Алексеев В.В.

ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

Учебно-методическое пособие

СарФТИ НИЯУ МИФИ

Саровский физико-технический институт-
филиал Национального исследовательского
ядерного университета «МИФИ»

ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЭЛЕКТРОНИКИ
Кафедра вычислительной и информационной техники

Алексеев В.В.

ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

Учебно-методическое пособие

Саров
2019

УДК 510.6
Алексеев В.В. - кандидат физико-математических наук, доцент
Логика предикатов. Учебно-методическое пособие.

Данное пособие предназначено для студентов, изучающих математическую логику и теорию алгоритмов по направлениям подготовки «Информатика и вычислительная техника», «Информационные системы и технологии».

В пособии изложены основные положения логики предикатов, необходимые для построения различных логических и информационных систем, а также и для их применения в математической практике.

Предварительно приведены основные элементы алгебры высказываний, являющиеся базой для построения не только алгебры (логики) предикатов, но и различных других разделов математической логики.

В пособии рассмотрены примеры для практического закрепления изучаемого материала, а также приведены примеры для самостоятельной работы.

Рецензент: Николаев Дмитрий Борисович, д.т.н. РФЯЦ-ВНИИЭФ

Логика предикатов.

1. Элементы логики высказываний

Прежде чем перейти к изложению основных положений логики предикатов целесообразно вспомнить основные элементы алгебры (логики) высказываний, так как имеются существенное различие между логикой высказываний и логикой предикатов. Основными понятиями логики высказываний являются высказывания и логические связки (операции над высказываниями), а в логике предикатов кроме высказываний используются еще предикаты и кванторы.

Высказывание - повествовательное предложение, о котором можно сказать, что оно истинно или ложно (значение «И» или «Л» соответственно). Соединяя различные высказывания союзами "и", "или", "если..., то...", "не" (другими словами, используя различные логические операции), можно строить новые высказывания. Сложным (составным) высказыванием называется высказывание, составленное из простых с помощью логических связок. Об истинности полученных высказываний можно судить по истинности исходных высказываний.

Формализованный язык логики высказываний включает:

- **пропозициональные** переменные (высказывания), которые будем обозначать большими латинскими буквами (возможно с индексами) А, В,*С*...,
- **логические символы**: &, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$,$\equiv$, ~.
- **вспомогательные символы**: открывающаяся скобка (, закрывающаяся скобка), запятая.

В логике высказываний производятся следующие основные операции (логические связки): отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция. Они рассматриваются как средство вычисления логического значения сложного высказывания по логическим значениям составляющих его простых высказываний.

- **Конъюнкция:** ***A* & B** (читается " *A* и *B*"). Конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда истины оба высказывания *A* и *B*.
- **Дизъюнкция:** ***A*$\vee$B** (читается "*A* или *B*"). Дизъюнкция истинна тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний *A* или *B* . Другими словами, дизъюнкция ложна тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания *A* и *B* .
- **Импликация*:* *A* $\rightarrow$ B** (читается "если *A*, то *B*", или "*A* влечет *B*"). Импликация ложна тогда и только тогда, когда истинно *A* и ложно *B* .

- **Эквиваленция**: (эквивалентность, равнозначность) $\boldsymbol{A \equiv B}$ **(**или $\boldsymbol{A \sim B}$**)** (читается "A эквивалентно B", или "A тогда и только тогда, когда B") истинна тогда и только тогда, когда истинностные значения высказываний совпадают.
- **Отрицание:** $\overline{A}$ (читается "не A"). Отрицание истинно тогда и только тогда, когда исходное выказывание A ложно.

Следует отметить, что не существует единой, общепринятой символики. В нижеприведенной таблице приведены наиболее часто используемые символики алгебры высказываний:

Операция над высказыванием	**Символика**			
	Шредера-Пирса	Пеано-Рассела	Гиль-берта	Лукасе-вича
Отрицание (НЕ a)	a'	$\sim a$	$\overline{a}$	Na
Конъюнкция (a И b)	$a \cdot b$	$a \cdot b$	$a \& b$	Kab
Дизъюнкция (a ИЛИ b)	$a + b$	$a \vee b$	$a \vee b$	Aab
Импликация (ЕСЛИ a, ТО b)	$a \to b$	$a \subset b$	$a \cdot b$	Cab
Эквиваленция (a ЭКВИВАЛЕНТНО b)	$a \equiv b$	$a \equiv b$	$a \sim b$	Eab

Довольно часто используется смешанная символика, которая, как правило, вполне очевидна по контексту.

Также, высказывание, имеющее значение "истинно" часто обозначается как "1", а высказывание, имеющее значение "ложь" - как "0".

Важным понятием логики высказываний является понятие формулы логики высказываний, которая определяется следующим образом.

1. Любая пропозициональная переменная есть формула.

2. Если A, B формулы, то выражения $\neg$A (или $\overline{A}$), $A \& B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \equiv B$ (или $A \sim B$) есть формула.

Соглашение. При записи формул внешние скобки опускают. Кроме того, опускают некоторые внутренние скобки, считая, что & выполняется раньше $\vee$, которая выполняется раньше $\to$, т.е. для упрощения записи сложных высказываний используют правило приоритета связок: «$\neg$», «&», «$\vee$», «$\to$», «~», что позволяет получать более компактные выражения.

Введено понятие подформулы логики высказываний:

- Подформулой пропозициональной переменной является она сама;
- если формула имеет вид $\overline{A}$, то ее подформулами являются она сама, формула A и все подформулы формулы A;

- если формула имеет вид $(A\&B)$, $(A\vee B)$ или $(A\to B)$, то ее подформулами являются она сама, формулы A и B и все подформулы формул A и B.

Пример 1.1.

Выражение $((A\&B)\to(\overline{A\vee B}))$ является формулой. С учетом соглашения ее можно записать без скобок следующим образом: $A\&B\to\overline{A\vee B}$.

Подформулами указанной формулы являются A, B, $A\&B$, $A\vee B$, $\overline{A\vee B}$, $A\&B\to\overline{A\vee B}$.

Две формулы логики высказываний А и В называются *эквивалентными* (обозначается $A\equiv B$, или $A\sim B$, или часто $A=B$) если они принимают одинаковые значения при любых значениях входящих в них пропозициональных переменных, или, другими словами, если их таблицы истинности совпадают.

Приведем эквивалентные формулы (законы) алгебры высказываний.

1. $\overline{\overline{A}}=A$;
2. $A\&B=B\&A$;
3. $A\vee B=B\vee A$;
4. $A\vee(B\vee C)=(A\vee B)\vee C$;
5. $A\&(B\vee C)=A\&B\vee A\&C$;
6. $A\vee B\&C=(A\vee B)\&(A\vee C)$;
7. $\overline{A\&B}=\overline{A}\vee\overline{B}$;
8. $\overline{A\vee B}=\overline{A}\&\overline{B}$;
9. $A\to B=\overline{A}\vee B$;
10. $A\to B=\overline{B}\to\overline{A}$;
11. $A\&(A\vee B)=A$;
12. $A\vee A\&B=A$;
13. $A\&A=A$;
14. $A\vee A=A$;
15. $A\&\overline{A}=0$
16. $A\vee\overline{A}=1$;
17. $1\vee A=1$;
18. $0\vee A=A$;
19. $1\cdot A=A$;
20. $0\cdot A=0$.

Формула, принимающая значение «1» при всех значениях пропозициональных переменных называется тождественно истинной или **тавтологией,** а формула, принимающая значение «0» при всех значениях пропозициональных переменных называется **противоречием** (или невыполнимой).

Формула логики высказываний называется **выполнимой,** если она принимает значения истина хотя бы при одном наборе значений входящих в нее пропозициональных переменных.

Элементарной конъюнкцией называется произвольная конъюнкция пропозициональных переменных или их отрицаний.

Элементарной дизъюнкцией называется произвольная дизъюнкция пропозициональных переменных или их отрицаний.

Основные формы формул логики предикатов:

- ***Дизъюнктивной нормальной формой*** *(ДНФ)* называется произвольная дизъюнкция элементарных конъюнкций.
- ***Конъюнктивной нормальной формой*** *(КНФ)* называется произвольная конъюнкция элементарных дизъюнкций;
- ДНФ (КНФ) называется ***совершенной*** и обозначается *СДНФ (СКНФ),* если каждая переменная, входящая в нее, входит с отрицанием или без в каждую элементарную конъюнкцию (элементарную дизъюнкцию) ровно один раз. Для каждой формулы существуют эквивалентные ей ДНФ и КНФ.

Важное значение в логике высказываний является ***проблема разрешимости,*** которая заключается в следующем: существует ли алгоритм, позволяющий для произвольной логической формулы в конечное число шагов выяснить, является ли она тождественно истинной (или тождественно ложной)?

Вполне очевидно, что эта проблема имеет положительное решение, поскольку всегда можно перебрать все возможные наборы значений аргументов и вычислить на них значения заданной формулы (т.е. составить таблицу истинности). Но для больших формул эти таблицы громоздки и их использование затруднительно. Поэтому для установления тождественной истинности или ложности формул часто используют другую процедуру распознавания, связанную с приведением формулы к КНФ или ДНФ. В соответствии с этим имеют место следующие теоремы:

1. **Критерий тождественной истинности формулы**. Для того чтобы формула алгебры высказываний была тождественно истинной,

необходимо и достаточно, чтобы в равносильной ей КНФ были тождественно истинны все элементарные дизъюнкции.

2. **Критерий тождественной истинности элементарной дизъюнкции**. Для того чтобы элементарная дизъюнкция была тождественно истинной, необходимо и достаточно, чтобы в ней существовала хотя бы для одной переменной пара — переменная и ее отрицание.
3. **Критерий тождественной ложности формулы**. Для того чтобы формула алгебры высказываний была тождественно ложной, необходимо и достаточно, чтобы в равносильной ей ДНФ все элементарные конъюнкции были тождественно ложны.
4. **Критерий тождественной ложности элементарной конъюнкции**. Для того чтобы элементарная конъюнкция была тождественно ложной, необходимо и достаточно, чтобы в ней существовала хотя бы для одной переменной пара — переменная и ее отрицание.

Одним из важнейших практических применений алгебры высказываний является ее использование как базовой составляющей для построения и развития такого раздела математической логики как алгебра логики, являющейся теоретической базой разработки и проектирования функционально-логических устройств цифровой техники. Но не менее важное её использование сегодня - это моделирование «мыслительных» процессов, необходимых, например, для построения алгоритмов логического вывода в системах искусственного интеллекта и т.п. В силу того, что положения алгебры логики используются при изучении многих курсов инженерных направлений подготовки, и, как правило, читатель с ними знаком, то в рамках повторения рассмотрим несколько примеров применения алгебры высказываний (алгебры логики) для решения логических задач, а так же основные правила построения логических схем правильных «рассуждений» на ее базе.

Для решения логических задач, разнообразие которых очень велико и которые обычно, как правило, формулируются на естественном языке, не существует единого способа их решения, т.к. многие из них связаны с рассмотрением нескольких конечных множеств, сложных логических связей между ними и их элементами. Но тем не менее, аппарат алгебры высказываний позволяет построить некоторую общую структуру формального способа решения большого класса логических задач, которая может заключаться в следующей последовательности:

1. Формализовать условие задачи, т.е. обозначить простые высказывания задачи буквами;
2. Записать составные высказывания с использованием соответствующих логических связок;
3. Записать условие задачи используя язык алгебры высказываний;
4. Составить единое логическое выражение для всех требований задачи;
5. Используя законы алгебры высказываний, либо упростить полученное выражение и вычислить все его значения, либо построить таблицу истинности для рассматриваемого выражения, либо доказать истинность (ложность) некоторых утверждений методом рассуждений;
6. Выбрать решение - набор значений простых высказываний, при котором построенное логическое выражение является истинным;
7. Проверить, удовлетворяет ли полученное решение условию задачи.

Пример 1.2

Используя логические операции определить: кто из четырех студентов: A, B, C или D будет направлен для прохождения производственной практики на завод, если при их распределении необходимо учитывать следующие условия:

1. Если на завод будет направлен студент A, то туда же должен быть направлен и студент B;
2. Если не направлять на завод студента D, то туда же нельзя направлять студента B;
3. Неверно, что если на завод направляется студент C, то туда же направляется и студент D?

Решение.

Выполним формализацию задачи:

A - “на завод направляется студент A”;

B - “на завод направляется студент B ”;

C - “на завод направляется студент C ”;

D- “на завод направляется студент D ”.

В соответствии с условием задачи с помощью логических связок составляем следующие уравнения:

$$A \to B; \quad \overline{D} \to \overline{B}; \quad \overline{C \to D}.$$

Так как исходные высказывания принимаются истинными, то данные уравнения можно записать так:

$$A \to B = 1;$$
$$\overline{D} \to \overline{B} = 1;$$
$$\overline{C \to D} = 1.$$

Из третьего уравнения имеем, что $C \to D = 0$ или $\overline{C} \vee D = 0$ из которого следует, что $\overline{C} = 0$ и $D = 0$, а отсюда имеем, что $C = 1$. Преобразовывая второе уравнение, получаем: $D \vee \overline{B} = 1$. Так как $D = 0$, то получаем $\overline{B} = 1$, и, следовательно, $B = 0$. Аналогично, первое уравнение выразим в виде $\overline{A} \vee B = 1$, и тогда с учетом того, что $B = 0$, получаем $\overline{A} = 1$ или A=0. Итак, получили, что истинным при данных условиях будет только высказывание С. Следовательно, для прохождения производственной практики при заданных условиях на завод будет направлен студент С.

