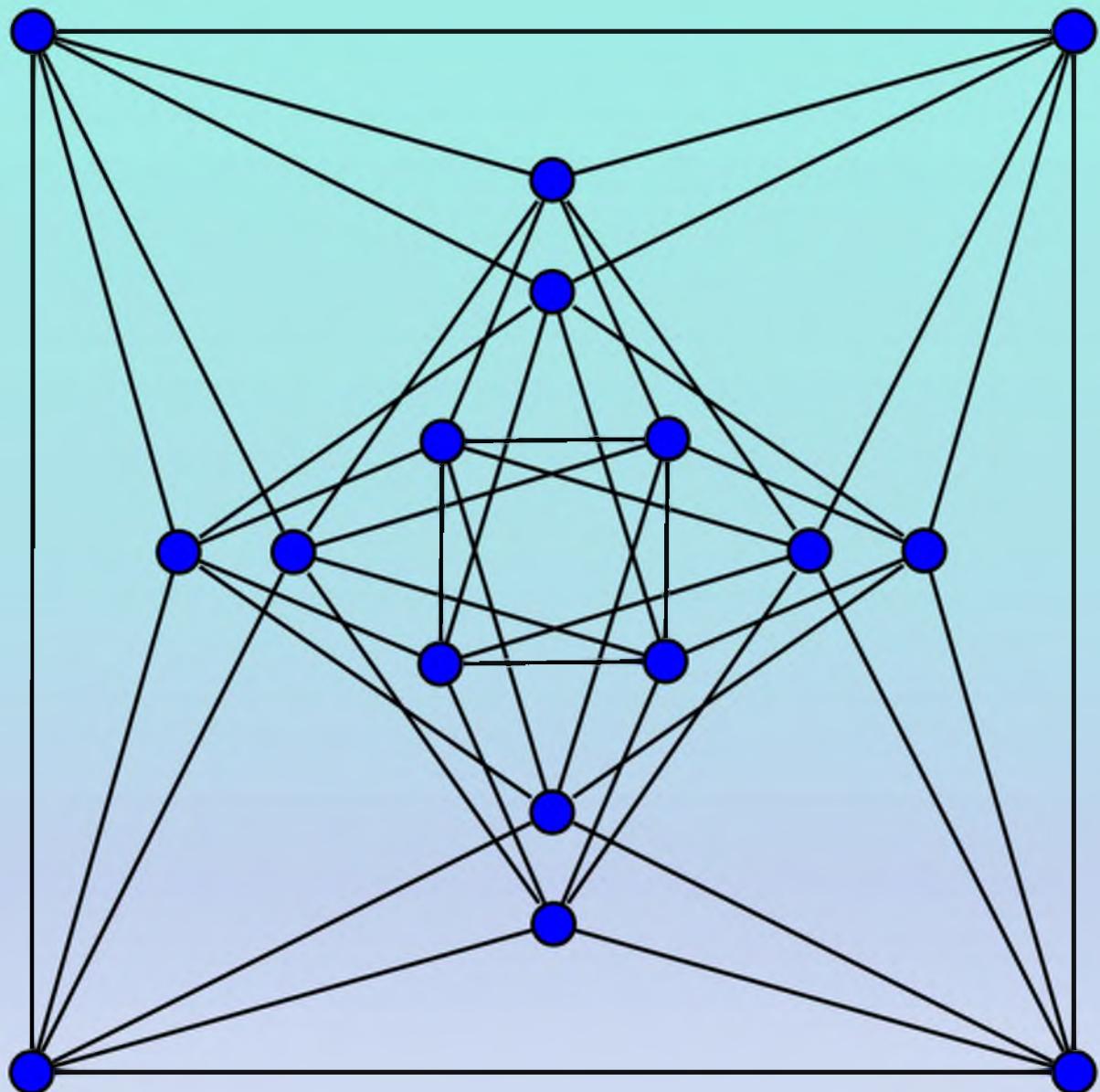


**Алексеев В.В.**

# **Основные положения теории графов**

*Учебно-методическое пособие*



**СарФТИ НИЯУ МИФИ**

**Саровский физико-технический институт-  
филиал Национального исследовательского  
ядерного университета «МИФИ»**

**ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЭЛЕКТРОНИКИ  
Кафедра вычислительной и информационной техники**

**Алексеев В.В.**  
**Основные положения теории графов**  
*Учебно-методическое пособие  
по курсу Дискретная математика*

Саров  
2019

УДК 519.1  
ББК 22.176  
А47

**Алексеев В.В. - Основные положения теории графов.**  
Учебно-методическое пособие. СарФТИ НИЯУ МИФИ, 2019 г.

Данное пособие представляет собой самостоятельный модуль и предназначено для студентов, изучающих дискретную математику по инженерным направлениям подготовки.

Пособие составлено на основании лекций, читающихся студентам физико-технического факультета и факультета информационных технологий и электроники в СарФТИ НИЯУ МИФИ.

В пособии изложены основные положения теории графов, необходимые для решения широкого класса задач в инженерно-технических, экономических, информационных, естественнонаучных и других направлений деятельности.

Теоретические сведения для наглядности иллюстрируются рисунками, таблицами. Даны примеры решения типовых задач.

Учебно-методическое пособие может быть полезно студентам и аспирантам других специальностей, использующих теорию графов и современные методы дискретного анализа в направлении своей подготовки.

# Содержание

<b>Введение.....</b>	<b>4</b>
1 Определения графа .....	5
2 Типы графов .....	6
3 Операции над графами .....	10
4 Маршруты и пути в графах .....	14
5 Связность графа.....	16
6 Изоморфизм графов .....	17
7 Гомеоморфизм графов.....	18
8 Плоские и планарные графы.....	19
8.1 Теорема Л. Эйлера о плоских графах.....	20
8.2 Теорема Понтрягина-Куратовского.....	22
8.3 Теорема Жордана .....	22
9 Способы представления графа.....	24
9.1 Графический способ .....	24
9.2 Аналитический способ .....	24
9.3 Матричные представления графа .....	25
10 Теорема об изоморфизме графов .....	31
11 Характеристики графов .....	33
12 Свойства эйлеровых и гамильтоновых графов .....	36
12.1 Эйлеровы графы .....	36
12.1 Гамильтоновы графы .....	39
13 Расстояния в графах .....	41
14 Ориентированные графы.....	43
14.1 Основные определения .....	43
14.2 Взвешенный ориентированный граф .....	45
14.3 Определение путей экстремальной длины .....	46
14.4 Алгоритм Форда Беллмана нахождения пути минимальной длины .....	48
15 Деревья .....	51
16 Бесконечные графы .....	54
Литература .....	57

## Введение

Начало теории графов как математической дисциплины было положено в первой половине XVIII века Л. Эйлером в его знаменитом рассуждении о Кёнигсбергских мостах, когда им была решена задача о существовании «эйлерового» цикла. Более ста лет эта работа была практически единственной в этой области. Интерес к проблемам в теории графов вырос в середине XIX века в связи с исследованиями в области электротехники, физике кристаллов, структур молекул и т.п. Именно в это время инженер-электрик Г. Кирхгоф использовал графы для решения практических задач о потоках и напряжениях в электрических схемах. Математик А. Кэли, изучая углеводороды, пришёл к задачам описания и перечисления деревьев (графов без циклов).

Большое число популярных в то время головоломок разрешалось именно применением элементов теории графов и поэтому довольно долго учение о графах рассматривалось как несерьезная тема, прикладное значение которой было связано с играми и развлечениями.

Термин «граф» вошел в математическую лексику в 1936 году после выхода в свет монографии Кёнига, в которой впервые графы изучались как самостоятельные математические объекты независимо от их содержания.

Наиболее быстрыми темпами теория графов стала развиваться в второй половине прошлого века, превратившись в один из наиболее развитых разделов математики. Это явилось следствием стремительно расширяющихся областей ее применения в электронике, автоматике, программировании, химии, биологии и во многих других областях науки и техники.

Оказалось, что теория графов – это своеобразный универсальный язык, на котором могут быть сформулированы и решены многие как математические, так и научные задачи. В конце 40–50-х годах XX в. интерес к теории графов стал усиливаться, прежде всего, благодаря развитию вычислительной техники и кибернетики.

В настоящее время трудно указать область человеческой деятельности, в которой нельзя было бы применить методы теории графов. Благодаря наглядности, графы упрощают сложные комбинаторные доказательства, делают обозримыми многие алгебраические структуры, проясняют алгоритмы решения задач и находят применение в разнообразных практических вопросах.

