицательных (положительных) функций. Несобственные интегралы с несколькими особенностями. Главное значение несобственного интеграла.

Функции нескольких переменных, основные понятия: расстояние между точками, окрестность, внутренняя точка множества, открытые и замкнутые области. Ограниченное множество. Понятие функции нескольких переменных. Предел функции в точке. Непрерывность функции в точке, на множестве. Сумма, произведение и частное непрерывных функций. Теоремы Вейерштрасса и Больцано-Коши для непрерывных функций.

Частное приращение функции нескольких переменных. Частные производные (1-го порядка). Полное приращение. Дифференцируемые функции. Дифференциал. Условия дифференцируемости функции. Непрерывность дифференцируемых функций. Производная сложной функции. Поверхности уровня, линии уровня. Производная по направлению. Касательная плоскость, нормаль к поверхности, градиент. Частные производные различных порядков. Теорема о равенстве смешанных производных. Классы функций C^k . Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора. Локальные экстремумы функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Стационарные точки. Достаточные условия экстремума функции класса C^2 , критерий Сильвестра.

Числовые ряды. Сумма ряда, сходящиеся и расходящиеся ряды. Ряд геометрической прогрессии. Гармонический ряд. Теоремы о сумме, разности сходящихся рядов, умножение ряда на число, отбрасывание конечного числа членов ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Необходимый признак сходимости. Признаки сравнения рядов с неотрицательными (положительными) членами. Признаки Даламбера и Коши сходимости рядов с положительными членами. Интегральный признак Коши сходимости ряда.

3-й семестр

Знакопеременные ряды. Теорема Лейбница. Знакопеременные ряды. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Теоремы о перестановке членов абсолютно и условно сходящихся рядов.

Сходящиеся функциональные последовательности и ряды. Критерий Коши сходимости функциональных последовательностей и рядов. Равномерно сходящиеся функциональные последовательности и ряды. Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда. Теорема о непрерывности суммы функционального ряда. Теоремы о дифференцировании и интегрировании функциональных рядов. Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал сходимости, радиус сходимости. Определение радиуса сходимости степенного ряда. Формула Коши-Адамара. Непрерывность суммы, дифференцирование и интегрирование степенного ряда на интервале сходимости. Ряды Тейлора и Маклорена. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда Тейлора к функции $f(x)$. Разложение в ряд Маклорена функций e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.

Тригонометрические ряды. Достаточное условие абсолютной и равномерной сходимости тригонометрического ряда. Ряд Фурье, коэффициенты ряда Фурье 2π -периодической функции. Достаточные условия сходимости ряда Фурье. Ряды Фурье для чётных и нечётных функций. Разложение в ряд Фурье по синусам (косинусам) кратных дуг. Разложение в ряд Фурье $2l$ -периодической функции. Ряд Фурье в комплексной форме. Интеграл Фурье.

Двойной интеграл, определение и основные свойства. Вычисление площади и объёма с помощью двойного интеграла. Сведение двойного интеграла к двукратному. Матрица Якоби системы функций, определитель Якоби. Замена переменных в двойном интеграле. Переход к полярной системе координат в двойном интеграле. Тройной интеграл, его вычисление. Вычисление объёма с помощью тройного интеграла. Замена переменных в тройном интеграле. Переход к цилиндрической и сферической системам координат в тройном интеграле.

Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода, физический смысл. Сведение криволинейных интегралов к определённым. Вычисление площади плоской области с помощью криволинейного интеграла. Формулы Грина. Гладкие поверхности. Ориентация поверхности. Двусторонние и односторонние поверхности. Лист Мёбиуса. Поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода. Сведение поверхностных интегралов к двойным интегралам. Поток векторного поля через поверхность. Формулы Стокса и Гаусса-Остроградского. Дивергенция и ротор векторного поля. Инвариантная форма записи формул Стокса и Гаусса-Остроградского.

Определение оператора Гамильтона. Дивергенция, градиент и ротор как действия оператора набла на различные векторные и скалярные поля.