Другой метод решения этой задачи заключается в том, что в силу истинности высказываний их конъюнкция тоже будет истинной, т.е.

$(A \to B) \cdot (\overline{D} \to \overline{B}) \cdot \overline{(C \to D)} = 1.$

После простых преобразований получаем: $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D} = 1$ из которой следует, что A=0, B=0, C=1, D=0, что дает тот же однозначный ответ – на завод будет отправлен студент С.

Ответ: С.

Пример 1.3

Используя логические операции решите следующую задачу:

В институте был умышленно испорчен компьютер. Подозревают четырех студентов: A, B, C, D. При опросе каждый из них сделал три заявления:

Студент A:

1. Я не виноват (обозначим это высказывание как a_1);
2. Я не подходил к этому компьютеру – a_2;
3. D знает, кто испортил компьютер – a_3.

Студент B:

1. Компьютер испортил не я – b_1;
2. С D я не был знаком до поступления в институт – b_2;
3. Это сделал С – b_3.

Студент С:

1. Я не виноват – c_1;
2. Это сделал D – c_2;
3. В говорит неправду, утверждая, что я испортил компьютер – c_3.

Студент D:

1. Я не виноват – d_1;
2. Компьютер испортил A – d_2;
3. В может поручиться за меня, т.к. знает меня со дня рождения – d_3.

В дальнейшем все признали, что одно из трех заявлений является ложным. Кто из студентов умышленно испортил компьютер?

<u>Решение.</u>

Поскольку показания каждого студента являются в целом истинны только при условии, что два высказывания истины и одно ложно, то это можно описать с использованием элементарных логических функций следующим образом:

$$\begin{cases} A = a_1a_2\overline{a}_3 \vee a_1\overline{a}_2a_3 \vee \overline{a}_1a_2a_3; \\ B = b_1b_2\overline{b}_3 \vee b_1\overline{b}_2b_3 \vee \overline{b}_1b_2b_3; \\ C = c_1c_2\overline{c}c_3 \vee c_1\overline{c}_2c_3 \vee \overline{c}_1c_2c_3; \\ D = d_1d_2\overline{d}_3 \vee d_1\overline{d}_2d_3 \vee \overline{d}_1d_2d_3 \end{cases}$$

Для решения этой системы уравнений ее необходимо упростить, используя законы алгебры высказываний.

Рассмотрим третье уравнение. По условию $c_1=c_3$ и, следовательно, $\overline{c}_1 = \overline{c}_3$. Но так как $\overline{c}_1 \cdot c_1 = 0$, $c_1 \cdot c_1 = c_1$, то получаем $C = c_1 \cdot \overline{c}_2$. Это выражение истинно, если $c_1=1$ и $c_2=0$. Значит С не виноват и D тоже не виноват (высказывание c_2 ложно). Отсюда следует, что b_3 ложно, т.е. $b_3=0$ и тогда $\overline{b}_3=1$. Следовательно, $B= b_1b_2\overline{b}_3$, откуда следует $b_1=1$, $b_2=1$, т.е. B не виноват. Также видим, что b_2 противоположно d_3, т.е. $\overline{b}_2= d_3$. Значит D= $d_1d_2\overline{d}_3$. Это равенство истинно тогда, когда $d_1=1$ и $d_2=1$. Следовательно, компьютер испортил студент А.

Ответ: А.

Пример 1.4

Используя аппарат алгебры высказываний решите следующую задачу:

По обвинению в ограблении перед судом предстали Иванов, Петров, Сидоров. Следствием установлено:

1. Если Иванов не виновен или Петров виновен, то Сидоров виновен;
2. Если Иванов не виновен, то Сидоров не виновен.

Требуется определить, виновен ли Иванов?

<u>Решение.</u>

Введем обозначения простых высказываний:

A = «Иванов виновен»,

B = «Петров виновен»,

C = «Сидоров виновен».

На языке алгебры высказываний запишем условие задачи (факты, установленные следствием): 1. $(\overline{A} \vee B) \rightarrow C$ и 2. $\overline{A} \rightarrow \overline{C}$.

Так как установленные факты истины (выражения 1. и 2.), то их конъюнкция так же будет истинна, т.е. $\left((\overline{A}\vee B)\rightarrow C\right)\cdot\left(\overline{A}\rightarrow\overline{C}\right)=1$.
Преобразовав полученное выражение, получаем:

$$\left((\overline{A}\vee B)\rightarrow C\right)\cdot\left(\overline{A}\rightarrow\overline{C}\right)=(A\cdot\overline{B}\vee C)\cdot(A\vee\overline{C})=$$
$$=A\cdot\overline{B}\vee A\cdot C\vee A\cdot\overline{B}\cdot C=A\cdot(\overline{B}\vee C)=1,$$

которое будет истинно, если A будет истинно (и, конечно, $\overline{B}\vee C$ тоже истинно), т.е. A однозначно виновен. (Вопрос о виновности B и C не стоит).
Ответ: Иванов виновен.

Процесс получения новых высказываний из других высказываний с использованием логических операций над ними, называется *рассуждением* (или *умозаключением*). Исходные высказывания называются *посылками*, а получаемые высказывания — *заключением (следствием*). В логике высказываний рассуждения делятся на *дедуктивные* и *индуктивные*. В дедуктивных рассуждениях связи между посылками и заключением представляют собой формально-логические законы, в силу чего при истинных посылках заключение всегда оказывается истинным. В индуктивных рассуждениях между посылками и заключением имеют место такие связи, которые обеспечивают получение только правдоподобного заключения при истинных посылках. В этих рассуждениях посылки лишь подтверждают заключение. В процессе рассуждения иногда за дедуктивные принимают умозаключения, которые таковыми не являются. Последние называют неправильными, а (собственно) дедуктивные — правильными. Ниже приведены примеры наиболее часто используемых правил получения логически правильных умозаключений.

1. Утверждающий модус (modus ponens):

«Если из высказывания A следует высказывание B и справедливо (истинно) высказывание A, то справедливо B».
Логическая схема этого умозаключения такова:

$$\frac{A\rightarrow B, A}{B}.$$

2. Отрицающий модус (modus tollens):

«Если из A следует B, но высказывание B неверно, то неверно и высказывание A ».
Это правило обозначается как

$$\frac{A\rightarrow B,\overline{B}}{\overline{A}}.$$

3. Утверждающе-отрицающий модус (modus ponendo-tollens):

«Если справедливо либо высказывание A, либо высказывание B (в разделительном смысле) и истинно одно из них, то другое ложно».

$$\frac{A\oplus B, A}{\overline{B}};\qquad \frac{A\oplus B, B}{\overline{A}}.$$

4. Отрицающе-утверждающий модус (modus tollendo-ponens):

а) *«Если истинно либо A либо B (в разделительном смысле) и неверно одно из них, то истинно другое».*

$$\frac{A\oplus B, \overline{A}}{B};\qquad \frac{A\oplus B, \overline{B}}{A}.$$

б) *«Если истинно A или B (в неразделительном смысле) и неверно одно из них, то истинно другое».*

$$\frac{A\vee B, \overline{A}}{B};\qquad \frac{A\vee B, \overline{B}}{A}.$$

5. Правило транзитивности:

«Если из A следует B, а из B следует C, то из A следует C».

$$\frac{A\to B,\ B\to C}{A\to C}.$$

6. Закон противоречия:

«Если из A следует B, а также из A следует $\overline{B}$ то A неверно».

$$\frac{A\to B,\ A\to \overline{B}}{\overline{A}}.$$

7. Правило контрапозиции:

«Если из A следует B, то из того, что неверно B, следует, что неверно A».

$$\frac{A\to B}{\overline{B}\to \overline{A}}.$$

8. Сложная контрапозиция:

«Если из A и B следует C, то из A и $\overline{C}$ следует $\overline{B}$ ».

$$\frac{A\cdot B\to C}{A\cdot \overline{C}\to \overline{B}}.$$

9. Правило сечения:

«Если из A следует B, а из B и C следует D, то из A и C следует D».

$$\frac{A\to B,\ B\cdot C\to D}{A\cdot C\to D}.$$

10. Правило импортации (объединения посылок):

$$\frac{A\to (B\to C)}{A\cdot B\to C}.$$

11. Правило экспортации (разъединения посылок):

$$\frac{A\cdot B\to C}{A\to (B\to C)}.$$

12. Простые дилеммы:

12.1) $\dfrac{A \to C, B \to C, A \vee B}{C}$; 12.2) $\dfrac{A \to B, A \to C, \overline{B} \vee \overline{C}}{\overline{A}}$.

13. Сложные дилеммы:

13.1) $\dfrac{A \to B, C \to D, A \vee C}{B \vee D}$; 13.2) $\dfrac{A \to B, C \to D, \overline{B} \vee \overline{D}}{\overline{A} \vee \overline{C}}$.

Рассуждения, проводимые, например, по правилам:

$$\frac{A \to B, B}{A}, \quad \frac{A \to B, \overline{A}}{\overline{B}}, \quad \frac{A \vee B, B}{\overline{A}} \text{ и др.}$$

являются примерами неправильных умозаключений.

Рассмотрим несколько примеров на применение приведенных правил для оценки сделанных умозаключений (правильности рассуждений).

Пример 1.5

Проверить правильность рассуждения: "Если данный многоугольник правильный, то в него можно вписать окружность. Данный многоугольник правильный. Следовательно, в данный многоугольник можно вписать окружность".

Решение.

Для построения правила рассуждений формализуем задачу, т.е. введем обозначения высказываний:

X - данный многоугольник правильный;

Y- в данный многоугольник можно вписать окружность.

Тогда схема (правило) рассуждения запишется в виде:

$\dfrac{X \to Y, X}{Y}$ (modus ponens).

Данной схеме соответствует формула $(X \to Y) \cdot X \to Y$. Эта формула является тавтологией. Действительно

$$(X \to Y) \cdot X \to Y = (\overline{X} \vee Y) \cdot X \to Y = \overline{(\overline{X} \vee Y) \cdot X} \vee Y = \overline{\overline{X} \vee Y} \vee \overline{X} \vee Y =$$

$= X \cdot \overline{Y} \vee \overline{X} \vee Y = \overline{Y} \vee \overline{X} \vee Y = (\overline{Y} \vee Y) \vee \overline{X} = 1 \vee \overline{X} = 1.$ (Отметим, что при преобразовании формулы мы применили формулу вычеркивания $X \cdot \overline{Y} \vee \overline{X} = \overline{Y} \vee \overline{X}$ и свойство ассоциативности для дизъюнкции).

Т.к. в результате получили, что формула является тавтологией, то, следовательно, рассуждения являются правильными.

Ответ: Рассуждения правильные.

Пример 1.6

Проверить правильность рассуждения: “Если данный многоугольник правильный, то в него можно вписать окружность. В данный многоугольник нельзя вписать окружность. Следовательно, данный многоугольник не правильный”.

<u>Решение.</u>

Оставив прежние обозначения, получаем следующую схему рассуждения:

$\dfrac{X \to Y, \overline{Y}}{\overline{X}}$ (modus tollens), которой соответствует формула

$(X \to Y) \cdot \overline{Y} \to \overline{X}$, которая является также тавтологией, в чем можно убедиться построив таблицу истинности, или выполнив простые преобразования: $(X \to Y) \cdot \overline{Y} \to \overline{X} = \overline{(X \to Y) \cdot \overline{Y}} \vee \overline{X} = \overline{X \to Y} \vee \overline{\overline{Y}} \vee \overline{X} =$

$X \cdot \overline{Y} \vee Y \vee \overline{X} = X \vee Y \vee \overline{X} = (X \vee \overline{X}) \vee Y = 1 \vee Y = 1.$

Ответ: Рассуждения правильные.

Пример 1.7

Проверить правильность рассуждения: “Если данный многоугольник правильный, то в него можно вписать окружность. В данный многоугольник можно вписать окружность. Следовательно, данный многоугольник правильный”.

<u>Решение.</u>

При тех же обозначениях высказываний, что и в предыдущих случаях, схема рассуждения будет иметь вид:

$\dfrac{X \to Y, Y}{X}$, которой в этом случае будет соответствовать формула:

$(X \to Y) \cdot Y \to X$, и которая не является тавтологией. Действительно:

$(X \to Y) \cdot Y \to X = \overline{(X \to Y) \cdot Y} \vee X = \overline{X \to Y} \vee \overline{Y} \vee X = X \cdot \overline{Y} \vee \overline{Y} \vee X =$

$= \overline{Y} \cdot (X \vee 1) \vee X = \overline{Y} \cdot 1 \vee X = \overline{Y} \vee X \neq 1.$ Следовательно, рассуждения не являются правильными.

Ответ: Рассуждения неправльные.

Пример 1.8

Проверить правильность рассуждения: “Если число рациональное, то оно представимо в виде отношения двух целых чисел. Следовательно, если число не представимо в виде отношения двух целых чисел, то оно не является рациональным”.

Решение.

Введем обозначения высказываний:

X - число рациональное;

Y – число представимо в виде отношения двух целых чисел.

Запишем схему рассуждения в виде $\dfrac{X \to Y}{\overline{Y} \to \overline{X}}$ (правило контрапозиции).