Поэтому теория графов и её многочисленные приложения в настоящее время являются одним из интенсивно развивающихся разделов математики, тесно связанной с информационным технологиям.

## 1 Определения графа

Рассмотрим множество  $V$ , состоящее из соединенных некоторым образом точек  $v_i \in V$ , называемых *вершинами графа*. Граф  $G=G(V,E)$  с множеством вершин  $V$  есть некоторое семейство сочетаний или пар вида

$$E = (v_i, v_j), \quad v_i, v_j \in V$$

указывающие, какие вершины считаются соединенными.

В соответствии с геометрическим представлением графа каждая конкретная пара называется *ребром (дугой)* графа,  $v_i$ , и  $v_j$  - концевые точки.

Можно определить понятие графа иначе, если представить себе некоторое множество точек плоскости  $V$ , называемых *вершинами*, и множество направленных отрезков  $E$ , соединяющих все или некоторые из вершин и называемых *дугами*. Т.е. математически граф  $G$  можно определить как пару множеств  $G=(V, E)$ , где  $E \subseteq V \times V$ . Примерами графа может являться карта автомобильных или железных дорог, схемы соединения электрических цепей и т.п.

Можно считать, что множество направленных дуг  $E$ , соединяющих элементы множества  $V$ , отображают это множество само в себя. Поэтому можно считать граф заданным, если дано множество его вершин  $V$  и способ отображения  $\Gamma$  множества  $V$  в  $V$ , т.е.  $G=(V, \Gamma)$ , где  $\Gamma: V \rightarrow V$ . Таким образом, граф  $G$  есть пара  $(V, \Gamma)$ , состоящая из множества  $V$  и отображения  $\Gamma$ , заданного на этом множестве.

$$G=(V, \Gamma). \quad (1)$$

Так, рис.1 изображен график, вершинами которого являются точки  $a, b, c, d, e, g, h$ , а дугами – отрезки  $(a, a)$ ,  $(c, b)$ ,  $(c, d)$ ,  $(c, e)$ ,  $(d, c)$ ,  $(d, d)$ ,  $(e, d)$ ,  $(g, h)$ . Отображение приведенного графа будет определяться следующим образом:  $\Gamma a=\{a\}$ ;  $\Gamma b=\emptyset$ ;  $\Gamma c=\{b, d, e\}$ ;  $\Gamma d=\{d, c\}$ ;  $\Gamma e=\{d\}$ ;  $\Gamma g=\{h\}$ ;  $\Gamma h=\emptyset$ .

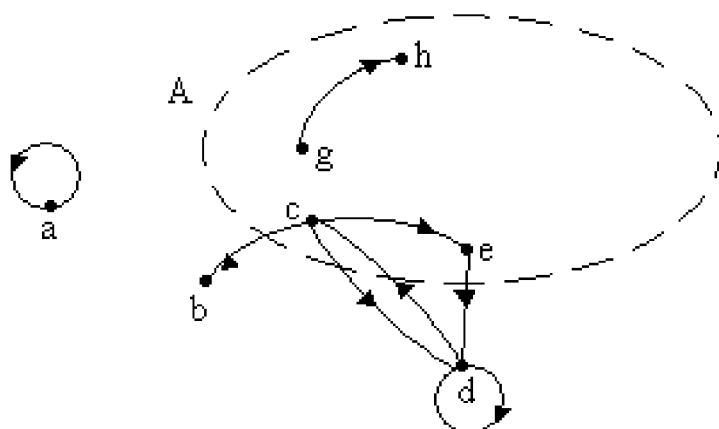


Рис. 1

Нетрудно видеть, что данное определение графа полностью совпадает с определением отношения на множестве.

Из сказанного можно определить, что графом  $G=(V, E)$  называется совокупность двух множеств – непустого множества  $V$  (множества *вершин*) и множества  $E$  его двухэлементных подмножеств множества  $V$  ( $E$  – множество *ребер или дуг*).

## 2 Типы графов

В определении ребра можно принимать или не принимать во внимание порядок расположения двух его концов. Если этот порядок несуществен, т.е. если ребро  $d = (v_i, v_j) = (v_j, v_i)$ , то  $d$  есть неориентированное ребро, если же порядок существен, то  $d$  называют ориентированным ребром, и при этом  $v_i$  – начальная вершина,  $v_j$  – конечная вершина.

Граф называется *ориентированным* или *орграфом*, если ориентированы все его ребра.

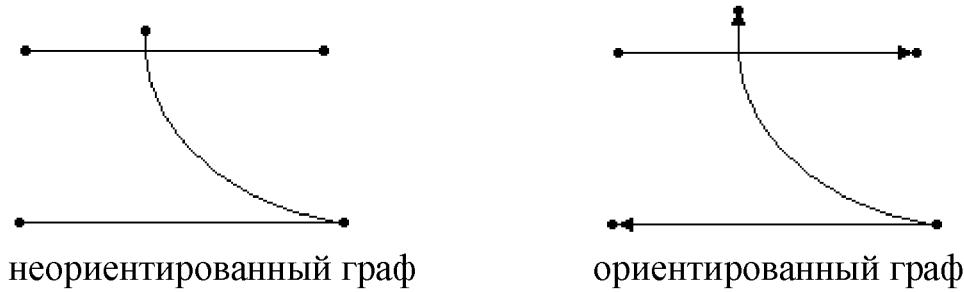


Рис. 2

В ряде случаев имеет место смешанные графы.

Как в случае ориентированного, так и неориентированного ребра говорят, что ребро (дуга)  $E=(v_i, v_j)$  *инцидентно* вершинам  $v_i$  и  $v_j$ , а также, что вершины  $v_i$  и  $v_j$  *инцидентны* ребру (дуге)  $E$ . Две вершины, инцидентные одному ребру (дуге) называются смежными. Вершина, не инцидентная никакому ребру (дуге), называется *изолированной*. Часто имеет смысл учитывать только неизолированные вершины.

Число инцидентных вершине  $u$  ребер называется *степенью (или валентностью) вершины* и обозначается  $\deg(u)$ .

Одним из важнейших положений теории графов является теорема Л. Эйлера о сумме степеней вершин графа.

**2.1 Лемма (Л. Эйлера).** *Сумма степеней вершин графа равна удвоенному количеству его ребер (дуг).*

$$\sum_{i=1}^n \deg v_i = 2 \cdot |E|, \quad (2)$$

где  $n$ -количество вершин графа,  $|E|$ -количество ребер (дуг) графа.

Доказательство. Так как две смежные вершины инцидентны одному ребру (дуге), то при подсчете суммы степеней вершин каждое ребро учитывается два раза.

Граф, состоящий только из изолированных вершин, называется **нульграфом**. Нуль-граф, имеющий  $n$  вершин обозначается как  $N_n$ . На рис. 3 приведены примеры нуль-графов.

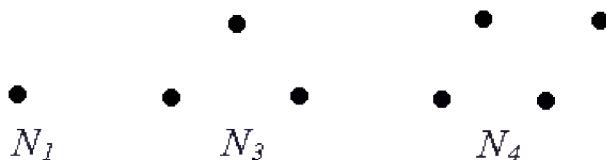


Рис. 3

Наиболее важным случаем является **полный граф**  $G=(V, E)$ , ребрами которого являются всевозможные пары  $(v_i, v_j)$  для двух различных вершин  $v_i$  и  $v_j$  из  $V$ . Полный граф с  $n$  вершинами обозначается  $K_n$ . На рис. 4 приведены полные графы  $K_4$  и  $K_5$  соответственно.

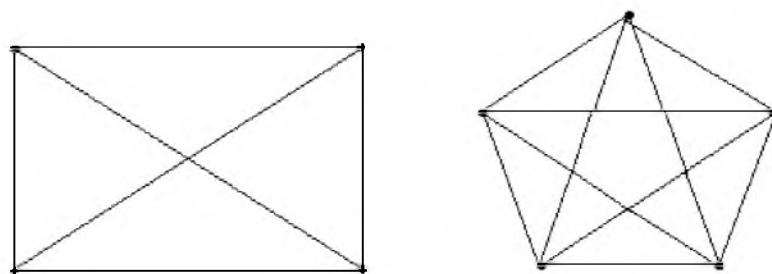


Рис. 4

В ориентированном полном графе имеются пары ребер, по одному в каждом направлении, соединяющие любые две различные вершины  $v_i$  и  $v_j$ . Ребра, у которых обе концевые точки совпадают  $L=(a, a)$  называются **петлей** (рис. 1 вершины  $a, d$ ). Петля обычно считается неориентированной. Можно расширить полный граф до полного графа с петлями, добавляя петлю в каждой вершине. Если среди элементов множества  $E$  имеются петли, то граф называется **псевдографом** (рис. 5 б).