5.3. Шкалы оценки образовательных достижений

Рейтинговая оценка знаний является интегральным показателем качества теоретических и практических знаний и навыков студентов по дисциплине и складывается из оценок, полученных в ходе текущего контроля и промежуточной аттестации.

Результаты текущего контроля и промежуточной аттестации подводятся по шкале балльно-рейтинговой системы.

Шкала каждого контрольного мероприятия лежит в пределах от 0 до установленного максимального балла включительно. Итоговая аттестация по дисциплине оценивается по 100-балльной шкале и представляет собой сумму баллов, заработанных студентом при выполнении заданий в рамках текущего и промежуточного контроля.

Итоговая оценка на экзамене выставляется в соответствии со следующей шкалой:

| Сумма баллов | Оценка по 4-ех балльной шкале | Оценка ECTS | Требования к уровню освоению учебной дисциплины |
|--------------|-------------------------------|-------------|---|
| 90-100 | 5 – «отлично» | A | Оценка «отлично» выставляется студенту, если он глубоко и прочно усвоил программный материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно его излагает, умеет тесно увязывать теорию с практикой, использует в ответе материал монографической литературы. |

| | | | |
|---------|---------------------------|---|---|
| 85-89 | 4 – «хорошо» | B | Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он твёрдо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос. |
| 75-84 | | C | |
| 70-74 | | D | |
| 65-69 | 3 – «удовлетворительно» | E | Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала. |
| 60-64 | | | |
| Ниже 60 | 2 – «неудовлетворительно» | F | Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки. Как правило, оценка «неудовлетворительно» ставится студентам, которые не могут продолжить обучение без дополнительных занятий по соответствующей дисциплине. |

6. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТАМ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Данные методические рекомендации направлены на реализацию самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине «Математический анализ». Самостоятельная работа студента является одним из основных методов приобретения и углубления знаний, познания общественной практики. Главной задачей самостоятельной работы является развитие общих и профессиональных компетенций, умений приобретать научные знания путем личных поисков, формирование активного интереса и вкуса к творческому самостоятельному подходу в учебной и практической работе.

Общая трудоемкость учебной нагрузки по дисциплине «Математический анализ» составляет 432 часа, из них объем самостоятельной работы по дисциплине – 104 часа и включает в себя:

- самостоятельное ознакомление с дополнительными материалами дисциплины, в том числе рекомендуемыми педагогом, направленное на более глубокое изучение тематических разделов, приобретение новых знаний и умений;
- конспектирование первоисточников (учебной литературы);
- работа в электронной библиотечной системе;
- изучение конспекта лекций при подготовке к практическим занятиям;
- самостоятельное выполнение во внеаудиторное время различного рода заданий, выданных преподавателем, при методическом руководстве последнего, но без его непосредственного участия;
- подготовку к промежуточной аттестации в форме итоговой оценки.

При осуществлении указанных видов самостоятельной работы студенты получают необходимые консультации педагога, в том числе с использованием Интернет-технологий.

Самостоятельная работа студентов, прежде всего, заключается в изучении литературы, дополняющей материал, излагаемый в лекционной части курса. Необходимо овладеть навы-

ками библиографического поиска, в том числе в сетевых Интернет-ресурсах, научиться сопоставлять различные точки зрения и определять методы исследований. Предполагается, что, прослушав лекцию, студент должен ознакомиться с рекомендованной литературой из основного списка, затем обратиться к источникам, указанным в библиографических списках изученных книг, осуществит поиск и критическую оценку материала на сайтах Интернет, соберет необходимую информацию.

Существует несколько методов работы с литературой. Один из них – метод повторения: смысл прочитанного текста можно заучить наизусть. Простое повторение воздействует на память механически и поверхностно. Полученные таким путем сведения легко забываются. Наиболее эффективный метод – метод осознанного запоминания: прочитанный текст нужно подвергнуть большей, чем простое заучивание, обработке. Чтобы основательно обработать информацию, важно произвести целый ряд мыслительных операций: прокомментировать новые данные; оценить их значение; поставить вопросы; сопоставить полученные сведения с ранее известными. Для улучшения обработки информации очень важно устанавливать осмысленные связи, структурировать новые сведения. Изучение научной, учебной и иной литературы требует ведения рабочих записей. Форма записей может быть весьма разнообразной: простой или развернутый план, тезисы, цитаты, конспект.