Этому правилу соответствует формула $(X \to Y) \to (\overline{Y} \to \overline{X})$, которая является тавтологией (закон контрапозиции), и, следовательно, рассуждения правильные.

Ответ: Рассуждения правильные.

Пример 1.9

Проверить правильность рассуждения: "Если треугольник равнобедренный, то две его стороны равны. Если две стороны треугольника равны, то два угла его равны. Следовательно, если треугольник равнобедренный, то два угла его равны".

Решение.

Введем обозначения высказываний:

X – треугольник равнобедренный;

Y – две стороны равны;

Z – два угла равны.

Запишем схему рассуждений в виде:

$\dfrac{X \to Y, Y \to Z}{X \to Z}$, которая является правилом силлогизма, и, следовательно, соответствующая ей формула $(X \to Y) \cdot (Y \to Z) \to (X \to Z)$ является тавтологией, что определяет правильность рассуждений.

Ответ: Рассуждения правильные.

Пример 1.10

Проверить правильность рассуждения: "Если Иванов является участником этого преступления, то он знал потерпевшего. Иванов не знал потерпевшего, но знал его жену. Потерпевший знал Иванова. Следовательно, Иванов является участником этого преступления".

Решение.

Введем следующие обозначения высказываний:

A- Иванов является участником этого преступления;

B- Иванов знал потерпевшего;

C- Иванов знал жену потерпевшего;

D- Потерпевший знал Иванова.

Запишем схему рассуждений в виде:

$\dfrac{A \to B, \overline{B} \cdot C, D}{A}$. Этому рассуждению соответствует формула

$(A \to B) \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D \to A$. Выполнив преобразования получаем:

$(A \to B) \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D \to A. = \overline{(A \to B) \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D} \vee A = \overline{A \to B} \vee \overline{\overline{B} \cdot C} \vee \overline{D} \vee A =$

$A \cdot \overline{B} \vee B \vee \overline{C} \vee \overline{D} \vee A = A \vee B \vee \overline{C} \vee \overline{D} \neq 1$. Т.е. формула не равна тождественно единице (не является тавтологией) и, следовательно, рассуждения неверны.

Ответ: Рассуждения неправильные.

Алгебра высказываний является эффективным методом проверки правильности рассуждений. Рассуждение считается правильным, если между его посылками и заключением имеет место отношение логического следования, т.е. из посылок A_1, $A_2, \ldots, A_n$ следует заключение B, если импликация $A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_n$ является тождественно истинной.

Если формула, являющаяся переводом рассуждения на язык символов, оказывается тождественно истинной, то можно сделать вывод о том, что рассуждение правильное. Если эта формула является тождественно ложной, то рассуждение неправильное. Может оказаться, что формула является выполнимой, но не тождественно истинной. В этом случае нет оснований считать рассуждение правильным. Необходимо продолжить анализ рассуждения, но уже средствами более богатого раздела логики — средствами логики предикатов.

2.Понятие предиката.

В алгебре высказываний высказывания рассматриваются как нераздельные целые с точки зрения их истинности или ложности без рассмотрения структуры их использования в каком либо множестве (пространстве). Но в практике существуют задачи, использующие какие-либо заключения из определяющих их высказываний, значения которых зависят как от их содержания, так и от их структуры. Следовательно, алгебра высказываний недостаточна для анализа многих рассуждений и необходимо построить такую логическую систему, средствами которой можно было бы исследовать и структуру используемых и получаемых по законам алгебры высказываний. Такой системой является **логика предикатов**. **Предикат** (лат. praedicatum – сказанное) – то, что высказывается в суждении об объекте.

Предикат отображает наличие того или иного признака у предмета. Другими словами, предикаты — отображения произвольных множеств во множество высказываний.

Определение 2.1. Одноместным предикатом *P(x)* называется произвольная функция переменного *x*, определенная на множестве М и принимающая значения из множества {1, 0}, (т.е. {«И», «Л»}). Множество *M*, на котором определен предикат *P(x)* называется областью определения предиката.

Множество всех элементов $x \in M$ при которых принимает значение «истина», называется областью истинности предиката *P(x)*, т.е.

$$I_p = \{x \mid x \in M, P(x) = 1\}$$

Так, для предиката *P(x)*:"*x-четное число*", определенного на множестве натуральных чисел *N*, область истинности $I_P = \{x = 2n \mid, n \in N\}$.

Предикат *Q(x)*:"*sin x*=0" определен на множестве действительных чисел *R*, а его область истинности $I_Q = \{x = k\pi \mid, k \in Z\}$, где *Z* – множество целых чисел.

Предикат *F(x)*:"*диагонали параллелограмма x перпендикулярны*" определен на множестве всех параллелограммов, а областью его истинности является множество всех ромбов.

Определение 2.2. Предикат P(x), определенный на множестве *M*, называется тождественно истинным (тождественно ложным), если $I_P = M$, ($I_P = \varnothing$).

Определение 2.3. Двухместным предикатом *P(x,y)* называется функция двух переменных, определенная на множестве $M = M_1 \times M_2$ и принимающая значения из множества {1, 0}.

Примерами двухместных предикатов являются: *Q(x,y)*:"*x*>*y*", определенный на множестве $R = R \times R$, или предикат *F(x,y)*:"*x перпендикулярна y*" , определенный на множестве прямых, лежащих в заданной плоскости.

В общем случае аналогично определяется и *n*-местный предикат.

Определение 2.4. *n*-местным предикатом $P(x_1, x_2, \cdots x_n)$ называется функция n переменных, определенная на множестве $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ и принимающая значения из множества {1, 0}

Для *n*-местного предиката определим:

областью истинности I_P предиката $P(x_1, x_2, \cdots x_n)$, заданного на множествах $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ называется совокупность всех кортежей $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из *M*, таких, что $P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$.

Предикат $P(x_1,x_2,\cdots x_n)$, заданный на множествах M_1 , M_2 , ..., M_n называется:

а) тождественно истинным, если при любой подстановке вместо предметных переменных x_1 , x_2 , ..., x_n любых конкретных значений (предметов) a_1 , a_2 , ..., a_n из M_1 , M_2 , ..., M_n соответственно, он превращается в истинное высказывание $P(a_1 , a_2 , ..., a_n)= 1$;

б) тождественно ложным, если при любой подстановке вместо переменных x_1 , x_2 , ..., x_n любых конкретных предметов из множеств M_1 , M_2 , ..., M_n соответственно он превращается в ложное высказывание;

в) выполнимым (опровержимым), если существует по меньшей мере один набор конкретных предметов a_1 , a_2 , ..., a_n из множеств M_1 , M_2 , ..., M_n соответственно, при подстановке которых вместо соответствующих предметных переменных в предикат $P(x_1,x_2,\cdots x_n)$ последний превратится в истинное (ложное) высказывание $P(a_1 , a_2 , ..., a_n)$.

Предикаты P и Q определенные на одном множестве M, называются **равносильными** (P=Q), если $\forall(x_1,x_2.\cdots x_n)\in M = M_1\times M_2\times\cdots\times M_n$ $P(x_1,x_2,\cdots x_n)=Q(x_1,x_2,\cdots x_n)$

3.Операции над предикатами

Так как по определению предикаты принимают значения из области логических переменных {1, 0}, то к ним применимы все операции алгебры высказываний: конъюнкция, дизъюнкция, отрицание и импликация.

Для простоты изложения рассмотрим логические операции над одноместными предикатами, а далее сформулируем определения и для *n*-местных предикатов.

Пусть заданы два предиката $P(x)$ и $Q(x)$, заданные на множестве M.

Определение 3.1. Конъюнкцией предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $P(x)\&Q(x)$ определенный на этом множестве и который принимает значение «истина» при тех и только тех значениях $x\in M$, при которых и $P(x)$ и $Q(x)$ принимают значения «истина», т.е.

$$P(x)\&Q(x)=\text{"И"} \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)=1; \\ Q(x)=1. \end{cases}$$

В этом случае область истинности конъюнкции предикатов будет равна пересечению их областей истинности, т.е. $I_{P\&Q} = I_P \cap I_Q$.

Например, для предикатов $P(x)$:*"x-четное число"* и $Q(x)$:*"x-число, кратное 3"*, заданных на множестве N, область истинности их конъюнкции будет равна $I_{P\&Q}(x) = I_P \cap I_Q. = \{x = 6n \mid n\in N\}$.

Определение 3.2. Дизъюнкцией двух предикатов *P(x)* и *Q(x)* называется новый предикат $P(x) \vee Q(x)$ определенный на этом множестве и который принимает значение 0 при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых и *P(x)* и *Q(x)* принимают значения 0, и значение 1 во всех остальных случаях, т.е.

$$P(x) \vee Q(x) = \text{"Л"} \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0; \\ Q(x) = 0. \end{cases}$$

Вполне очевидно, что областью истинности объединения предикатов *P(x)* и *Q(x)* является область объединения их областей истинности, т.е. $I_{P \vee Q} = I_P \cup I_Q$.

Определение 3.3. Отрицанием предиката *P(x)* называется новый предикат $\overline{P(x)}$ определенный на этом множестве и который принимает значение 0 при тех значениях $x \in M$, при которых $P(x)$принимает значения 1, и наоборот – принимает значение 1, при которых $P(x)$ принимает значение 0, т. е .

$$\overline{P(x)} = \begin{cases} 0, \text{ если } P(x) = 1, \\ 1, \text{ если } P(x) = 0. \end{cases}$$

Из определения следует, что область истинности отрицания предиката будет равна разности области его определения и области истинности заданного предиката, $I_{\overline{P}} = M \setminus I_P$.

Определение 3.4. Импликацией предикатов *P(x)* и *Q(x)* называется новый предикат $P(x) \rightarrow Q(x)$ определенный на этом множестве и который принимает значение 0 при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых *P(x)* принимает значение 1 и *Q(x)* принимают значения 0, и значение 1 во всех остальных случаях, т.е.

$$P(x) \rightarrow Q(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 1; \\ Q(x) = 0. \end{cases}$$

Область истинности для импликации будет определяется из равносильности $P(x) \rightarrow Q(x) = \overline{P(x)} \vee Q(x)$, т.е. $I_{P \rightarrow Q} = I_{\overline{P}} \cup I_Q = M \setminus I_P \cup I_Q$.

Теперь, рассмотрев логические операции над одноместными предикатами, можно легко сформулировать и определения логических операций над *n*-местными предикатами.

Определение 3.5. Конъюнкцией *n*-местного предиката $P(x_1, x_2, \cdots x_n)$, определённого на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$ и m-местного предиката $Q(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, определённого на множествах $N_1, N_2, \ldots, N_m$ называется новый $(n+m)$-местный предикат, определённый на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n, N_1, N_2, \ldots, N_m$

обозначаемый $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ & $Q(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, который принимает значение 1 при тех и только тех значениях входящих в него предметных переменных, при которых и $P(x_1, x_2, \cdots x_n)$ и $Q(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ принимают значения 1, т.е.

$$\mathrm{P}(x_1, x_2 \cdots, x_n) \,\&\, \mathrm{Q}(y_1, y_2 \cdots, y_m) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x_1, x_2 \cdots, x_n) = 1; \\ Q(y_1, y_2 \cdots, y_m) = 1. \end{cases}$$

Следует заметить, что на практике наиболее чаще встречается конъюнкция n-местных предикатов, определенных на одной области, т.е.

$$\mathrm{P}(x_1, x_2 \cdots, x_n) \,\&\, \mathrm{Q}(x_1, x_2 \cdots, x_n) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x_1, x_2 \cdots, x_n) = 1; \\ Q(x_1, x_2 \cdots, x_n) = 1. \end{cases}$$

Конечно, этом случае область истинности конъюнкции предикатов будет определяться как $I_{P\&Q} = I_P \cap I_Q$.