Граф, содержащий одинаковые элементы (кратные ребра) в  $E$ , называются **мультиграфом** (рис. 5 в).

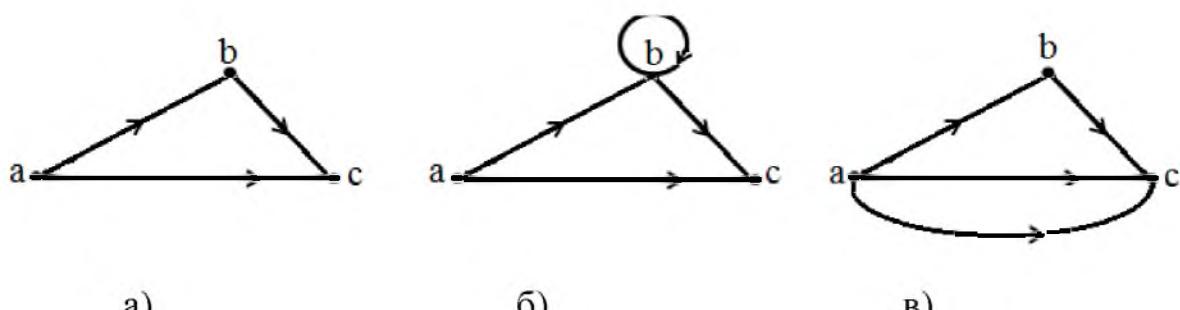


Рис. 5 а) орграф; б) псевдограф; в) мультиграф.

Для каждого ориентированного графа существует *обратный граф*  $G^1$ , получаемый изменением ориентации каждого из ребер графа  $G$  на противоположное.

Для каждого ориентированного графа существует также *соотнесенный неориентированный граф*  $G_u$ , ребрами которого являются ребра графа  $G$ , но уже без ориентации. Иногда удобно превратить неориентированный граф  $G$  в ориентированный граф  $G_d$  при помощи процесса удвоения, состоящего в замене каждого ребра  $G$  парой ребер с теми же вершинами и приписыванием им (ребрам) противоположных ориентаций.

**2.2 Дополнением графа**  $G$  называется граф  $G^*$  с множеством вершин  $V$ , в котором две вершины смежные тогда и только тогда, когда они несмежные в графе  $G$ . Из этого определения получается правило построения графа  $G^*$ , для чего необходимо построить полный граф  $K_n$  и удалить из него все ребра, принадлежащие графу  $G$ . Очевидно, что, например, дополнением полного графа является пустой граф, и наоборот – дополнением пустого графа является полный граф. На рис. 6 б) Приведен граф  $G^*$ , являющейся дополнением графа  $G$  рис. 6 а).

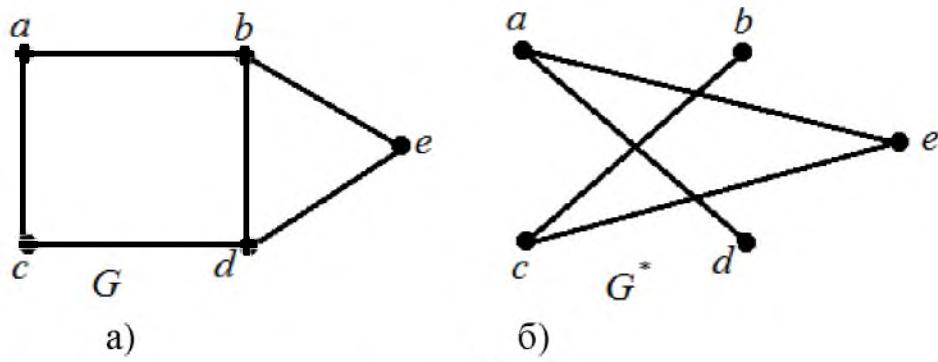


Рис. 6

**2.3 Подграфом**  $H = (V', E')$  графа  $G = (V, E)$  называется граф, в который входит лишь часть вершин графа  $G$ , образующих множество  $V'$ , вместе с ребрами (дугами), соединяющими эти вершины. Или можно определить *подграф* следующим образом: Граф  $H = (V', E')$  называется *подграфом* графа  $G = (V, E)$ , если  $V' \subseteq V$  и  $E' \subseteq E$ . Если  $H$  – подграф графа  $G$ , то говорят, что  $H$  находится в графике  $G$ . Подграф  $H$  графа  $G$  называется *остовным подграфом*, когда  $V' = V$ .

**2.4 Частичным графиком**  $G_{\Delta}$  по отношению к графу  $G = (V, E)$  называется график, содержащий только часть дуг графа  $G$ , т.е. определяемый условием

$$G_{\Delta} = (V, \Delta), \quad (3)$$

где

$$\Delta \subseteq E.$$

Например, если  $G=(V, \Gamma)$  – карта автомобильных дорог России, тогда карта дорог Нижегородской области представляет собой подграф, а карта главных автомагистралей России – частичный граф.

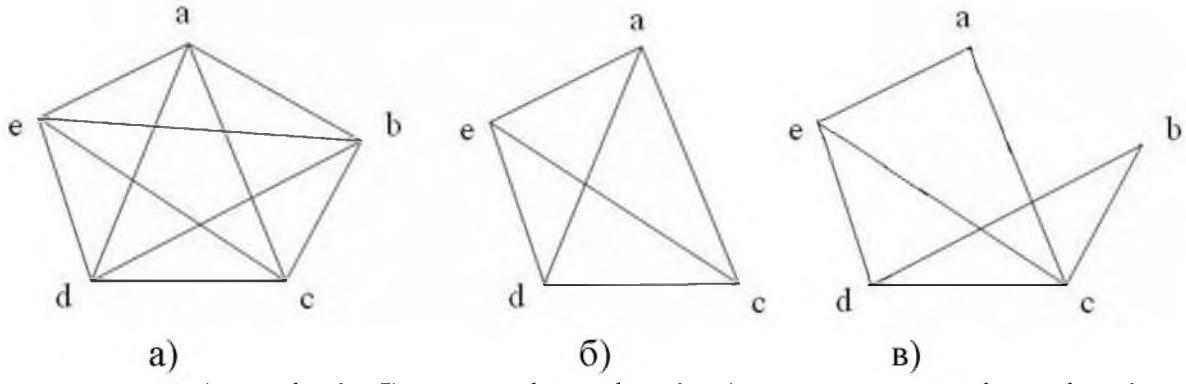


Рис. 7 а) Граф  $K_5$ , б) подграф графа  $K_5$ , в) частичный граф графа  $K_5$ .

**2.5 Регулярные графы.** Граф называется *регулярным*, или *однородным*, если все его вершины имеют одну и ту же степень. Если степень каждой вершины равна  $k$ , то граф называют регулярным графом степени  $k$ . Например, полный граф  $n$ -го порядка есть регулярный граф степени  $k=n-1$ . Например, регулярные графы степени 3 называют кубическими, или 3-х валентными графами. В качестве примера на рис. 8 приведен кубический граф Петерсена.

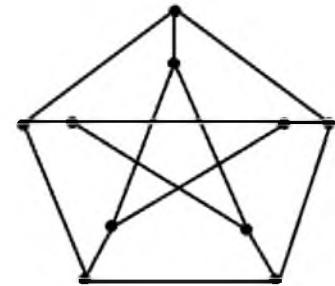


Рис. 8 Граф Петерсена

**2.6 Платоновы графы.** *Платоновыми графами* называются графы, образованные вершинами и ребрами пяти правильных многогранников – платоновых тел: тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра, икосаэдра (Рис. 9).