Организация учебной деятельности студента по видам учебных занятий представлена в таблице:

| Основные виды учебных занятий | Организация деятельности студента |
|--------------------------------------|---|
| Лекция | Написание конспекта лекций: кратко, схематично, последовательно фиксировать основные положения, выводы, формулировки, обобщения; отмечать важные мысли, выделять ключевые слова, термины. Обозначить вопросы, теоремы, понятия и термины, которые вызывают трудности в понимании. Попытаться разобраться с этими трудностями с помощью рекомендуемой литературы. Если самостоятельно не удаётся разобраться в материале, то необходимо обратиться с вопросом к преподавателю на практическом занятии или на текущей консультации. |
| Практическое занятие | Для успешной подготовки к практическому занятию студенту требуется предварительная проработка конспекта лекций и учебной литературы. Структура практического занятия включает в себя: вступительное слово преподавателя (тема, цель занятия), вопросы студентов, которые требуют дополнительных разъяснений, практическая часть (решение задач, обсуждение актуальных вопросов по теме занятия и т.п.); заключительное слово преподавателя (подведение итогов, выдача домашнего задания); рефлексия и самоанализ процесса и результата своей деятельности. |
| Контрольная работа | Контрольная работа выполняется студентом самостоятельно. Контрольная работа – одна из форм рубежного контроля в учебном процессе. Для успешного выполнения контрольной работы студент должен самостоятельно осуществить проработку соответствующих тем дисциплины. Выполнение контрольной работы осуществляется поэтапно: ознакомление с заданиями; письменное оформление работы; проверка вычислений. После получения проверенной контрольной работы, имеющей замечания, студент должен проанализировать свои ошибки, при необходимости обратившись за консультацией к преподавателю. |
| Тестирование | Для успешного выполнения теста студент должен самостоятельно осуществить проработку соответствующих тем дисциплины по конспектам лекций, основной и дополнительной литературе. Каждый студент отвечает на вопросы теста самостоятельно. После получения результатов тестирования, имеющего неправильные ответы, |

| |
|--|
| студент должен проанализировать свои ошибки, при необходимости обратившись за консультацией к преподавателю. |
|--|

УМК дисциплины «Математический анализ» предусмотрена самостоятельная работа студентов в объеме 52 часа в первом семестре и 52 часа – во втором . Самостоятельная работа проводится с целью углубления знаний по дисциплине и предусматривает следующий

Перечень форм и методов самостоятельной работы:

1-й семестр

| № | Формы и методы СРС | Содержание СРС | Кол-во часов | Сроки контроля (№ недели) |
|---------------|----------------------------------|--------------------|--------------|---------------------------|
| 1 | Выполнение домашних заданий | В течение семестра | 24 | еженедельно |
| 2 | Чтение конспекта лекций | В течение семестра | 10 | еженедельно |
| 3 | Подготовка к контрольным работам | см. п4 | 10 | 6, 10,13 |
| 4 | Выполнение РГР | см. п4 | 4 | 15, 16 |
| ИТОГО: | | | 48 | |

2-й семестр

| № | Формы и методы СРС | Содержание СРС | Кол-во часов | Сроки контроля (№ недели) |
|---------------|----------------------------------|--------------------|--------------|---------------------------|
| 1 | Выполнение домашних заданий | В течение семестра | 20 | еженедельно |
| 2 | Чтение конспекта лекций | В течение семестра | 10 | еженедельно |
| 3 | Подготовка к контрольным работам | см. п4 | 10 | 3, 9,15 |
| 4 | Выполнение РГР | см. п4 | 4 | 13, 14 |
| ИТОГО: | | | 44 | |