Аналогично теперь можно определить и дизъюнкцию n-местных предикатов:

Определение 3.6. Дизъюнкцией n-местного предиката $P(x_1, x_2, \cdots x_n)$, определённого на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$ и m-местного предиката $Q(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, определённого на множествах $N_1, N_2, \ldots, N_m$ называется новый $(n+m)$-местный предикат, определённый на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n, N_1, N_2, \ldots, N_m$ обозначаемый $P(x_1, x_2 \cdots, x_n) \vee Q(y_1, y_2 \cdots, y_m)$, который принимает значение 0 при тех и только тех значениях входящих в него предметных переменных, при которых и $P(x_1, x_2, \cdots x_n)$ и $Q(y_1, y_2 \cdots, y_m)$ принимают значения 0, и значение 1 во всех остальных случаях, т.е.

$$\mathrm{P}(x_1, x_2 \cdots, x_n) \vee \mathrm{Q}(y_1, y_2 \cdots, y_m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x_1, x_2 \cdots, x_n) = 0; \\ \mathrm{Q}(y_1, y_2 \cdots, y_m) = 0. \end{cases}$$

Вполне очевидно, что в этом случае для дизъюнкции предикатов, имеющих одну область определения, будет справедливо:

$$\mathrm{P}(x_1, x_2 \cdots, x_n) \vee \mathrm{Q}(x_1, x_2 \cdots, x_n) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x_1, x_2 \cdots, x_n) = 0; \\ Q(x_1, x_2 \cdots, x_n) = 0. \end{cases} \quad \text{и} \quad I_{P \vee Q} = I_P \cup I_Q.$$

Определение 3.7. Импликацией n-местного предиката $P(x_1, x_2, \cdots x_n)$ и m-местного предиката $Q(y_1, y_2 \cdots, y_m)$ называется предикат, обозначаемый $P(x_1, x_2 \cdots, x_n) \to Q(y_1, y_2 \cdots, y_m)$ и который принимает значение 0 при тех и только тех значениях предметных переменных из области определение предиката P и предметных переменных из области определения предиката Q, при которых $P(x_1, x_2, \cdots x_n)$ принимает значение 1, а $Q(y_1, y_2 \cdots, y_m)$ принимают значения 0, и значение 1 во всех остальных случаях, т.е.

$$\mathrm{P}(x_1, x_2 \cdots, x_n) \to \mathrm{Q}(y_1, y_2 \cdots, y_m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x_1, x_2 \cdots, x_n) = 1; \\ \mathrm{Q}(y_1, y_2 \cdots, y_m) = 0. \end{cases}$$

Определение 3.8. Отрицанием *n*-местного предиката $P(x_1,x_2,\cdots x_n)$, определённого на множествах M_1, M_2, ..., M_n называется новый предикат $\overline{P(x_1,x_2,\cdots x_n)}$ определенный на этом же множестве и который принимает значение 0 при тех значениях предметных переменных из области определения предиката , при которых $P(x_1,x_2,\cdots x_n)$, принимает значения 1, и наоборот – принимает значение 1, при которых $P(x)$ принимает значение 0, т. е .

$$\overline{\mathrm{P}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2\cdots,\mathrm{x}_\mathrm{n})}=\begin{cases}0\text{, если } P(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2\cdots,\mathrm{x}_\mathrm{n})=1;\\ 1\text{, если } P(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2\cdots,\mathrm{x}_\mathrm{n})=0.\end{cases}$$

4. Кванторные операции

К одной из основных операций преобразования предикатов относится операция квантификации, для понятия которой рассмотрим ее применение к 1,2- местным предикатам и далее определим ее действие на любой *n*-местный предикат.

Пусть имеется предикат *P(x)* определенный на множестве *M*. Если “*a*” – некоторый элемент из множества *M*, то подстановка его вместо *x* в предикат *P(x)* превращает этот предикат в высказывание *P(a)*. Такое высказывание называют единичным. Например, для предиката *P(x)*:”*x-четное число*”, определенного на множестве натуральных чисел *N*, при *x*=5 получаем ложное высказывание *P*(5)=0 а при, например, *x*=8 получаем истинное высказывание *P*(8)=1.

Но получить единичное высказывание из 1-местного предиката можно еще и с помощью двух операций квантификации: **квантора всеобщности и квантора существования**.

Квантор всеобщности. Пусть *P(x)* – предикат, определенный на множестве *M*. Под выражением $\forall xP(x)$ понимают высказывание, истинное, когда *P(x)* истинно для каждого элемента *x* из множества *M*, и ложное в противном случае. Это высказывание уже не зависит от *x*. Это выражение читается так: “Для всякого *x* *P(x)* истинно ” или “Для любого *x* *P(x)* истинно”. Следует заметить, что при чтении выражения с кванторами необходимо, конечно, учитывать конкретику его приложения. Например, для вышеприведенного предиката *P(x)*: ”*x-четное число*”, определенного на множестве натуральных чисел *N*, выражение $\forall xP(x)$ будет читаться как “Любое натуральное число - четно ”, что конечно, является ложным высказыванием.

Символ $\forall$ называют **квантором всеобщности**. Переменную *x* в предикате *P(x)* называют свободной и ей можно придавать различные значения из *M*, а в высказывании $\forall x P(x)$ переменную *x* называют связанной квантором $\forall$.

Квантор существования. Пусть *P(x)* - предикат определенный на множестве *M.* Под выражением $\exists x P(x)$ понимают высказывание, которое является истинным, если существует элемент $x \in M$, для которого *P(x)* истинно, и ложным – в противном случае. Это высказывание уже не зависит от *x*. Соответствующее ему словесное выражение звучит так: "Существует *x*, при котором *P(x)* истинно." Символ $\exists$ называют **квантором существования**. В высказывании $\exists x P(x)$ переменная *x* связана квантором $\exists$.

Например, для вышеприведенного предиката *P(x) = "x-четное число"*, определенного на множестве натуральных чисел *N*, выражение $\exists x P(x)$ будет читаться как "Существует такое натуральное число *x*, что *x*- четно ", что конечно, истинным высказыванием.

Рассмотрим еще один пример с применением к заданному предикату. Пусть на множестве задан предикат *F(x):"число x-кратно 7"*. Используя кванторы можно получить два высказывания: $\forall x F(x)$ - "Все натуральные число кратны 7", что, естественно является ложным высказыванием, и $\exists x F(x)$ - "Существует натуральное число, кратное 7", что, конечно, является истинным высказыванием.

Из определения действия квантора всеобщности следует, что получаемое с помощью его высказывание $\forall x P(x)$ будет истинно только в том случае, когда *P(x)* – тождественно истинный предикат, а высказывание $\exists x P(x)$ ложно, когда *P(x)* – тождественно ложный предикат.

Пусть на конечном множестве $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ задан предикат *P(x)*. Если на этой области предикат является тождественно истинным, то для любого $a_i \in M \mid i = 1,2,\ldots n$ $P(a_i) = 1$, и тогда

$\forall x P(x) = P(a_1) \cdot P(a_2) \cdot \ldots \cdot P(a_n) = \underset{i=1}{\overset{n}{\&}} P(a_i) = 1,$ где «$\cdot$» - логическое «И».

Если же найдется такой $a_i \in M$, что $P(a_i) = 0$, то ложным будет и конъюнкция $\underset{i=1}{\overset{n}{\&}} P(a_i)$, и, следовательно, соответствующее ей высказывание $\forall x P(x)$. Следовательно, справедлива равносильность $\forall x P(x) = \underset{i=1}{\overset{n}{\&}} P(a_i)$.

Аналогично, согласно определению квантора существования, справедлива равносильность $\exists x P(x) = \bigvee_{i=1}^{n} P(a_i)$.

Вполне очевидно, что кванторные операции можно рассматривать как обобщение операций конъюнкции и дизъюнкции на случай бесконечных областей определения предиката.

Вполне логично рассмотреть теперь применение кванторов и к многоместным предикатам. Пусть, например, на множестве M задан двухместный предикат $P(x,y)$. Применение кванторной операции к предикату $P(x,y)$ по переменной x ставит в соответствие двухместному предикату $P(x,y)$ одноместный предикат $\forall x P(x,y)$ (или одноместный предикат $\exists x P(x,y)$), зависящий от переменной y и не зависящий от переменной x. К ним можно применить кванторные операции по переменной y, которые приведут уже к высказываниям следующих видов: $\forall y \forall x P(x,y)$, $\exists y \forall x P(x,y)$, $\forall y \exists x P(x,y)$, $\exists y \exists x P(x,y)$.

Следует отметить, что изменение порядка следования кванторов всеобщности и кванторов существование меняет смыл полученного высказывания. Рассмотрим, например, предикат $P(x,y)$: ”*y есть делитель x*”, определенный на множестве $N \times N$. Применяя кванторные операции к предикату $P(x,y)$ получаем высказывания:

1. $\forall y \forall x P(x,y)$ – «Для всякого y и всякого x y является делителем x»;
2. $\exists y \forall x P(x,y)$ – «Существует y, которое является делителем всякого x»;
3. $\forall y \exists x P(x,y)$ – «Для всякого y существует x такое, что x делится на y»;
4. $\exists y \exists x P(x,y)$ – «Существует y и существует x такие, что y есть делитель x»;
5. $\forall x \forall y P(x,y)$ – «Для всякого x и для всякого y y есть делитель x»;
6. $\forall x \exists y P(x,y)$ – «Для всякого x существует y такое, что y есть делитель x»;
7. $\exists x \exists y P(x,y)$ – «Существует x и существует y такие, что y есть делитель x»;
8. $\exists x \forall y P(x,y)$ – «Существует x такое, что для всякого y x делится на y».

Как видно, что полученные высказывания 1, 5, 8 ложны, а высказывания 2, 3, 4, 6, 7 истинны. Кроме того, изменение порядка следования кванторов (как, например, для высказываний 3 и 8), меняет логическое значение полученного высказывания.

Одноименные (одинаковые) кванторы переставлять можно, разноименные (двойственные) переставлять нельзя, т.е.

$$\forall x \forall y P(x,y) = \forall y \forall x P(x,y),$$

$$\exists x \exists y P(x,y) = \exists y \exists x P(x,y),$$

$$\exists x \forall y P(x,y) \neq \forall y \exists x P(x,y).$$

5. Формулы логики предикатов

Для формирования языка логики предикатов используются следующая символика:

1. Символы p, q, r, …- переменные высказывания, принимающие два значения: 1- истина , 0 – ложь;

2. Предметные переменные– x, y, z, … , которые пробегают значения из некоторого множества M;
3. Предметные константы x^0, y^0, z^0 ,…., т. е. значения предметных переменных;
4. $P(..)$, $Q(..)$, $F(..)$, … - одноместные предикатные переменные;
5. $P(..,..;\cdots,..)$, $R(..,..;\cdots,..)$–n-местные предикатные переменные;
6. $P^0(..)$, $R^0(..,..;\cdots,..)$ - символы постоянных предикатов;
7. Символы логических операций $\{\vee, \&\,(или\,\cdot), \rightarrow, ^{-}\}$
8. Символы кванторных операций $\{\forall x, \exists x.\}$
9. Вспомогательные символы: скобки, запятые.

Теперь в рамках формализованного языка логики предикатов можно определить формулу логики предикатов.

1. Каждое высказывание как переменное, так и постоянное, является формулой (элементарной).
2. Если $P(..,..;\cdots,..)$,– n-местная предикатная переменная или постоянный предикат, а x_1, x_2,…, x_n– предметные переменные или предметные постоянные (не обязательно все различные), то $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, есть формула. Такая формула называется элементарной, в ней предметные переменные являются свободными, не связанными кванторами.
3. Если A и B – формулы, причем, такие, что одна и та же предметная переменная не является в одной из них связанной, а в другой – свободной, то слова $A\vee B, A\cdot B, A\rightarrow B$ есть формулы. В этих формулах те переменные, которые в исходных формулах были свободны, являются свободными, а те, которые были связанными, являются связанными.
4. Если A – формула, то $\overline{A}$ – формула, и характер предметных переменных при переходе от формулы А к формуле $\overline{A}$ не меняется.
5. Если $A(x)$ – формула, в которую предметная переменная x входит свободно, то слова $\forall xA(x)$ и $\exists xA(x)$ являются формулами, причем, предметная переменная входит в них связанно.
6. Всякое слово, отличное от тех, которые приведены в пунктах 1 – 5, формулами не являются. .

Например, если Р(х) и $Q(x,y)$ – одноместный и двухместный предикаты, а q, r – переменные высказывания, то формулами будут, например, слова (выражения):

$$q,\ P(x),\quad P(x)\cdot Q(x^0,y),\quad \forall xP(x)\rightarrow\exists xQ(x,y),\quad \overline{(Q(x,y)}\vee q)\rightarrow r\,.$$

Например, выражение $\forall xQ(x,y) \rightarrow P(x)$ формулой логики предикатов не является - здесь нарушено условие п.3, так как формулу $\forall xQ(x,y)$ переменная x входит связанно, а в формулу $P(x)$ переменная входит свободно.

Важно отметить, что при записи формул алгебры предикатов принято соглашение: если один квантор находится в области действия другого квантора, то переменные, связанные этими кванторами, обозначаются различными буквами.

Определение 5.1. Формула называется замкнутой, если она не содержит свободных предметных переменных.

Например, формула $\forall x \forall y(P(x, y) \rightarrow P(y, x))$ – замкнутая формула..

Определение 5.2. Если формула алгебры предикатов $P(a_1,a_2,\cdots a_n)$ содержит свободные переменные $a_1,a_2,\cdots a_n$, то формула $\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n P(x_1,x_2,\cdots x_n)$ называется замыканием формулы $P(a_1,a_2,\cdots a_n)$.

Если теперь говорить о значении (логическом) формулы логики предикатов, то это возможно лишь тогда, когда задано множество M, на котором определены входящие в эту формулу предикаты. И тогда логическое значение формулы логики предикатов будет зависеть от значений трех видов переменных:

- ✓ значений входящих в формулу переменных высказываний;
- ✓ значений свободных предметных переменных из множества M;
- ✓ значений предикатных переменных.

Очевидно, что при конкретных значениях каждого из трех видов переменных формула логики предикатов становится высказыванием, принимающим истинное или ложное значение.

В качестве примера рассмотрим формулу $\exists y \forall z(P(x,y) \rightarrow P(y,z))$, в которой двухместный предикат $P(x,y)$ определен на множестве $N \times N$.

В заданную формулу входит переменный предикат $P(x,y)$, предметные переменные x, y, z, две из которых y и z – связанные кванторами, а x – свободная.

Возьмем за конкретное значение предиката $P(x,y)$ фиксированный предикат $P^0(x,y)$: “$x<y$”, а свободной переменной x придадим значение $x^0=5$ из области ее определения N. Тогда при значениях y, меньших $x^0=5$, предикат $P^0(x^0,y)$ принимает значение 0, а импликация $P(x,y) \rightarrow P(y,z)$ при всех $z \in N$ принимает значение 1, т.е. высказывание $\exists y \forall z(P^0(x,y) \rightarrow P^0(y,z))$ имеет значение 1.