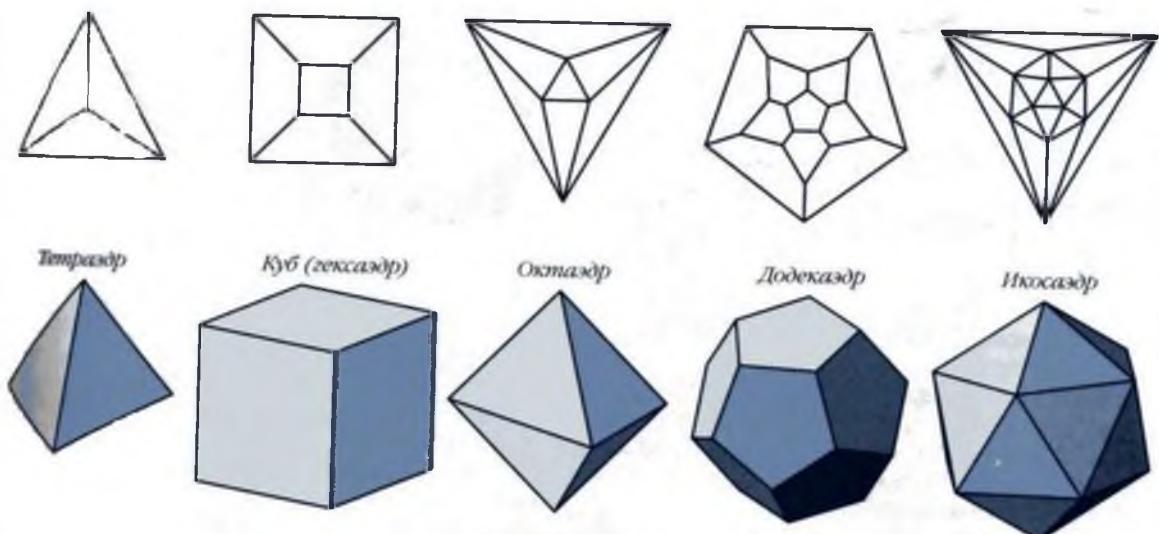


Рис. 9 Платоновы графы и соответствующие им платоновы тела.

**2.7 Двудольные графы.** Граф  $G$  называется *двудольным*, если существует такое разбиение его вершин на два класса, при котором концы каждого ребра лежат в разных классах. Т.е. для двудольного графа выполняется условие:  $V = V_1 \cup V_2$  и  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , где  $V_1$  и  $V_2$  – непустые множества вершин графа.

Если в двудольном графе всякие две вершины из разных классов смежные, то такой граф называется полным двудольным графом. Полный двудольный граф с  $m$  вершинами одного класса и  $n$  вершинами другого класса обозначают как  $K_{m,n}$  (Рис. 10).

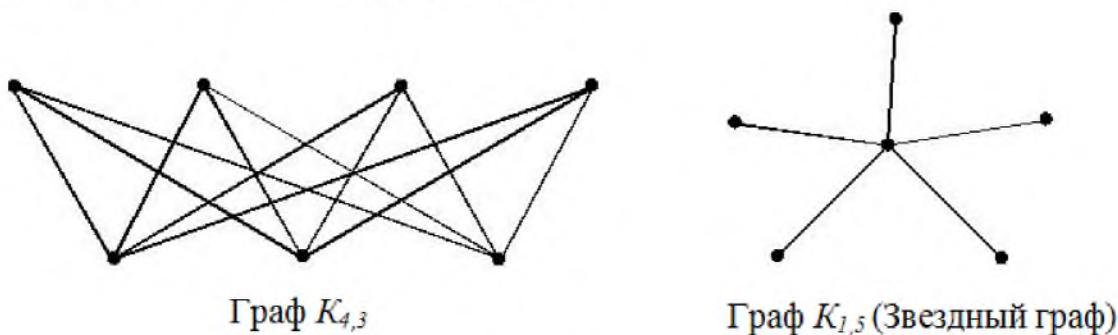


Рис. 10

Полный двудольный граф содержит  $K$  ребер, где

$$K = |V_1| \cdot |V_2|$$

Степень любой вершины множества  $V_1$  полного двудольного графа равна  $|V_2|$ , а степень каждой вершины множества  $V_2$  равна  $|V_1|$ .

Дополнение полного двудольного графа есть несвязный граф, состоящий из двух компонент связности – полного графа  $G_1$  и полного графа  $G_2$ .

Пусть  $n = |V_1|$  и  $m = |V_2|$ . Тогда число ребер  $K_1$  и  $K_2$  в компонентах  $G_1$  и  $G_2$  будут равны соответственно

$$K_1 = C_n^2 = \frac{n \cdot (n-1)}{2}; \quad K_2 = C_m^2 = \frac{m \cdot (m-1)}{2}. \quad (4)$$

Общее число  $K$  ребер дополнения полного двудольного графа равно

$$K = K_1 + K_2 = \frac{n^2 + m^2 - (n+m)}{2}. \quad (5)$$

### 3 Операции над графиками

#### **3.1 Операция удаления ребра**

Пусть  $G = (V, E)$  – граф, и  $e \in E$  – некоторое его ребро. Граф  $G_1 = G - e$  получен из графа  $G$  в результате удаления ребра  $e$ , т.е.  $G_1 = (V, E \setminus \{e\})$ . Следовательно, концы ребра  $e$  не удаляются из множества  $V$ . Также вполне

очевидно, что  $(G - e) - e_i = (G - e_i) - e$ . Действительно, поскольку имеет место тождество  $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$ , то имеем  $G_1 = G - e = (V, E \setminus \{e\})$ .

$$(G - e) - e_i = G_1 - e_i = (V, (E \setminus \{e\}) \setminus \{e_i\}) = (V, E \setminus (\{e\} \cup \{e_i\})) = \\ (V, E \setminus (\{e_i\} \cup \{e\})) = (V, (E \setminus \{e_i\}) \setminus \{e\}) = (G - e_i) - e.$$

Следовательно, если выполняется операция удаления сразу нескольких ребер (дуг), то это можно делать в произвольной очередности, т.к. результат, как мы определили, не зависит от очередности удаления ребер (дуг) в графе.

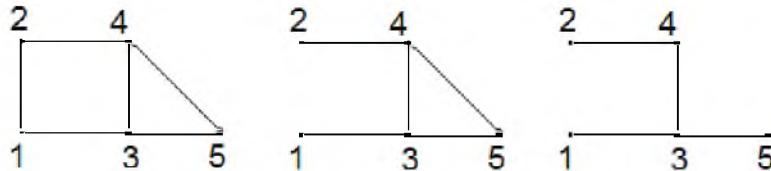


Рис. 11

На рис. 11 приведен пример последовательного удаления 2-х ребер: (1,2) и (4,5).

### 3.2 Операция удаления вершины

Пусть  $G = (V, E)$  – граф, и  $v \in V$  - некоторая его вершина. Граф  $G_1 = G - v$  получен из графа  $G$  в результате удаления вершины  $v$ , т.е.  $G_1 = (V \setminus \{v\}, E')$ , где  $E'$  - множество ребер (дуг) без ребер (дуг), инцидентных удаленной вершине  $v$ , т.е. при удалении вершины  $v$  удаляются все инцидентные ей ребра (дуги). На рис. 12 приведен пример удаления вершины 4 из графа.

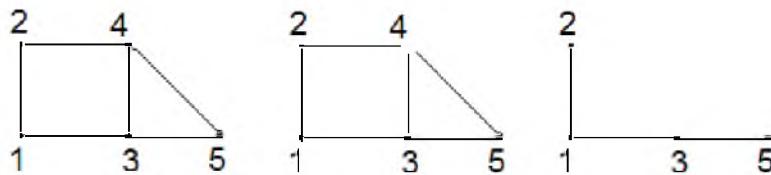


Рис. 12

Нетрудно убедиться, что операция удаления вершины не зависит от порядка, в котором удаляются вершины из графа.

### 3.3 Операция введения ребра

Если  $u, v \in V$  и  $(u, v) \notin E$  в графе  $G = (V, E)$ , то график  $G_1 = G + e = (V, E \cup \{e\})$ , где  $e = (u, v)$ , получен из графа  $G$  введением ребра  $e = (u, v)$ . В силу коммутативности операции объединения множеств последовательность операции добавления ребер в график  $G$  не зависит от порядка, в котором эти ребра добавляются в график, т.е.

$$\forall e, e_i \in E | ((G + e) + e_i) = (G + e_i) + e.$$

### 3.4 Операция введения вершины в ребро

Пусть  $(u, v)$  некоторое ребро графа  $G$ . Добавлением вершины  $w$  в ребро  $(u, v)$  называется операция, в результате которой получается два ребра:  $(u, w)$  и  $(w, v)$ , а ребро  $(u, v)$  удаляется из графа  $G$ .