3-й семестр

| № | Формы и методы СРС | Содержание СРС | Кол-во часов | Сроки контроля (№ недели) |
|---|----------------------------------|--------------------|--------------|---------------------------|
| 1 | Выполнение домашних заданий | В течение семестра | 20 | еженедельно |
| 2 | Чтение конспекта лекций | В течение семестра | 10 | еженедельно |
| 3 | Подготовка к контрольным работам | см. п4 | 10 | 3, 9,15 |

| | | | | |
|---|----------------|--------|-----------|--------|
| 4 | Выполнение РГР | см. п4 | 4 | 13, 14 |
| | ИТОГО: | | 44 | |

Замечание: преподаватель, ведущий практические занятия, обязан ознакомить студентов с характером каждого вида самостоятельной работы.

6.1. Общий объем самостоятельной работы студентов поданной дисциплине включает две составляющие: текущую СРС и творческую проектно-ориентированную СР (ТСР).

6.1.1 Текущая СРС направлена на углубление и закрепление знаний студентов, развитие практических умений и представляет собой:

- работа с лекционным материалом, поиск и обзор литературы и электронных источников информации по индивидуально заданной проблеме курса;
- выполнение домашних заданий
- опережающая самостоятельная работа;
- изучение тем, вынесенных на самостоятельную проработку;
- подготовка к практическим и семинарским занятиям;
- подготовка к контрольной работе и коллоквиуму, к зачету, к экзамену

6.1.2 Творческая проектно-ориентированная самостоятельная работа (ТСР), ориентирована на развитие интеллектуальных умений, комплекса общекультурных и профессиональных компетенций, повышение творческого потенциала студентов и представляет собой:

- выполнение расчетно-графических работ;
- участие в научных студенческих конференциях, семинарах и олимпиадах;

6.2. Содержание самостоятельной работы студентов по дисциплине.

6.2.1. Темы индивидуальных заданий:

1. Производные и дифференциалы.
2. Правило Лопиталю.
3. Формула Тейлора.
4. Построение графиков функций.

6.2.2. Темы работ выносимые на самостоятельную проработку:

5. Множества, операции над множествами. Счетные и несчетные множества.
6. Верхний и нижний пределы последовательностей.
7. Критерий монотонности функции.
8. Локальная ограниченность непрерывных функций.
9. Асимптоты графика функции.

6.2.3. Образцы расчётно-графических работ.

1-й семестр

РГР 1

Вариант 1

Задание 1.

Найти производную $y^{(n)}(x)$ функции $y = \frac{1+x}{1-x}$.

Задание 2.

Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{\sin x - x}$.

Задание 3.

Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} - x)^{\frac{1}{x}}$.

Задание 4.

Построить график функции $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

2-й семестр

РГР 2

Вариант 1

Задание 1.

Найти производную функции $u = x^3 - 2y^2z$ в точке $A(1, -1, 2)$ по направлению вектора, образующего равные острые углы с осями координат.

Задание 2.

Вычислить приближенно: $\sqrt{9,01 + (2,97)^3}$.

Задание 3.

Показать, что функция $z = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}$ удовлетворяет данному уравнению

$$z = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}, \quad \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

Задание 4.

Найти второй дифференциал функции $z = \ln(x^2 + y)$, считая аргументы x и y независимыми.

Задание 5.

Для заданной поверхности $z - x^2 - 2y^2 = 0$ написать уравнение касательной к ней плоскости, параллельной данной плоскости $4x + 8y - 2z = 1$.

6.3. Контроль самостоятельной работы.

Контроль СРС студентов проводится путем проверки работ, предложенных для выполнения в качестве домашних заданий согласно разделу 6.2. Одним из основных видов контроля СРС является выполнение и защита расчётно-графических работ.