Определение 5.3. Формула алгебры предикатов называется тождественно истинной, если она принимает значение 1 для всех множеств, для всех предикатов и для всех элементов.

Определение 5.4. Формула алгебры предикатов называется тождественно ложной, если она принимает значение 0 для всех множеств, для всех предикатов и для всех элементов.

Определение 5.5. Формула алгебры предикатов называется выполнимой, если она принимает значение 1 хотя бы для некоторых множеств, предикатов и элементов.

Определение 5.6. Формула алгебры предикатов называется опровержимой, если она принимает значение 0 хотя бы для некоторых множеств, предикатов и элементов.

Определение 5.7. Формула *A* сильнее формулы *B*, если всякий раз, когда формула *A* принимает истинное значение, формула *B* также истинное значение.

Например, $\forall x P(x) \Rightarrow \exists x P(x)$.

6. Равносильные формулы логики предикатов.

Определение 6.1. Две формулы логики предикатов *A* и *B* называются ***равносильными*** на области *M* (будем писать *A*=*B*), если они принимают одинаковые логические значения при всех значениях входящих в них переменных, отнесенных к области *M*.

Определение 6.2. Две формулы логики предикатов *A* и *B* называются равносильными, если они равносильны на всякой области.

Ясно, что все равносильности алгебры высказываний будут верны, если в них вместо переменных высказываний подставить формулы логики предикатов. Но, кроме того, имеют место равносильности самой логики предикатов.

Рассмотрим основные из этих равносильностей.

Пусть *A(x)* и *B(x)* – переменные предикаты, а *C* – переменное высказывание (или формула, не содержащая *x*). Тогда имеют место равносильности:

1. $\overline{\forall x A(x)} = \exists x \overline{A(x)}$.
2. $\overline{\exists x A(x)} = \forall x \overline{A(x)}$.
3. $\forall x A(x) = \overline{\exists x \overline{A(x)}}$.
4. $\exists x A(x) = \overline{\forall x \overline{A(x)}}$.
5. $\forall x A(x) \& \forall x B(x) = \forall x [A(x) \& B(x)]$

6. $C \& \forall x B(x) = \forall x[C \& B(x)]$.
7. $C \vee \forall x B(x) = \forall x[C \vee B(x)]$
8. $C \to \forall x B(x) = \forall x[C \to B(x)]$
9. $\forall x[B(x) \to C] = \exists x B(x) \to C$.
10. $\exists x[A(x) \vee B(x)] = \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$.
11. $\exists x[C \vee B(x)] = C \vee \exists x B(x)$.
12. $\exists x[C \& B(x)] = C \& \exists x B(x)$.
13. $\exists x A(x) \& \exists y B(y) = \exists x \exists y[A(x) \& B(y)]$.
14. $\exists x[C \to B(x)] = C \to \exists x B(x)$.
15. $\exists x[B(x) \to C] = \forall x B(x) \to C$.

Равносильность 1 означает тот простой факт, что, если не для всех x истинно *A(x)*, то существует *x*, при котором будет истиной $\overline{A}(x)$.

Равносильность 2 означает тот простой факт, что, если не существует *x*, при котором истинно *A(x)*, то для всех *x* будет истиной $\overline{A}(x)$.

Равносильности 3 и 4 получаются из равносильностей 1 и 2, соответственно, если от обеих их частей взять отрицания и воспользоваться законом двойного отрицания.

Важно отметить, что формула $\forall x[A(x) \vee B(x)]$ не равносильна формуле $\forall x A(x) \vee \forall x B(x)$, т.е. квантор всеобщности не разбивается по дизъюнкции: $\forall x[A(x) \vee B(x)] \neq \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$.

Пример 6.1. Пусть на множестве натуральных чисел *N* определены предикаты $P(x)$:*"x-четное число"* и $R(x)$:*"x-нечетное число"*. Тогда формула $\forall x[P(x) \vee R(x)] = 1$, а формула $\forall x P(x) \vee \forall x R(x) = 0$.

Аналогично формула $\exists x[A(x) \& B(x)]$ не равносильна формуле $\exists x A(x) \& \exists x B(x)$, т.е. квантор существования не разбивается по конъюнкции: $\exists x[A(x) \& B(x)] \neq \exists x A(x) \& \exists x B(x)$.

Пример 6.2. Пусть на множестве действительных чисел R определены предикаты: $P(x)$:*"x-рациональное число "* и $R(x)$:*"x-иррациональное число"*. Тогда формула $\exists x[A(x) \& B(x)] = 0$, а формула $\exists x A(x) \& \exists x B(x) = 1$, т.е. действительно равносильность несправедлива.

Как было уже замечено выше – перестановка разных кванторов меняет смысл предиката, а, значит, меняет и значение соответствующей ему формулы.

Пример 6.3. Пусть на множестве натуральных чисел *N* задан предикат

$$P(x,y): \text{"} x \vdots y \text{"}.$$

Тогда формула $\exists x \forall y P(x,y) = 0$, а формула $\forall y \exists x P(x,y) = 1$.

7. Доказательство равносильностей формул в алгебре предикатов

В логике предикатов используются те же способы доказательства равносильностей, что и в алгебре высказываний. Наиболее приемлемым является способ допущений, суть которого заключается в следующем:

Чтобы доказать, что две формулы логики предикатов A и B равносильны, достаточно сперва предположить, что формула A принимает значение 1 (0) и доказать, что формула B также принимает значение 1 (0). Затем полагаем, что формула B имеет значение 1 (0) и доказываем, что и формула A имеет значение 1 (0).

Пример 7.1. Доказать равносильность $\overline{\forall xP(x)} = \exists x\overline{P(x)}$.

1. Полагаем, что $\overline{\forall xP(x)} = 1$. Тогда $\forall xP(x)=0$ а, следовательно, существует такое a, что $P(a) = 0$, то есть существует такое a, что $\overline{P(a)} = 1$, а значит $\exists x\overline{P(x)} = 1$.

2. Полагаем теперь, что $\exists x\overline{P(x)} = 1$. Тогда существует такое a, что $\overline{P(a)} = 1$, то есть существует такое a, что $P(a) = 0$. Следовательно, $\forall xP(x) = 0$, а значит $\overline{\forall xP(x)} = 1$.

Пример 7.2. Доказать равносильность $\exists xP(x) \vee C = \exists x(P(x) \vee C)$.

1. Полагаем, что $\exists xP(x) \vee C = 0$. Тогда $\exists xP(x) = 0$ и $C = 0$. То есть для любого a $P(a) = 0$ и $C = 0$. Следовательно, для любого a $P(a) \vee C = 0$, и значит $\exists x(P(x) \vee C) = 0$.

2. Пусть теперь $\exists x(P(x) \vee C) = 0$. Тогда для любого a $P(a) \vee C = 0$, значит, для любого a $P(a) = 0$ и $C = 0$, следовательно, $\exists xP(x) = 0$ и $C = 0$, значит, $\exists xP(x) \vee C = 0$.

Другой способ доказательства равносильности формул логики предикатов состоит в применение формульных преобразований и доказанных равносильностей, т.е. – аналитический способ.

Пример 7.3. Доказать равносильность $\forall xP(x) \to C = \exists x(P(x) \to C)$.

Доказательство:

$$\forall xP(x) \to C = \overline{\forall xP(x)} \vee C = \exists x\overline{P(x)} \vee C = \exists x(\overline{P(x)} \vee C) = \exists x(P(x) \to C).$$

8. Нормальные формы формулы логики предикатов

Для любых формул логики предикатов существуют равносильные им нормальные формы представления аналогично нормальным формам алгебры высказываний. Используя равносильности формул логики предикатов любую формулу логики предикатов можно привести к нормальной форме. В логике предикатов различают приведенную и предваренную формы.

Определение 8.1. Формула логики предикатов имеет приведенную нормальную форму, если она содержит только операции дизъюнкции, конъюнкции и кванторные операции, а операция отрицания отнесена к элементарным формулам.

Пример 8.1. Привести к нормальной форме формулу логики предикатов:

$$\overline{\exists x P(a,x) \to \forall y \exists z F(y,z)}$$

Решение. Используя равносильные преобразования, получаем:

$$\overline{\exists x P(a,x) \to \forall y \exists z F(y,z)} = \forall x \overline{P(a,x) \to \forall y \exists z F(y,z)} =$$

$$= \forall x \left(P(a,x) \,\&\, \overline{\forall y \exists z F(y,z)} \right) = \forall x \left(P(a,x) \,\&\, \exists y \forall z \overline{F(y,z)} \right),$$

т.е. получили приведенную нормальную форму исходной формулы.

Среди нормальных форм формул логики предикатов выделяют так называемую предваренную (префиксную, пренексную) нормальную форму (п.н.ф.), в которой кванторные операции либо полностью отсутствуют, либо они используются после всех операций алгебры логики, т.е. (п.н.ф.) формулы логике предикатов имеет вид

$$(\sigma_{x1})(\sigma_{x2})\ldots(\sigma_{xn})P(x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad n \le m,$$

где под символом σ_{xi} понимается один из кванторов $\forall x_i$ или $\exists x_i$, а формула P кванторов не содержит.

Любая формула логики предикатов может быть приведена к п.н.ф.

Пример 8.2. Привести к п.н.ф. формулу логики предикатов:

$$\exists x P(x) \equiv \forall y F(y).$$

Решение.

$$\exists x P(x) \equiv \forall y F(y) = \overline{\exists x P(x)} \,\&\, \overline{\forall y F(y)} \vee \exists x P(x) \,\&\, \forall y F(y) =$$

$$\forall x \overline{P(x)} \,\&\, \exists y \overline{F(y)} \vee \exists x P(x) \,\&\, \forall y F(y) = \forall x \exists y \left(\overline{P(x)} \,\&\, \overline{F(y)} \right) \vee \exists x \forall y \left(P(x) \,\&\, F(y) \right) =$$

$$\forall x \exists y \left(\overline{P(x)} \,\&\, \overline{F(y)} \right) \vee \exists z \forall w \left(P(z) \,\&\, F(w) \right) = \forall x \exists y \exists z \forall w \left(\overline{P(x)} \,\&\, \overline{F(y)} \vee P(z) \,\&\, F(w) \right)$$

Пример 8.3. Привести к п.н.ф. формулу логики предикатов:

$$\forall x \exists y A(x,y) \to \exists x \forall y B(x,y).$$

Решение.

$$\forall x \exists y A(x,y) \to \exists x \forall y B(x,y) = \overline{\forall x \exists y A(x,y)} \vee \exists x \forall y B(x,y) =$$

$$\exists x \forall y \overline{A(x,y)} \vee \exists x \forall y B(x,y) = \exists x \left(\forall y \overline{A(x,y)} \vee \forall y B(x,y) \right) =$$

$$\exists x \left(\forall y \overline{A(x,y)} \vee \forall z B(x,z) \right) = \exists x \forall y \forall z \left(\overline{A(x,y)} \vee B(x,z) \right).$$

9. Общезначимость и выполнимость формул.

Определение 9.1. Формула A логики предикатов называется выполнимой в области M, если существуют значения переменных входящих в эту формулу и отнесенных к области M, при которых формула A принимает истинные значения.

Определение 9.2. Формула A логики предикатов называется выполнимой, если существует область, на которой эта формула выполнима.

Определение 9.3. Формула A логики предикатов называется тождественно истинной в области M, если она принимает истинные значения для всех значений переменных, входящих в эту формулу и отнесенных к этой области.

Определение 9.4. Формула A логики предикатов называется общезначимой, если она тождественна истинна на всякой области.

Следует заметить, что все логические законы алгебры высказываний (тавтологии) являются общезначимыми формулами логики предикатов.

Определение 9.5. Формула A логики предикатов называется тождественно ложной в области M, если она принимает ложные значения для всех значений переменных, входящих в эту формулу и отнесенных к этой области.

Определение 9.6. Формула A логики предикатов называется тождественно ложной (невыполнимой), если она тождественно ложна на всякой области.

Например, формула $\forall x[P(x)\wedge\overline{P}(x)]$ является тождественно ложной (невыполнимой) формулой логики предикатов.

Из приведенных определений следует:

1. Если формула А общезначима, то она и выполнима на всякой области.
2. Если формула A тождественно истинна в области M, то она и выполнима в этой области .
3. Если формула $\boldsymbol{A}$ тождественно ложна в области M, то она не выполнима в этой области.
4. Если формула A не выполнима, то она тождественно ложна на всякой области.
5. Для того, чтобы формула A логики предикатов была общезначима, необходимо и достаточно, чтобы ее отрицание было не выполнимо.
6. Для того, чтобы формула A логики предикатов была выполнимой, необходимо и достаточно, чтобы формула $\overline{A}$ была не общезначима.

В соответствии с данными определениями вполне естественно можно выделить два класса формул логики предикатов: выполнимых и не выполнимых.

Следует еще раз отметить, что общезначимую формулу логики предикатов называют логическим законом.

Пример 9.1. Проверить, является ли формула логики предикатов $\forall x \exists y P(x, y)$ выполнима?

Решение.