### 3.5 Операция слияния вершин

Пусть  $G = (V, E)$  граф,  $u, v$  - две его вершины и  $S(u) = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  - множество вершин, смежных с вершиной  $u$ , а  $S(v) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  - множество вершин, смежных с вершиной  $v$ . Граф  $H = G - u - v$ , полученный присоединением новой вершины  $w$  к множеству вершин графа  $H$  и множества ребер вида  $(w, u_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ),  $(w, v_j)$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) называется графом, полученным из  $G$  слиянием вершин  $u$  и  $v$ . На рис. 13 приведен пример слияния вершин 2 и 4.

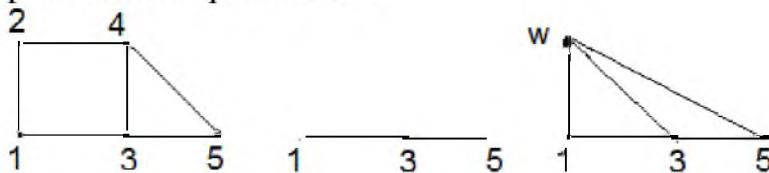


Рис. 13

### 3.6 Операция стягивания ребра

Граф  $H$  называется графом, стягивающимся к графу  $G$ , если граф  $H$  можно получить некоторой последовательностью операции слияния вершин (стягивание ребра). Например, граф Петерсена стягивается к графу  $K_5$ , далее к  $K_4$ , затем к  $K_3$ ,  $K_2$ . Очевидно, что любой непустой граф, отличный от  $K_1$ , стягивается к графу  $K_2$  (Рис. 14). Но не всякий связный граф стягивается к  $K_3$ . Например, простая цепь  $P_n$  не стягивается к  $K_3$ .

Максимум порядков полных графов, к которым стягивается граф  $G$ , называется числом Хадвигера и обозначается  $\chi(G)$ .

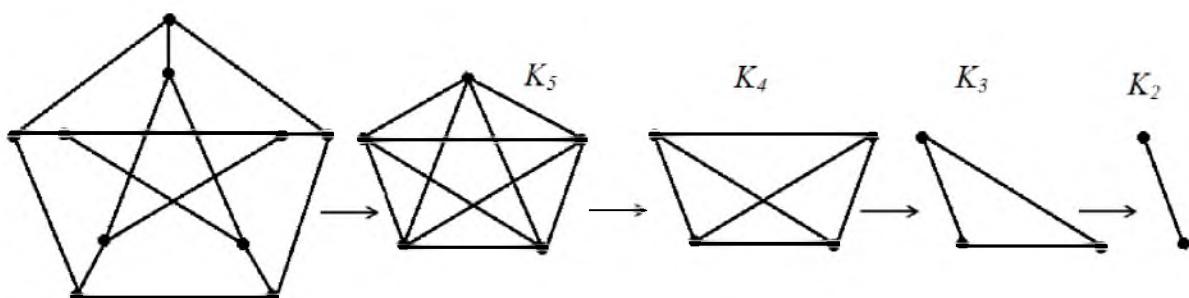


Рис. 14

### 3.7 Операция раздвоения (расщепления) вершины

Пусть  $v$  - некоторая из вершин графа  $G$ . Множество смежных ей вершин произвольным образом разобъем на два класса  $A$  и  $B$ . (Рис. 15)

Далее, удалим вершину  $v$  вместе с инцидентными ей ребрами и добавим две новые вершины  $u$  и  $w$  соединенные ребром  $(u,w)$ . Вершину  $u$  соединим ребром с каждой вершиной множества  $A$ , а вершину  $w$  - с каждой вершиной из множества  $B$ . Таким образом, из графа  $G$  получен новый граф  $G^*$  результате операции расщепления вершины  $v$ .

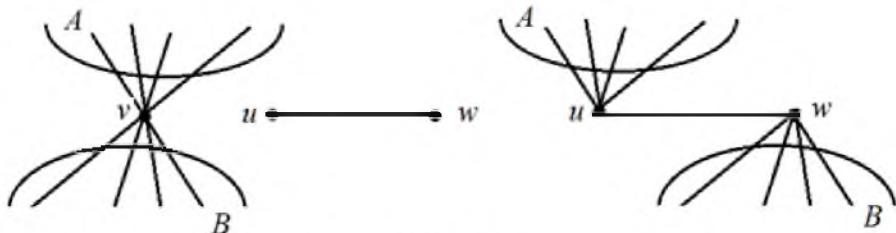


Рис. 15

### 3.8 Операция объединения графов

Граф  $G = G_1 \cup G_2$  получен объединением графов  $G_1 = (V_1, E_1)$  и  $G_2 = (V_2, E_2)$ , если  $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ .

Объединение графов называется дизъюнктивным, если  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .

Граф называется *связным*, если его нельзя представить в виде дизъюнктивного объединения двух подграфов, и несвязным – в противном случае. Всякий несвязный граф можно представить в виде конечного числа связных подграфов, каждый из которых называется компонентом связности. Например, связный регулярный граф степени 2 с  $n$  вершинами называется циклическим графом и обозначается  $C_n$ .

### 3.9 Операция пересечения графов

Пересечением графов  $G_1 = (V_1, E_1)$  и  $G_2 = (V_2, E_2)$  называется граф  $G = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ .

### 3.10 Операция произведения графов

Произведением графов  $G_1 = (V_1, E_1)$  и  $G_2 = (V_2, E_2)$  называется граф  $G = G_1 \times G_2$ , для которого  $V = V_1 \times V_2$ , а множество ребер определяется следующим образом: вершины  $(u_1, u_2)$  и  $(v_1, v_2)$  смежные в  $G$  тогда и только тогда, когда  $u_1 = v_1$ , а  $u_2$  и  $v_2$  смежные в  $G_2$ , или  $u_2 = v_2$ , а  $u_1$  и  $v_1$  смежные в  $G_1$  (Рис. 16)

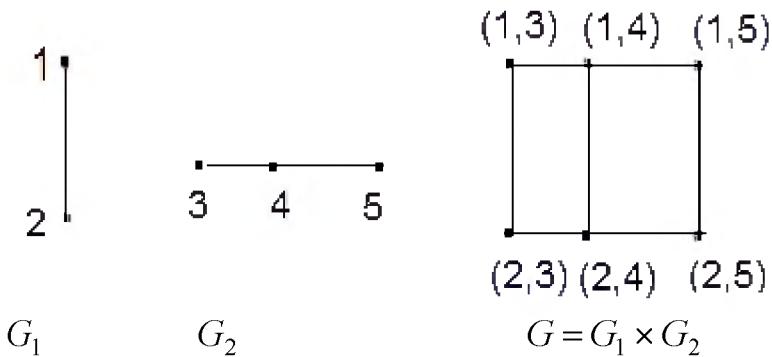


Рис. 16

### 3.11 Операция соединения графов

Пусть  $G_1 = (V_1, E_1)$  и  $G_2 = (V_2, E_2)$  - два графа и  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . Операция соединения графов  $G_1$  и  $G_2$  заключается в том, что множества вершин  $V_1$  и  $V_2$  объединяются, и затем каждая вершина графа  $G_1$  соединяется ребрами с каждой вершиной графа  $G_2$ . На рис. 17 приведен пример получения графа  $W_7$ , называемого колесом, соединением графов  $N_1$  и  $C_6$  ( $C_n$  - условное обозначение регулярного графа степени 2, называемого **циклическим графом**).

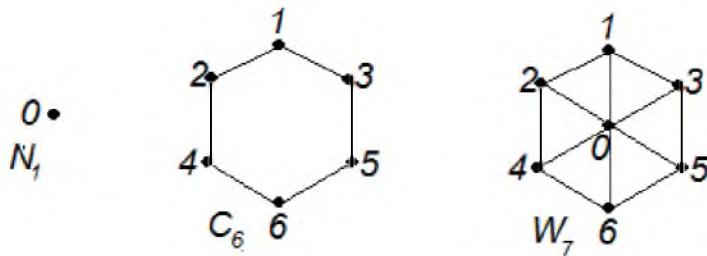


Рис. 17

## 4 Маршруты и пути в графах

### 4.1 Маршруты, циклы в неориентированном графе

**Определение.** *Маршрутом* или *цепью* в неориентированном графе  $G$  называется такая последовательность ребер  $d_1, d_2, \dots, d_n, \dots$ , что каждые соседние два ребра  $d_i$  и  $d_{i+1}$  имеют общую инцидентную им вершину.