6.4. Учебно-методическое обеспечение для самостоятельной работы студентов

- Прокофьева Н.В. Материалы для подготовки к зачёту по дисциплине «Математический анализ» (1 семестр): Учебно-методическое пособие. – Саров: СарФТИ НИЯУ МИФИ, 2018.
- Чернявский В.П. «Применение формулы Тейлора к вычислению пределов»: Учебно-методическое пособие. – Саров: СарФТИ НИЯУ МИФИ, 2019.

в) Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Т.1.: Математический анализ в примерах и задачах: введение в анализ, производная, интеграл. – М.: Едиториал, УРСС, 2001.

7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Лекционные занятия проводятся очно (дистанционно при необходимости) в специально оснащённых аудиториях (с компьютером, экраном, проектором, интерактивной доской и подключенным интернетом) Практические занятия проводятся в специально оснащённых аудиториях (с компьютером, экраном, проектором, интерактивной доской и подключенным интернетом).

8. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Лекционные занятия проводятся с использованием презентаций, включены элементы беседы и постановка проблемных вопросов. Во время чтения лекции возможен свободный выход в Интернет с целью использования актуального материала на открытых образовательных ресурсах. Практическая часть курса сопровождается проведением очных семинаров с целью освоения и закрепления теоретической части курса. Лекции и семинары дополнены проведением контрольных мероприятий и необходимым количеством самостоятельных домашних работ, имеющих прикладной характер. Необходимые для более глубокого изучения курсов материалы в электронной форме размещены в свободном доступе на сайте СарФТИ НИЯУ МИФИ.

В учебном процессе применяются активные и интерактивные формы обучения. Они включают в себя методы, стимулирующие познавательную деятельность обучающихся и вовлекающие каждого участника в мыслительную и поведенческую активность

9. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ.

Основная литература

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление, т.1, кн.1, 2. – М.: Юрайт, 2020.
2. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов: учеб. пособие для студентов высших техн. учеб. заведений/ под ред. Б.П. Демидовича – М.: ООО «Изд-во Астрель», 2006.
3. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчёты: Учебное пособие. – СПб.: Лань, 2015.
4. Богомолова Е.П., Бараненков А.И., Петрушко И.М. Сборник задач и типовых расчётов по общему и специальным курсам высшей математики: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во «Лань», 2015.
5. Болотюк В.А. и др. Практикум и индивидуальные задания по интегральному исчислению функции одной переменной (типовые расчёты): учебное пособие. – СПб.: Лань, 2012.

6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. для вузов, т. 1, 2 – М.: Интеграл-Пресс, 2002.

Дополнительная литература

7. Математический анализ в вопросах и задачах: учеб. пособие / под ред. В.Ф. Бутузова – М.: Физико-математическая литература, 2001.
8. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, т.1, 2. – М.: Интеграл. 2002.
9. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Т.2.: Математический анализ в примерах и задачах: ряды, функции векторного аргумента. – М.: Едиториал, УРСС, 2003.
10. Власова Е.А. Ряды: учеб. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.
11. Курс высшей математики. Кратные интегралы. Векторный анализ. Лекции и практикум: Учеб. пособие/ под общ. ред. И.М. Петрушко – СПб.: Лань, 2016.
12. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике [в 2ч.]. Ч. 1, 2. – М.: Айрис-пресс, 2010.
13. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу: учеб. пособие - СПб., Москва, Краснодар: Лань, 2010.
14. Болотюк В.А. и др. Справочник по математике для бакалавров: учебное пособие/ А.Ю. Вдовин, Н.Л. Воронцова, Л.А. Золкина, В.М. Мухина,- СПб: Лань , 2014.

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы

1. <http://techlibrary.ru>
2. <http://univerty.ru/>
3. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/>

Программа дисциплины «Математический анализ» составлена в соответствии с требованиями ОС ВО по направлению подготовки (бакалавр) 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника».

Авторы:

Лебедева А.В., ст.преподаватель ВМ _____

Прокофьева Н.В., к.п.н., доцент ВМ _____

Чернявский В.П., к.ф.м.-н., доцент ВМ _____

Программа одобрена на заседании кафедры ВМ протокол № 01 от 18.08.2021г.