Пусть на множестве $M = N \times N$ определен предикат $P(x, y)$:”$x<y$”. Тогда формула $\forall x \exists y P(x, y)$ будет тождественно истинна в области *M*. Но если этот предикат рассматривать в конечной области $M_k = N_k \times N_k$, где $N_k = \{1,2,3,4,\cdots,k\}$, то формула $\forall x \exists y P(x, y)$ будет тождественно ложной в этой области, и , следовательно, формула $\forall x \exists y P(x, y)$ не общезначима.

Ответ: Является.

Пример 9.2. Определить, является ли формула $\exists x \exists y \left(P(x) \& \overline{P(y)}\right)$ логики предикатов выполнимой.

Решение.

Пусть задан предикат $P(x)$:”*x-четное число*”, определенный на множестве $M = N \times N$. Тогда, формула $\exists x \exists y \left(P(x) \& \overline{P(y)}\right)$ логики предикатов будет тождественно истинна в области *M*. Но если этот предикат рассматривать в области $M_{2n} = N_{2n} \times N_{2n}$, где $N_{2n} = \{2, 4, \ldots, 2n \ldots\}$, то формула логики предикатов $\exists x \exists y \left(P(x) \& \overline{P(y)}\right)$ будет тождественно ложна в этой области и, следовательно, не выполнимой.

Ответ: Не является.

Связь между общезначимостью и выполнимостью формул логики предикатов устанавливается на основании простых теорем:

Теорема 9.1. Для того, чтобы формула *A* была общезначима, необходимо и достаточно, чтобы ее отрицание было невыполнимо.

Доказательство.

Необходимость. Пусть формула *A* общезначима. Тогда $\overline{A}$ – тождественно ложная формула в любой области, и, следовательно, формула $\overline{A}$ не выполнима.

Достаточность. Пусть формула $\overline{A}$ не выполнима в любой области. Тогда по определению невыполнимой формулы $\overline{A}$ является тождественно ложной в любой области и, следовательно, формула *A* – тождественно истинная формула в любой области, т.е. она общезначима.

Теорема 9.2. Для того, чтобы формула A была выполнимой, необходимо и достаточно, чтобы формула $\overline{A}$ была не общезначима.

Доказательство.

Необходимость. Пусть формула A выполнима. Это означает, что существует область M и набор значений переменных, входящих в формулу A, при которых формула A принимает значение 1. Тогда очевидно, что на этом наборе значений переменных формула $\overline{A}$ принимает значение 0, и, следовательно, формула $\overline{A}$ не общезначима.

Достаточность. Пусть формула $\overline{A}$ не общезначима. Тогда существует область M и набор значений переменных, входящих в формулу, при которых формула $\overline{A}$ принимает значение 1, и поэтому формула A выполнима.

10.Проблема разрешимости

Проблема разрешимости в логике предикатов ставится так же, как и в алгебре логики: существуют ли алгоритмы, позволяющие для любой формулы A логики предикатов установить, к какому классу она относится, т.е. является ли она общезначимой, выполнимой или тождественно ложной. Если бы такой алгоритм существовал, то, как и в алгебре высказываний, он сводился бы к критерию тождественной истинности любой формулы логики предикатов.

Отметим, что, в отличие от алгебры логики, в логике предикатов не применим метод перебора всех вариантов значений переменных, входящих в формулу, так как таких вариантов может быть бесконечное множество.

В 1936 году математик А. Черч доказал, *что проблема разрешимости логики предикатов в общем виде алгоритмически не разрешима*, т.е. не существует алгоритма, который бы позволил установить, к какому классу формул относится любая формула логики предикатов.

11.**Применение логики предикатов в математической практике**

11.1 Запись математических предложений с использованием языка логики предикатов.

Применение аппарата логики предикатов в математической практике можно классифицировать по областям ее использования, например, следующим образом:

1. Запись на языке логики предикатов различных математических предложений;

2. Применение логики предикатов в логико-математической практике для построения доказательств различных теорем, основанных на теории логического следования;
3. Приложение логики предикатов к теории множеств, к анализу Аристотелевой силлогистики.

Умение грамотного использования языка логики предикатов является базой логико-математической культуры его применения в различных областях научной и инженерной деятельности.

С помощью языка логики предикатов (кванторной символики) удобно записывать формулировки различных определений и теорем. В процессе такой записи приходится осмысливать данное предложение, отчетливо выявлять посылки и следствия (особенно, если это теорема), четко выявлять ограничивающие условия (если это определение). Т.е. перевод расплывчатой словесной формулировки на строгий, не допускающий противоречивых толкований язык логики предикатов способствует четкости и ясности мышления. Следует подчеркнуть, что в формулировках математических теорем выделяются три части: условие теоремы, заключение теоремы и разъяснительная часть. Условие теоремы – это предикат $P(x)$, определенный на множестве *M*. Заключение теоремы – это предикат $Q(x)$, определенный на множестве *M*. Разъяснительная часть – это описание объектов теоремы. Теоремы такой структуры формулируются в виде импликации:

$\forall x \in M[P(x) \to Q(x)]$- прямая теорема;

$\forall x \in M[Q(x) \to P(x)]$ - обратная теорема;

$\forall x \in M[\overline{P(x)} \to \overline{Q(x)}]$ - противоположная теорема;

$\forall x \in M[\overline{Q(x)} \to \overline{P(x)}]$- обратно-противоположная теорема.

В качестве примера рассмотрим предикаты, определенные на множестве геометрических векторов *V*:

P(x,y):”*вектор* $\vec{x}$ *ортогонален вектору* $\vec{y}$”;

Q(x,y):”*скалярное произведение векторов* $\vec{x}$ *и* $\vec{y}$ *равно 0*”.

1. Прямая теорема: “Если два вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ ортогональны, то их скалярное произведение равно нулю” на языке логики предикатов запишется в виде: $\forall(x,y) \in V[P(x,y) \to Q(x,y)]$;
2. Обратная теорема: “Если скалярное произведение двух векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ равно нулю, то эти вектора ортогональны” запишется в виде: $\forall(x,y) \in V[Q(x,y) \to P(x,y)]$;

3. Противоположная теорема: “Если два вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ не ортогональны, то их скалярное произведение не равно нулю” запишется в виде: $\forall(x,y)\in V\left[\overline{P(x,y)}\to\overline{Q(x,y)}\right]$;
4. Обратно-противоположная теорема: “Если скалярное произведение двух векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ не равно нулю, то эти вектора не ортогональны” запишется как: $\forall(x,y)\in V\left[\overline{Q(x,y)}\to\overline{P(x,y)}\right]$.

Вполне очевидно, что прямая и обратно-противоположная теоремы равносильны, как и равносильны обратная и противоположная теоремы.

Если верна и прямая и обратная теоремы, то формулируются теоремы другой структуры. В этом случае каждый из предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ является необходимым и достаточным условием для другого, и теоремы этой структуры формулируются в виде эквиваленции: $\forall x\in M[P(x)\Leftrightarrow Q(x)]$.

Например, для вышеопределенных предикатов на множестве V теорема о необходимом и достаточном условии ортогональности двух векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$: “Два вектора ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю” запишется так: $\forall(x,y)\in V[P(x,y)\Leftrightarrow Q(x,y)]$.

Рассмотрим примеры применения языка логики предикатов для записи математических предложений и определений, что способствует более глубокому пониманию их структуры.

Пример 11.1

Записать на языке логики предикатов определение числовой последовательности.

Решение.

Определение предела числовой последовательности: “Число а называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если для всякого положительного числа $\varepsilon>0$ существует такое натуральное число n_0, что для всякого натурального n, большего n_0, $|a_n-a|<\varepsilon$” на языке логики предикатов запишется так:

$$a=\lim a_n\leftrightarrow\forall\varepsilon[\varepsilon>0\to\exists n_0(n_0\in N\ \&\ \forall n(n>n_0\to|a_n-a|<\varepsilon))]$$

Используя символику ограниченных кванторов, это определение можно записать несколько компактнее:

$$a=\lim a_n\leftrightarrow(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in N)(\forall n>n_0)(|a_n-a|<\varepsilon).$$

Пример 11.2

Используя язык логики предикатов, запишите определение простого числа.

Решение.

Согласно определению натуральное число n называется простым, если оно не равно 1 и при всяком разложении его в произведение двух натуральных чисел одно из них оказывается равным 1 или n. Тогда это определение с использованием языка предикатов можно представить в виде:

$$\overline{n=1}\,\&\,\forall x\forall y(n = x\cdot y \to (x=1)\vee(x=n)).$$

Утверждение того, что число является составным, запишется следующим образом: $(n=1)\vee\exists x\exists y(n = x\cdot y\,\&\,(x\neq 1)\,\&\,(x\neq n))$.

Пример 11.3

Записать большую теорему Ферма на языке логики предикатов.

Решение.

Как известно, теорему Ферма можно представить в виде утверждения: "Для любого целого числа $n>2$ не существует натуральных чисел x, $y,z \in N$, удовлетворяющих равенству $x^n + y^n = z^n$."

Введем предикаты:

$N(x)$:"x *–натуральное число*";

$K(x)$:"$x>2$";

$P(x,y,z,n)$:"$x^n + y^n = z^n$".

Тогда теорему Ферма можно сформулировать на языке логики предикатов так:

$\forall x\forall y\forall z\forall n\left[N(x)\,\&\,N(y)\,\&\,N(n)\,\&\,K(n)\to\overline{P(x,y,z,n)}\right]$.

Пример 11.4

На языке логики предикатов записать выражение: "Все политики – лицедеи. Некоторые лицедеи – лицемеры. Значит, некоторые политики - лицемеры". (Ах, как хорошо это соответствует действительности!).

Решение.

Формализуем условия заданного выражения, т.е. введем предикаты, определенные, естественно, на множестве людей:

$A(x)$:"*x - политик*";

$B(x)$: "*x-лицедей*";

$C(x)$: "*x - лицемер*".

Теперь можно формализовать простые высказывания:

$\forall x(A(x)\to B(x))$-"*Все политики лицедеи*";

$\exists x(B(x)\to C(x))$-"*Некоторые лицедеи - лицемеры*";

$\exists x(A(x)\to C(x))$- "*Некоторые политики - лицемеры*".

Тогда данное выражение можно записать в виде:

$$[\forall x(A(x)\to B(x))\cdot \exists x(B(x)\to C(x))]\to \exists x(A(x)\to C(x)).$$

Как уже отмечалось выше, логика предикатов тоньше и точнее отражает процессы мышления, чем алгебра высказываний. Рассмотрим примеры, подтверждающих это.

Пример 11.5

Рассмотрим высказывание *"Каждый человек имеет мать"*. Если на языке алгебры высказываний формулировка данного высказывания сведется лишь к обозначению его некоторой буквой, скажем A, то на языке логики предикатов возможна формализация, учитывающая внутреннюю (субъектно-предикатную) структуру этого высказывания. Действительно, пусть — двухместный предикат $P(x,y)$:*"x есть мать y"*, определенный на множестве всех людей. Тогда данному высказыванию отвечает формула логики предикатов $(\forall y)(\exists x)P(x,y)$.

Рассматриваемое высказывание можно перевести на язык логики предикатов и иначе. Если ввести еще одноместный предикат $Q(x)$:*"x есть человек"*, определенный на произвольном множестве, то высказывание запишется так:

$$(\forall y)(Q(y)\to(\exists x)(Q(x)\,\&\,P(x,y))).$$

Выразительные возможности языка логики предикатов по сравнению с языком алгебры высказываний можно продемонстрировать на следующем примере.

Пример 11.6

Рассмотрим два высказывания: "*В Москве живет женщина, имеющая брата в Петербурге*" и "*В Петербурге живет мужчина, имеющий сестру в Москве*". Каждое из данных утверждений следует из другого, т.е. они равносильны. Спрашивается, можно ли выразить эту равносильность на языке алгебры высказываний, на языке логики предикатов?

<u>Решение.</u>

Формализуем данные высказывания, обозначив первое через A, а второе через B. Вполне очевидно, что формулы A и B не равносильны. Можно расчленить данные высказывания на более простые:

A_1 -*"Женщина живет в Москве"*;

A_2 -*"Женщина имеет брата в Петербурге"*;

B_1- *"Мужчина живет в Петербурге"*;

B_2 -"*Мужчина имеет сестру в Москве*".

Тогда первое исходное высказывание есть конъюнкция $A_1\cdot A_2$, а второе $B_1\cdot B_2$. Но и эти две формулы алгебры высказываний не следуют одна из другой.

Теперь рассмотрим эти высказывания с точки зрения предикатов. Формализуем задачу, введя предикаты, определенные на множестве людей:

$P_1(x)$: *"x -женщина"*;

$P_2(x)$: *" x живет в Москве"*;

$Q_1(y)$: *" y- мужчина"*;

$Q_2(y)$: *"y живет в Петербурге"*;

$S(x,y)$: *" x есть сестра y"*.