Одно и тоже ребро может встречаться в маршруте несколько раз. В конечном маршруте  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  имеется первое ребро  $d_1$  и последнее ребро  $d_n$ . Вершина, инцидентная ребру  $d_1$ , но не инцидентная ребру  $d_2$ , называется началом маршрута, а вершина, инцидентная ребру  $d_n$ , но не инцидентная ребру  $d_{n-1}$ , называется концом маршрута.

Маршрут  $L$ , последовательными вершинами которого являются вершины  $a, b, c, \dots m$  обозначается через  $L=(a, b, c, \dots m)$  или  $L=a-b-c-\dots-m$ , или  $L=a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow \dots \rightarrow m$ .

**Определение.** *Длиной (или мощностью) маршрута* называется число ребер, входящих в маршрут, причем каждое ребро считается столько раз, сколько оно входит в данный маршрут.

Замкнутый маршрут называется *циклом*.

Маршрут (цикл), в котором все ребра различны, называется *простой цепью (простым циклом)*. Маршрут (цикл) в котором все вершины, кроме первой и последней, различны, называется *элементарной цепью (циклом)*.

*Цепь (цикл)* называется *эйлеровой*, если она проходит через все ребра по одному разу. Цепь (цикл) называется *гамильтоновой*, если она проходит через все вершины графа по одному разу.

Граф называется *ациклическим* или *лесом*, если в нем отсутствуют циклы.

**Пример.** В приведенном на рис. 18 выделим маршруты:

$L_1=(d_1, d_2, d_4)$  и  $L_2=(d_1, d_2, d_5, d_6)$ . Длина маршрута  $L_1$  равна 3, а длина маршрута  $L_2$  равна 4. Маршруты  $L_1$  и  $L_2$  есть простая элементарная цепь длины 3 и 4 соответственно, так как все ребра и вершины различны. Маршрут  $L_3=(d_2, d_4, d_3)$  – простой элементарный цикл, так как это замкнутый маршрут, у которого все ребра и все вершины, кроме первой и последней совпадают ( $L_3=b \rightarrow c \rightarrow e \rightarrow b$ ). Маршрут  $L_4=(d_1, d_2, d_4, d_3)$  – цепь, которая является простой (все ребра различны), но не элементарной, т.к. вершина  $b$  встречается дважды ( $L_4=a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow e \rightarrow b$ ). Маршрут  $L_5=(d_1, d_2, d_5, d_6, d_6)$  длины 5 не является ни простой, ни элементарной цепью, так как ребро  $d_6$  встречается дважды и вершина  $d$  также встречается дважды ( $L_5=a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow d$ ).

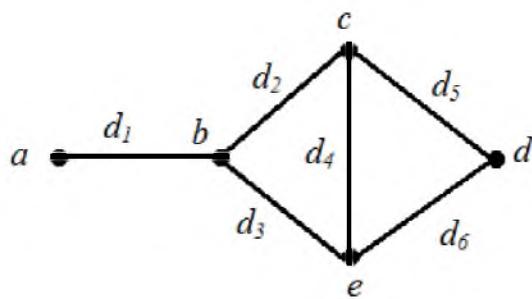


Рис. 18

#### 4.2 Пути, контуры в ориентированном графе

Понятия пути, контура в ориентированном графе аналогичны понятиям маршрута, цикла в неориентированном графе.

**Путем** в ориентированном графе  $G$  называют такую последовательность дуг  $D=(d_1, d_2, \dots, d_k)$ , в которой конец каждой предыдущей дуги совпадает с началом следующей. Путь  $D$ , последовательными вершинами которого являются вершины  $a, b, c, \dots, m$ , обозначается аналогично обозначению маршрута.

**Длиной пути**  $D=(d_1, d_2, \dots, d_k)$  называют число  $l(D)=k$ , равное числу дуг, составляющих путь  $D$ . Иногда каждой дуге  $d_i$  приписывают некоторое число  $l(d_i)$ , называемое **длиной дуги**. Тогда длина пути определяется как сумма длин дуг, составляющих путь

$$l(D) = \sum_{d \in D} l(d). \quad (6)$$

Путь, в котором никакая дуга не встречается дважды, называется **простым**. Путь, в котором никакая вершина не встречается дважды, называется **элементарным**.

**Контур** – это конечный путь  $D=(d_1, d_2, \dots, d_k)$ , у которого начальная вершина  $v_1$  совпадает с конечной  $v_k$ . При этом, контур называется элементарным, если все его вершины различны (за исключением начальной и конечной, которые совпадают). Естественно, контур единичной длины, образованный дугой вида  $(a, a)$ , называется петлей. Так, на рис. 19 а) – путь, (с, е, д, с, б) – контур, (д, д) – петля.

## 5. Связность графа

Две вершины  $v$  и  $u$  графа  $G$  называются **связными**, если они соединены хотя бы одной простой цепью. Если же в графе нет ни одной цепи, ведущей от вершины  $v$  к вершине  $u$ , то эти вершины называются **несвязными**. Например, вершины 1 и 6 графа рис. 19 а) являются связными, т.к. их соединяет цепь 1-7-2-6. Вершины 2 и 3 к связным не относятся, т.к. ни одна цепь их не соединяет.

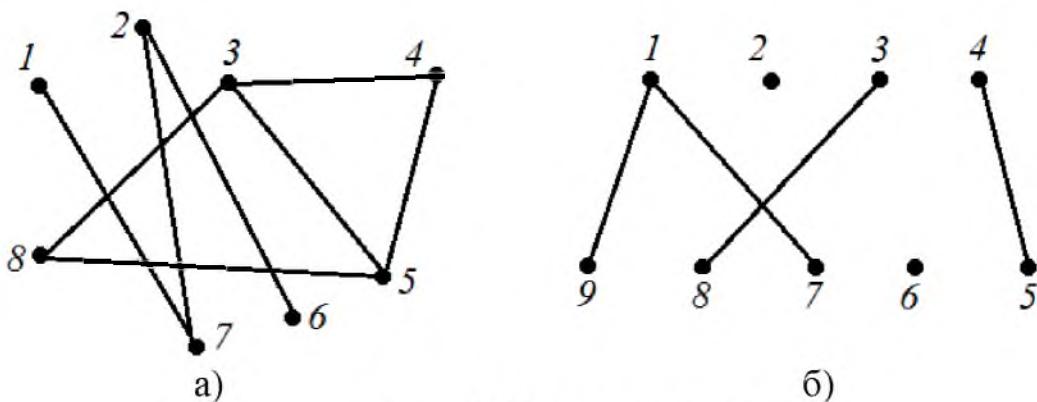


Рис. 19 Несвязные графы

Если в графе каждые две вершины связаны, то такой граф называется связным. Если же граф содержит хотя бы одну пару несвязных вершин, то такой граф называется несвязным. Согласно этому определению графы, изображенные на рис. 19 являются связными, а графы, приведенные на рис.2.8 являются несвязными.

Граф, приведенный на рис. 19 а) состоит из двух компонент связности, а на рис. 19 б) – из пяти компонент связности.

Число компонент, из которых состоит граф, называется *степенью связности*. Граф, приведенный на рис. 19 а) имеет степень связности равную 2, а приведенного на рис. 19 б) – равную 5.

## **6. Изоморфизм графов.**

Графы  $G = (V, E)$  и  $H = (W, F)$  называются *изоморфными*, если между их множествами вершин можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее отношение смежности, т.е. если  $\varphi: V \rightarrow W$ ,  $\psi: E \rightarrow F$  - взаимно однозначные соответствия и если  $\varphi(v_i) = w_k$  и  $\varphi(v_j) = w_m$ , то  $\psi(v_i, v_j) = (w_k, w_m)$ .

Напомним, что взаимно однозначное соответствие можно установить между множествами, имеющими одинаковую мощность. Поэтому вполне очевидно, что здесь  $|V| = |W|$  и  $|E| = |F|$ .

Например, приведенные на рис. 20 графы  $G = (V, E)$  и  $H = (W, F)$  являются изоморфными.

Действительно:  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ ;  $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$ .

$\varphi(v_1) = w_1$ ;  $\varphi(v_2) = w_3$ ;  $\varphi(v_3) = w_6$ ;  $\varphi(v_4) = w_4$ ;  $\varphi(v_5) = w_5$ ;  $\varphi(v_6) = w_2$ .