Тогда высказыванию "*В Москве живет женщина, имеющая брата в Петербурге*" соответствует формула логики предикатов

$$\exists x[P_1(x)\&P_2(x)\&\exists y(Q_1(y)\&Q_2(y)\&S(x,y))],$$

а высказыванию "*В Петербурге живет мужчина, имеющий сестру в Москве*" формула

$$(\exists y)[(Q_1(y)\&Q_2(y)\&(\exists x)P_1(x)\&P_2(x)\&S(x,y))].$$

А теперь покажем, что полученные формулы равносильны, для чего первую формулу методом равносильных преобразований сведем ко второй:

$$\exists x[P_1(x)\&P_2(x)\&\exists y(Q_1(y)\&Q_2(y)\&S(x,y))]=$$
$$\exists x\exists y[P_1(x)\&P_2(x)\&(Q_1(y)\&Q_2(y)\&S(x,y)]=$$
$$\exists y\exists x[Q_1(y)\&Q_2(y)\&P_1(x)\&P_2(x)\&S(x,y)]=$$
$$\exists y[(Q_1(y)\&Q_2(y)\&\exists xP_1(x)\&P_2(x)\&S(x,y))].$$

Т.е. на языке логики предикатов достаточно легко определили равносильность высказываний данной задачи, чего нельзя было сделать средствами алгебры высказываний.

11.2 Необходимые и достаточные условия.

Рассмотрим теорему

$$\forall x\in M[P(x)\to Q(x)].$$

Область истинности предиката $P(x)\to Q(x)$, определенного на множестве M, есть $I_{P\to Q}=I_{\overline{P}}\cup I_Q=M\setminus I_P\cup I_Q$. Тогда множество ложности этого предиката является $\overline{M\setminus I_P\cup I_Q}=I_P\cap M\setminus I_Q$. Последнее множество будет пустым тогда, когда $I_P\subset I_Q$. Т.е. предикат $P(x)\to Q(x)$ будет истинным $\forall x\in M$ тогда и только тогда, когда множество истинности предиката $P(x)$ содержится в множестве истинности предиката $Q(x)$. В этом случае говорят, что предикат $Q(x)$ логически следует из предиката $P(x)$, и предикат $Q(x)$ называют необходимым условием для предиката $P(x)$, а предикат $P(x)$- достаточным условием для предиката $Q(x)$. Так, например, в теореме “Если x – натуральное число, то оно целое” предикат $Q(x)$: “*x-целое число*” логически следует из предиката $P(x)$: “*x – натуральное число*”, а предикат $P(x)$: “*x – натуральное число*” является достаточным условием для предиката $Q(x)$: “*x-целое число*”.

Часто встречаются случаи, когда взаимно обратные теоремы

$$\forall x \in M[P(x) \to Q(x)] \qquad (а)$$

и

$$\forall x \in M[Q(x) \to P(x)] \qquad (б)$$

истинны. Это возможно при условии $I_P = I_Q$. В таком случае из теоремы (а) следует, что условие *P(x)* является достаточным для *Q(x)*, а из теоремы (б) следует, что *P(x)* является необходимым для *Q(x)*.

Таким образом, если истинны теоремы (а) и (б), то условие *P(x)* является и необходимым, и достаточным для *Q(x)*. Также в этом случае *Q(x)* является и необходимым, и достаточным для *P(x)*.

Следует отметить, что иногда вместо логической связки "*необходимо и достаточно*" используют логическую связку "*тогда и только тогда*".

Действительно, если истинны высказывания (а) и (б), то истинным будет высказывание

$$\forall x \in M[P(x) \to Q(x)] \cdot \forall x \in M[Q(x) \to P(x)] \equiv \forall x \in M[P(x) \leftrightarrow Q(x)].$$

Пример 11.7

Теорема "Если число L делится на 15, то оно делится на 3" истинна. Поэтому здесь делимость числа L на 15 является достаточным условием для делимости числа на 3, а делимость числа L на 3 является необходимым условием для делимости числа L на 15. Но обратная теорема "Если число L делится на 3, то оно делится на 15" не верна, т.е. ложна. Поэтому делимость числа L на 3 не является достаточным условием делимости числа L на 15, а делимость числа L на 15 не является необходимым условием делимости числа L на 3.

Пример 11.8

Рассмотрим две взаимно обратные теоремы, известные еще из школьной программы:

1."В описанном четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны между собой";

2."Если в четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны между собой, то в этот четырехугольник можно вписать окружность".

Вполне очевидно, что они обе верны, т.е. истинны и, следовательно, здесь можно употребить логическую связку "*необходимо и достаточно*" и сформулировать теорему можно так:

"Для того, чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных сторон были равны между собой".

11.3 Доказательство методом от противного.

Доказательство методом от противного, как правило, проводится по следующей схеме: предполагается, что теорема

$$\forall x \in M[P(x) \to Q(x)] \qquad \text{(а)}$$

не верна, т.е. существует такой *x*, что условие *P(x)* истинно, а заключение *Q(x)* – ложно. Если из этих предположений путем логических рассуждений приходят к противоречивому утверждению, то делают вывод о том, что исходное предположение не верно, и верна теорема (а).

Как видно, что и такой подход дает доказательство истинности теоремы (а). Действительно, предположение о том, что теорема (а) не верна, означает ложность формулы $\forall x \in M[P(x) \to Q(x)]$. Но тогда будет истинной формула $\overline{\forall x \in M[P(x) \to Q(x)]}$ и тогда формула $\overline{\forall x \in M[P(x) \to Q(x)]} \to 0$ будет истинной только при условии истинности $\forall x \in M[P(x) \to Q(x)]$.

Действительно, $\overline{\forall x \in M[P(x) \to Q(x)]} \to 0 = \overline{\overline{\forall x \in M[P(x) \to Q(x)]}} \vee 0 =$ $= \forall x \in M[P(x) \to Q(x)]$.

12 Задачи для самостоятельного решения.

Решите нижеприведенные задачи, используя аппарат алгебры высказываний.

12.1 В школе, перешедшей на самообслуживание, четырем старшеклассникам: Андрееву, Костину, Савельеву и Давыдову поручили убрать 7-ой, 8-ой, 9-ый и 10-ый классы. При проверке оказалось, что 10-ый класс убран плохо. Не ушедшие домой ученики сообщили о следующем:

1. Андреев: «Я убирал 9-ый класс, а Савельев - 7-ой».
2. Костин: «Я убирал 9-ый класс, а Андреев - 8-ой».
3. Савельев: «Я убирал 8-ой класс, а Костин - 10-ый».

Давыдов уже ушел домой. В дальнейшем выяснилось, что каждый ученик в одном из двух высказываний говорил правду, а во втором ложь. Какой класс убирал каждый ученик?

12.2 Пять студентов из пяти различных городов Нижегородской области прибыли для участия в областной олимпиаде по математике. На вопрос: «Откуда Вы?» каждый дал ответ:

Иванов: «Я приехал из Арзамаса, а Дмитриев — из Навашино».

Сидоров: «Я приехал из Арзамаса, а Петров - из Кстова».

Петров: «Я приехал из Арзамаса, а Дмитриев - из Дзержинска».

Дмитриев: «Я приехал из Навашино, а Ефимов -из Сарова».

Ефимов: «Я приехал из Сарова, а Иванов живет в Дзержинске».

12.3 На вопрос: «Кто из трех студентов: A, B и C изучал математическую логику?» получен верный ответ - «Если изучал A, то изучал и C, но неверно, что если изучал B, то изучал и C». Кто изучал математическую логику?

12.4 Определите, кто из четырех студентов сдал экзамен, если известно:

1. Если первый сдал, то и второй сдал.
2. Если второй сдал, то третий сдал или первый не сдал.
3. Если четвертый не сдал, то первый сдал, а третий не сдал.
4. Если четвертый сдал, то и первый сдал.

12.5 Известно следующее: если Петя не видел Колю на улице, то либо Коля ходил в кино, либо Петя сказал правду; если Коля не ходил в кино, то Петя не видел Колю на улице, и Коля сказал правду; если Коля сказал правду, то либо он ходил в кино, либо Петя солгал. Выясните, ходил ли Коля в кино.

12.6 Четыре студентки, имена которых начинаются буквами A, B, C, D посещают институт по очереди и ведут общий конспект лекций. Необходимо составить график посещения на ближайшую неделю, учитывая, что:

1. Понедельник - день самостоятельной работы на курсе, и в институт не ходит никто, а в субботу необходимо быть всем.
2. C и D не смогут пойти на занятия во вторник в связи с большой загруженностью в понедельник.
3. Если C выйдет в среду или D - в четверг, то B согласится побывать на занятиях в пятницу.
4. Если A не пойдет в ВУЗ в четверг, то B позволит себе сходить туда в среду.
5. Если A или D будут в институте в среду, то C сможет пойти в пятницу.
6. Если D в пятницу вместо института пойдет на свадьбу подруги, то A придется сходить в институт во вторник, а C - в четверг.

12.7 Четыре друга - A, B, C и D решили провести каникулы в четырех различных городах - Москве, Одессе, Киеве и Ташкенте. Определите, в какой город должен поехать каждый из них, если имеются следующие ограничения:

1. Если A не едет в Москву, то C не едет в Одессу.
2. Если B не едет ни в Москву, ни в Ташкент, то A едет в Москву.

3. Если C не едет в Ташкент, то B едет в Киев.

4. Если D не едет в Москву, то B не едет в Москву.

5. Если D не едет в Одессу, то B не едет в Москву.

12.8 Однажды следователю пришлось одновременно допрашивать трех свидетелей: Клода, Жака и Дика. Их показания противоречили друг другу, и каждый из них обвинял кого-нибудь во лжи.

1. Клод утверждал, что Жак лжет.
2. Жак обвинял во лжи Дика.
3. Дик уговаривал следователя не верить ни Клоду, ни Жаку.

Но следователь быстро вывел их на чистую воду, не задав им ни одного вопроса. Кто из свидетелей говорил правду?

12.9 Обсуждая конструкцию нового трёхмоторного самолёта, трое конструкторов поочередно высказали следующие предположения:

1. при отказе второго двигателя надо приземляться, а при отказе третьего можно продолжать полёт;
2. при отказе первого двигателя лететь можно, или при отказе третьего двигателя лететь нельзя;
3. при отказе третьего двигателя лететь можно, но при отказе хотя бы одного из остальных надо садиться.

Лётные испытания подтвердили правоту каждого из конструкторов. Определите, при отказе какого из двигателей нельзя продолжать полёт.

12.10 Проверить правильность рассуждений в следующих задачах:

а). "Если число делится на 10, то оно делится и на 5. Данное число не делится на 10. Следовательно, данное число не делится на 5".

б). "Если треугольник прямоугольный, то в нем против большего угла лежит и большая сторона. Если треугольник не является прямоугольным, то в нем против большего угла лежит и большая сторона. Следовательно, против большего угла в треугольнике всегда лежит и большая сторона".

в). "Если A будет обладать большими знаниями и будет удачлив, то A добьется цели. Если A не будет обладать большими знаниями, то он не сможет быть удачлив. Следовательно, если A не обладает большими знаниями, то A не добьется цели".

г). “Если А будет обладать большими знаниями и будет удачлив, то А добьется цели. Если А не будет удачливым, то он не сможет обладать большими знаниями. Следовательно, если А не добьется цели, то он не обладает большими знаниями”.

д).”Если Иванов победит на выборах, он будет доволен, а если он будет доволен, то он плохой борец в предвыборной кампании. Но если он провалится на выборах, то он потеряет доверие партии. Он плохой борец в предвыборной кампании, если он потеряет доверие партии. Если он плохой борец в предвыборной кампании, ему следует выйти из партии. Иванов или победит на выборах, или провалится. Следовательно, ему нужно выйти из партии”.

е). “Если в результате эксперимента получен неверный результат, то либо в теоретических расчетах есть ошибка, либо эксперимент был поставлен неправильно. Не могут быть одновременно и ошибка в теоретических расчетах и неправильно поставленный эксперимент. Если в теоретических расчетах нет ошибки, то эксперимент поставлен правильно. Следовательно, в результате эксперимента получен верный результат”.

12.11 Какие из следующих выражений являются предикатами? Определить область истинности предиката.

а) $x + 8 = 3$;

б) при x = a выполняется равенство $x^2 - a = 0$;

в) $x^2 - 2x + 2 > 0$;

г) $||x|-1|-1>0$;

д) однозначное неотрицательное число x кратно 3;

е) $sin\frac{\pi}{4}x+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

12.12 Выяснить, какие из следующих предикатов являются тождественно истинными:

а) $x^2 + y^2 \geq 0$; б) $x^2 + y^2 > 0$;

в) $sin^2 x + cos^2 x = 1$; г) $x^2 + 1 \geq (x+1)^2$;

д) $(x+1)^2 \geq x-1$; е) $x^2 - 2|x| + 1 > 0$.

12.13 Для заданных предикатов $R(x,y)$ и $Q(x,y)$, определенных на множестве $M \subseteq R \times R$, определить множество (область) истинности предиката $R(x,y) \equiv Q(x,y)$.

12.14 На множестве $M = \{1, 2, 3, \cdots 20\}$ заданы предикаты:

A(x): ”*x не делится на 5*”; *B(x)*: ”*x-четное число*”; *C(x)*: ”*x –простое число* ”; *D(x)*: ”*x кратно 3*”. Определите множества истинности следующих предикатов:

а) $A(x) \cdot B(x)$; б) $C(x) \cdot B(x)$; в) $C(x) \cdot D(x)$;

г) $B(x) \cdot D(x)$; д) $\overline{B(x)} \cdot D(x)$; е) $A(x) \cdot \overline{D(x)}$;

ж) $\overline{B(x)} \cdot \overline{D(x)}$; з) $A(x) \cdot B(x) \cdot D(x)$; и) $C(x) \to A(x)$;

к) $D(x) \to \overline{C(x)}$; л) $(A(x) \cdot B(x)) \to \overline{D(x)}$; м) $(A(x) \cdot D(x)) \to \overline{C(x)}$.