$\psi(v_1, v_4) = (w_1, w_4)$ ;  $\psi(v_1, v_5) = (w_1, w_5)$ ;  $\psi(v_1, v_6) = (w_1, w_2)$ ;

$\psi(v_2, v_4) = (w_3, w_4)$ ;  $\psi(v_2, v_5) = (w_3, w_5)$ ;  $\psi(v_2, v_6) = (w_3, w_2)$ ;

$\psi(v_3, v_4) = (w_6, w_4)$ ;  $\psi(v_3, v_5) = (w_6, w_5)$ ;  $\psi(v_3, v_6) = (w_6, w_2)$ ;

Очевидно, что отношение изоморфизма графов является отношением эквивалентности.

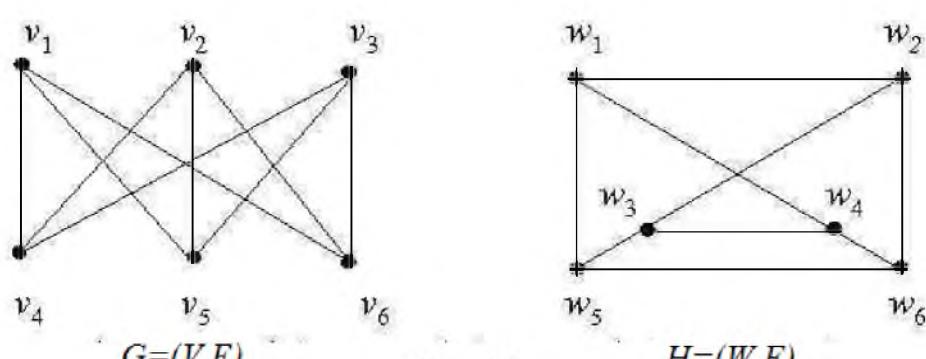


Рис. 20

## 7. Гомеоморфизм графов

**Гомеоморфизм** - одно из важнейших понятий раздела современной математики – топологии, науки, изучающей такие свойства фигур, которые остаются неизменными при любых деформациях, осуществляемых без разрыва и без склеивания. Перед тем как привести определение гомеоморфизма целесообразно вспомнить некоторые элементы теории множеств.

Отображение  $f : A \rightarrow B$  называется *взаимно однозначным*, если в каждую точку множества  $B$  отображается точно одна точка множества  $A$ . Это означает, что, во-первых, никакие две различные точки множества  $A$  не переходят в одну и ту же точку множества  $B$  (не «склеиваются» при отображении  $f$ ) и, во-вторых, каждая точка множества  $B$  поставлена в соответствие некоторой точке множества  $A$  (т.е.  $A$  отображается на всё множество  $B$ , а не на его часть). Для взаимно однозначного отображения  $f : A \rightarrow B$  можно определить *обратное отображение*  $f^{-1} : B \rightarrow A$ , которое каждой точке  $y$  в  $B$  ставит в соответствие точку множества  $A$ , переходящую в  $y$  при отображении  $f$ .

**Определение.** Отображение  $f : A \rightarrow B$  называется *гомеоморфным отображением* (или *гомеоморфизмом*), если оно, во-первых, взаимно однозначно и, во-вторых, взаимно непрерывно, т. е. не только само отображение  $f$  непрерывно, но и обратное отображение  $f^{-1}$  также непрерывно.

Наглядно *гомеоморфизм* можно представлять себе как такое отображение одного множества на другое, которое происходит и без разрывов, и без склеивания. Например, будем считать, что фигуры  $A$ ,  $B$  «изготовлены» из очень прочного и эластичного материала, и будем допускать любые растяжения и искривления этого материала без разрывов и без образования складок и склеек. Если мы сможем при этих условиях «наложить» фигуру  $A$  на  $B$ , то они гомеоморфны. Так, контур треугольника, квадрата, прямоугольника (или, вообще, любого многоугольника), эллипса гомеоморфен окружности. Поверхность шара, поверхность куба, цилиндра – все гомеоморфны между собой. Однако эти поверхности не гомеоморфны тору (который можно наглядно представить себе как поверхность баранки или автомобильной камеры). А, например, отрезок и круг – не гомеоморфны.

Графы также могут быть гомеоморфными.

Пусть задан граф  $G=(V,E)$ ,  $v$  и  $u$  две его смежные вершины, т.е. некоторое его ребро  $(v,u) \in E$ . Заменив это ребро простой цепью из двух

ребер, инцидентных новой вершине  $w$ . В результате число вершин увеличится на единицу, и на единицу увеличится число ребер. Такая операция называется *подразбиением ребра*. Вполне очевидно, что в результате такой операции всегда будут получаться вершины со степенью равной двум (Рис. 21).

**Определение.** Два графа называются *гомеоморфными*, если они могут быть получены с одного и того же графа с помощью операции подразбиением ребра. Приведенные на рис. 21 графы являются гомеоморфными. Вполне очевидно, что гомеоморфизм является отношением эквивалентности.

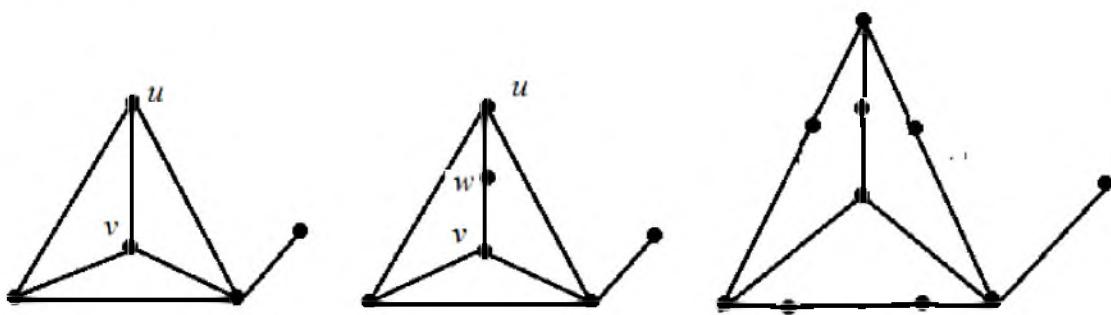


Рис. 21

### 8. Плоские и планарные графы

Часто встречаются ситуации, когда граф необходимо изобразить так, чтобы его ребра (дуги) не пересекались. Например, в радиоэлектронике при изготовлении микросхем печатным способом электрические цепи наносятся на плоскую поверхность изоляционного материала. А так как проводники не изолированы, то они не должны пересекаться. Аналогичная задача возникает при проектировании, например, железнодорожных и других путей, магистралей, где нежелательны переезды.

Граф называется *плоским* если он может быть изображен на плоскости так, что все пересечения ребер являются вершинами  $G$ , т.е., когда его ребра пересекаются только в вершинах.

Всякий граф, изоморфный плоскому графу, называется *планарным*, т.е. граф называется *планарным*, если у него есть плоское изображение. На рис. 22 приведены примеры планарного графа. Приведенный на рисунке 22 б) граф  $K_4$  является планарным, т.к. его можно изобразить в виде, как представлено на рис. 22 в). Заметим, что графы, представленные на рис. 22 б) и в) являются изоморфными.

Часть плоскости, ограниченная со всех сторон ребрами и не содержащая внутри себя ни вершин, ни ребер, называется *гранью*.

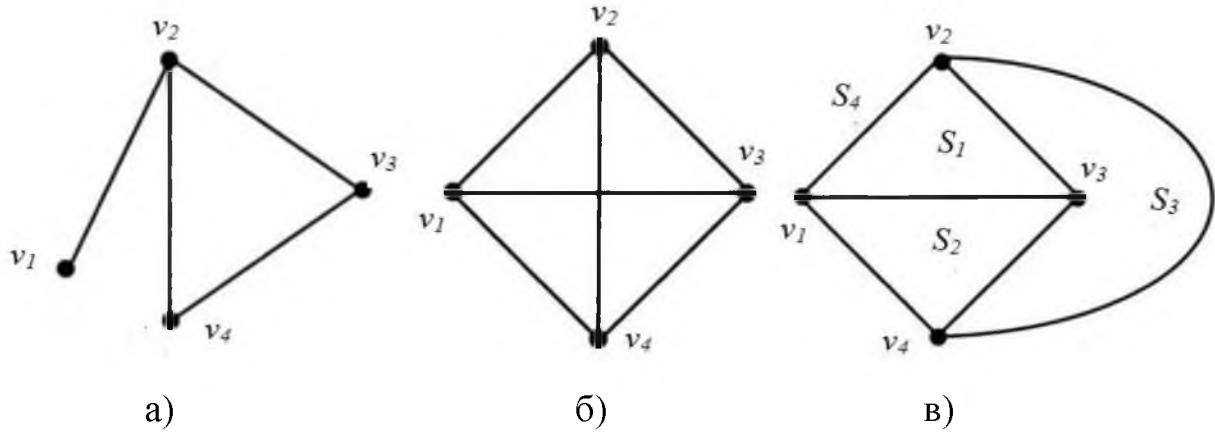


Рис. 22

Приведенный на рис 22 в) граф, имеет четыре грани: три *внутренних* –  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ , и одну *внешнюю* (бесконечную) –  $S_4$ . Отметим, что бесконечную грань имеет любой плоский граф.