12.15 Какие из следующих выражений являются формулами логики предикатов? Выделите свободные и связанные переменные.

а) $\overline{\exists x \forall z (P(x,y) \to P(y,z))}$; б) $(p \to q) \cdot (\bar{r} \vee \bar{p})$;

в) $R(x) \cdot \forall x F(x)$; г) $(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \vee \exists y (\forall R(y))$;

д) $\forall x (P(x) \to Q(x)) \leftrightarrow (\exists x P(x) \to \forall x R(x,y))$;

е) $\exists x \forall z (P(x,y) \to P(y,z))$.

12.16 На множестве натуральных чисел заданы предикаты:

а) *A(x)*: “*число x делится на 3*”; б) *B(x)*: “*число x делится на 2*”;

в) *C(x)*: “*число x делится на 4*”; г) *D(x)*: “*число x делится на 6*”;

д) *E(x)*: “*число x делится на 12*”.

Укажите, какие из следующих утверждений истинны, какие ложны:

а) $\forall x (A(x) \cdot B(x) \to E(x))$; б) $\forall x (B(x) \cdot D(x) \to E(x))$;

в) $\exists x (C(x) \cdot D(x) \to E(x))$; г) $\forall x (E(x) \to C(x) \cdot D(x))$;

д) $\forall x (\overline{E(x)} \to B(x) \cdot D(x))$; е) $\exists x (B(x) \cdot C(x) \to \overline{D(x)})$;

ж) $\forall x (\overline{A(x)} \to E(x))$.

12.17 На множестве $M = N \times N$ определен предикат *P(x,y)*: ”$x<y$”. Какие из следующих высказываний истинны и какие ложны:

а) $\exists x \forall y P(x,y)$; б) $\forall x \exists y P(x,y)$;

в) $\forall y \exists x P(x,y)$; г) $\forall x \forall y P(x,y)$;

д) $\forall y \forall x P(x,y)$; е) $\exists y P \forall x (x,y)$;

ж) $\exists x \exists y P(x,y)$; з) $\exists y \exists x P(x,y)$?

12.18 Приведите отрицания следующих формул:

а) $\exists x (A(x) \cdot B(x) \cdot C(x))$;

б) $\forall x (A(x) \to \forall y B(y))$;

в) $\forall x (A(x) \vee \exists y B(y))$;

г) $\forall x(A(x) \to B(x)) \cdot \exists x(S(x) \cdot \overline{R(x)})$;
д) $\exists x(R(x) \leftrightarrow B(x))$;
е) $\forall x \exists y \forall z(P(x,y,z) \to Q(x,y,z))$.

12.19 На множестве M определены два таких одноместных предиката $A(x)$ и $B(x)$, что высказывание $\exists x\left(A(x) \to \left(\overline{A(x)} \vee \overline{\left(\overline{B(x)} \to A(x)\right)}\right)\right)$ истинно. Доказать, что высказывание $\forall x A(x)$ ложно.

12.20 Каким условиям должны удовлетворять области истинности предикатов $A(x)$ и $B(x)$, определенных на множестве M, если истинны высказывания:
а) $\forall x(A(x) \to B(x)) \cdot \exists x(\overline{A(x)} \cdot B(x))$;
б) $\overline{\exists x(A(x) \cdot B(x))} \cdot (\forall x(A(x) \to B(x)))$;
в) $\exists x(A(x) \cdot B(x)) \to (\forall x(A(x) \to B(x)))$?

12.21 Доказать, что формула
$\exists x \exists y((A(x) \to A(y)) \cdot (A(x) \to \overline{A(y)}) \cdot A(x))$ тождественна ложна.

12.22 Следующие формулы логики предикатов привести к п.н.ф:
а) $F = \overline{\exists x \forall y \exists z \forall u P(x,y,z,u)}$;
б) $F = \overline{\forall x R(x)} \vee \exists x Q(x,y)$;
в) $F = \overline{c \to \exists x P(x)}$;
г) $F = \overline{\exists x \forall y(A(x) \leftrightarrow A(y))}$;
д) $F = \forall x(A(x) \to \exists y B(y))$;
е) $F = \exists x \forall y P(x,y) \cdot \exists x \forall y Q(x,y)$;
ж) $F = \exists x \forall y P(x,y) \vee \exists x \forall y Q(x,y)$;
з) $F = \exists x \forall y P(x,y) \to \exists x \forall y Q(x,y)$;

12.23 Используя язык логики предикатов запишите определения:

а) Линейно упорядоченного множества: “Упорядоченное множество называется линейным, если для любых этого множества x и y либо $x=y$, либо $x<y$, либо $x>y$”;

б) Ограниченной функции: “Функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве M, если существует такое неотрицательное число L, что для всех $x \in M$ справедливо неравенство $|f(x)| \le L$”;

в) Четной функции: “Функция $f(x)$ называется четной, если область ее определения симметрична относительно начала координат и для каждого x из области определения справедливо равенство $f(-x)=f(x)$ ”;

г) Периодической функции: “Функция $f(x)$ называется периодической, если существует такое число T=0, что при любом х из области определения $f(x)$ элементы x-T и $x+T$ также принадлежат этой области, и при этом выполняется равенство $f(x \pm T) = f(x)$” ;

д) Возрастающей функции на множестве M: “ Функция $f(x)$ называется возрастающей на множестве M, если любых чисел x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$”.

12.24 В следующих предложениях вместо многоточия (…,) поставьте слова “*необходимо, но недостаточно*”, или “*достаточно, но необходимо*”, или “*не необходимо и недостаточно*”, или “*необходимо и достаточно*” так, чтобы получилось истинное утверждение:

a) Для того, чтобы четырехугольник был прямоугольным …, чтобы длины его диагоналей были равны;
b) Для того, чтобы $x^2 - 8x + 15 = 0$ …, чтобы x=5;
c) Для того, чтобы сумма четного числа натуральных чисел была четным числом, …, чтобы каждое слагаемое было четным;
d) Для того, чтобы функция $f(x)$ была интегрируема на сегменте [a,b], …, чтобы $f(x)$ была ограничена;
e) Для того, чтобы множество А было счетным, …, чтобы его элементы можно было записать в виде занумерованной последовательности;
f) Для того, чтобы числовая последовательность имела предел, …, чтобы она была монотонна и ограничена.

12.25 Сформулируйте:

a) Необходимый и достаточный признак параллелограмма;
b) Необходимый, но недостаточный признак параллелограмма;
c) Достаточный, но не необходимый признак параллелограмма;
d) Необходимое, но недостаточное условие того, чтобы $\sin x = a$ имело решение;
e) Достаточное, но не необходимое условие того, чтобы $\sin x = a$ имело решение;
f) Достаточное, но не необходимое условие того, чтобы уравнение $x^2 px + g = 0$ имело вещественные корни.

13.Ответы и указания

12.1 Андреев – 8 кл; Костин – 10 кл; Савельев – 7 кл; Давыдов – 9 кл; **12.2** Ефимов из Сарова, Дмитриев из Дзержинска, Петров из Кстова, Иванов из Арзамаса, Сидоров из Навашино. **12.3** В. **12.4** Сдали все. **12.5** Ходил в кино. **12.6** График посещения такой: А- вторник, В- средf, С- четверг , D - пятницу. **12.8** Жак **12.9** Второго. **12.10** а) не правильные; б) правильные; в) не правильные; г) правильные; д) не правильные; е) не правильные. **12.11** а) выражение является одноместным предикатом $P(x)$, $I_P = \{-5\}$; б) не является предикатом (это высказывание); в) выражение является одноместным предикатом $P(x)$, $I_P = \{R\}$; г) выражение является одноместным предикатом $P(x)$, $I_P = \{(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)\}$; д) выражение является одноместным предикатом $P(x)$, $I_P = \{0, 3, 6, 9\}$; е) предложение не является предикатом; **12.12** а), в), д); **12.13** $I_{A \equiv B} = (I_A \cap I_B) \cup (M \setminus (I_A \cap I_B))$

12.14 а) $I_{A \cdot B} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$; б) $I_{C \cdot B} = \{2\}$; в) $I_{C \cdot D} = \{3\}$; г) $I_{B \cdot D} = \{6, 12, 18\}$; д) $I_{\overline{B} \cdot D} = \{3, 9, 15\}$; е) $I_{A \cdot \overline{D}} = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14, 16, 17, 19\}$; ж) $I_{\overline{B} \cdot \overline{D}} = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$; з) $I_{A \cdot B \cdot D} = \{6, 12, 18\}$; и) $I_{C \to A} = M \setminus \{5\}$; к) $I_{D \to \overline{C}} = M \setminus \{3\}$; л) $I_{A \cdot B \to \overline{D}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; м) $I_{A \cdot D \to \overline{C}} = M \setminus \{3\}$. **12.15** а), б), д), е) – формулы логики предикатов. **12.16** а), в), г), е), ж) истинные, б), в) – ложные. **12.17** б), ж), з) истинны, остальные ложны. **12.18** а) $\forall x\left(\overline{A(x)} \vee \overline{B(x)} \vee \overline{C(x)}\right)$; б) $\exists x \overline{A(x)} \cdot \forall y \overline{B(y)}$; в) $\exists x A(x) \cdot \exists y \overline{B(y)}$; г) $\exists x\left(A(x) \cdot \overline{B(x)}\right) \vee \forall x\left(\overline{S(x)} \vee R(x)\right)$; д) $\forall x\left(\left(R(x) \cdot \overline{Q(x)}\right) \vee \left(\overline{R(x)} \cdot Q(x)\right)\right)$; е) $\forall x \forall y \exists z\left(P(x,y,z) \cdot \overline{Q(x,y,z)}\right)$.

12.19 Указание. Для доказательства достаточно данную формулу упростить методом равносильных преобразований.

12.20 а) $I_A \subset I_B$; б) $I_A = \varnothing$, $I_B \subseteq M$; в) $I_A \subset I_B$ или $I_A \cap I_B = \varnothing$. **12.21** Указание. Преобразовать методом равносильных преобразований.

12.22

а) $F = \forall x \exists y \forall z \exists u \overline{P(x,y,z,u)}$; б) $F = \exists x\left(\overline{R(x)} \vee Q(x,y)\right)$;

в) $F = \forall x\left(c \cdot \overline{P(x)}\right)$ г) $F = \exists x \forall y\left(A(x) \cdot \overline{A(y)} \vee A(y) \cdot \overline{A(x)}\right)$;

д) $F = \forall x \exists y\left(\overline{A(x)} \vee B(y)\right)$; е) $F = \exists x \exists z \forall y\left(P(x,y) \cdot Q(z,y)\right)$;

ж) $F = \exists x \forall y \forall z\left(P(x,y) \vee Q(x,z)\right)$; з) $F = \forall x \exists y \forall z\left(\overline{P(x,y)} \vee Q(x,y)\right)$.

12.23

а) $\forall x \in M\ \forall y \in M\ \left((x = y) \vee (x > y) \vee (x < y)\right)$;

б) $\exists L \in R_+ \forall x \in M\left(|f(x)| \leq L\right)$;

в) $\forall x \in M\left[(-x \in M) \cdot \left(f(-x) = f(x)\right)\right]$;

г) $\exists T \in R \setminus \{0\}\ \forall x \in M[(x \pm T \in M) \cdot (f(x \pm T) = f(x))]$;

д) $\forall x_1 \in M\ \forall x_2 \in M[(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) < f(x_2))]$.

12.24 a) необходимо, но недостаточно; b) достаточно, но не необходимо; c) достаточно, но не необходимо; d) необходимо, но недостаточно; e) необходимо и достаточно; f) необходимо, но недостаточно.

12.25 a) Для того, чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно одно из условий: “противоположные стороны четырехугольника попарно параллельны”, или – “две противоположные стороны равны и параллельны”;

b) Необходимыми, но недостаточными признаками параллелограмма являются: 1) “пара противоположных сторон четырехугольника параллельна”, 2) “две противоположные стороны четырехугольника равны”; c) Достаточными, но не необходимыми признаками параллелограмма являются: 1) “в четырехугольнике все углы прямые”, 2) “в четырехугольнике диагонали взаимно-перпендикулярны и в точке пересечения делятся пополам”;

d) $|a|<2$; e) $a = \frac{1}{2}$; f) $q=0$.

Литература

1. Новиков П.С. Элементы математической логики. М., Наука, 1973г.
2. Ф.А. Новиков. Дискретная математика для программистов; С-т Петербург, Питер, 2009 г.
3. С.Д. Шапорев. Математическая логика. Учебное пособие. С-т Петербург, «БХВ-Петербург», 2007 г.;
4. Ю.П. Шевелев. Дискретная математика. С-т Петербург, «Лань», 2008 г.;
5. В.Б. Гисин. Дискретная математика. М.-Юрайт, 2017г.
6. В.М. Зюзьков, А.А. Шелупанов. Математическая логика и теория алгоритмов. М., Телеком, 2007 г. ;
7. М.М. Глухов, А.Б. Шишков. Математическая логика. Дискретные функции. Теория алгоритмов. С-кт Петербург-Москва-Краснодар, Лань, 2012 г.

Содержание