Всякая петля в графе образует отдельную грань. Два кратных ребра также образуют отдельную грань. Например, граф на рис. 23 содержит семь граней, из которых  $S_5$  и  $S_6$  образованы петлями,  $S_3$  и  $S_4$  – кратными ребрами.

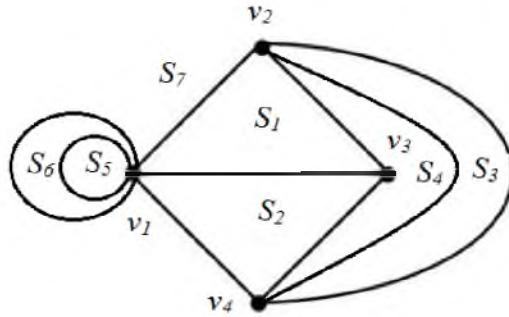


Рис. 23

### 8.1 Теорема Л. Эйлера о плоских графах.

В 1752 году Л. Эйлер доказал теорему о плоских графах.

Пусть число вершин связного плоского графа  $G$  равно  $n$ , число его ребер –  $r$  и число его граней –  $q$ . Тогда

$$n+q=r+2. \quad (7)$$

Доказать эту теорему можно методом индукции по числу ребер в графике. При  $r=0$  теорема справедлива, т.к. график содержит только одну вершину и одну грань. Допустим, что теорема справедлива для графа, имеющего  $r$  ребер. Добавим к нему еще одно ребро  $a$ . Если это петля, то число граней увеличится на единицу, а число  $n$  останется неизменным и равенство (7) остается справедливым. Если ребро соединяет разные вершины, то число граней увеличится на единицу и равенство (7) по-прежнему не нарушится. Если ребро  $a$  соединяет какую-либо вершину с  $(n+1)$ -ой (т.е. добавленной) вершиной, то число граней не изменится и равенство (7) также не нарушится. Других случаев нет и, следовательно, равенство (7) справедливо, т.е. теорема доказана.

Например, для графа рис. 23 имеем:  $n=4$ ,  $q=7$ ,  $r=9$ . В соответствии с теоремой Л. Эйлера получаем очевидное равенство:  $4+7=9+2$ .

Формула Л. Эйлера справедлива и для многокомпонентных графов:

$$n+q=r+k+1, \quad (8)$$

где  $k$ -число компонент связности.

Например, для представленного на рис. 24 несвязного графа имеем:

$$n=8, q=6, r=11, k=2. \text{ В соответствии с (8) получаем: } 8+6=11+2+1.$$

Замечание. Очень часто отношение (7) записывают в виде  $n-r+q=2$  и называют тождеством Л. Эйлера.

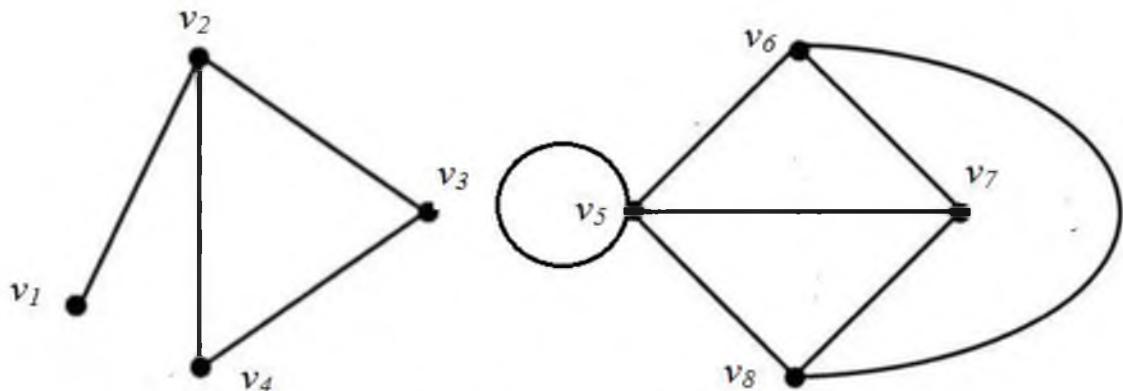


Рис. 24

Следствие 1. Если  $G$  связный планарный граф с  $r$  ребрами и  $n \geq 3$  вершинами, то

$$r \leq 3n-6. \quad (9)$$

Доказательство. Поскольку каждая грань графа ограничена не менее, чем тремя ребрами и каждое ребро ограничивает не более двух граней, то очевидно, что  $3q \leq 2r$ , и тогда с учетом (7) получаем  $3(r+2-n) \leq 2r$ , откуда и получаем, что  $r \leq 3n-6$ .

Следствие 2. Граф  $K_5$  не является планарным.

Доказательство. Пусть граф  $K_5$  планарный. Имеем для  $K_5$   $n=5, r=10$ . Согласно выражению (9) получаем  $10 < 9$ , что является очевидным противоречием. Следовательно граф  $K_5$  не является планарным.

Следствие 3. Граф  $K_{3,3}$  не является планарным.

Доказательство. Для графа  $K_{3,3}$  характерно, что каждая его грань ограничена как минимум четырьмя ребрами и, значит,  $4q \leq 2r$ . Выражая из (7) значение  $q$ , получаем, что должно выполняться условие  $r \leq 2n-4$ . Так как для графа  $K_{3,3}$   $n=6, r=9$ , получаем  $9 > 8$ , что является противоречием, и следовательно, граф  $K_{3,3}$  не является планарным.

Следует отметить, что имеются и другие способы доказательства ‘непланарности’ графов  $K_5$  и  $K_{3,3}$ .

Из вышеприведенного следуют два важных очевидных утверждения:

1. Всякий подграф планарного графа также планарный;
2. Если граф включает непланарный подграф, то и сам граф непланарный.

Из последнего утверждения следует, что всякий граф, содержащий  $K_5$  или  $K_{3,3}$  как подграфы, будет непланарный.

Будет важно заметить, что графы  $K_5$  или  $K_{3,3}$  – единственные непланарные графы в том смысле, что всякий непланарный граф включает один из них как подграф.

## 8.2 Теорема (критерий) Понtryгина-Куратовского. (без доказательства)

*Граф планарный тогда и только тогда, когда он не имеет подграфов, гомеоморфных  $K_5$  или  $K_{3,3}$ .*

В общем случае, если пользоваться только методом сплошного перебора, то в соответствии с критерием Понtryгина-Куратовского необходимо выполнить  $C_n^6$  проверок для отыскания двудольного подграфа  $K_{3,3}$ , и  $C_n^5$  проверок для отыскания полного графа  $K_5$ . Если этих подграфов в исходном графе не обнаружится, то данный граф является планарным и тогда можно приступить к поиску вариантов его плоского представления.

Из теоремы Понtryгина-Куратовского следует такой критерий планарности графа:

*Граф планарный тогда и только тогда, когда он не имеет подграфов, которые стягиваются к графикам  $K_5$  или  $K_{3,3}$ .*

## 8.3 Теорема Жордана

**Жордановской кривой** на плоскости называется непрерывная кривая линия без самопересечений. **Жорданова кривая**, начало и конец которой совпадают, называется замкнутой жордановской кривой. Жордановская кривая может быть определена на различных поверхностях: на плоскости, в трехмерном пространстве, на сферической поверхности и т.п.

**Теорема 8.3.1 (Жордана)** (без доказательства). *Если  $L$  – замкнутая жордановская кривая на плоскости, а  $a$  и  $b$  – две разные точки этой кривой, то всякая жордановская кривая, соединяющая точки  $a$  и  $b$  либо полностью лежит внутри  $L$ , кроме точек  $a$  и  $b$ , либо вне кривой  $L$ , кроме точек  $a$  и  $b$ , либо пересекает кривую  $L$  в некоторой точке, отличной от точек  $a$  и  $b$  (рис. 25).*

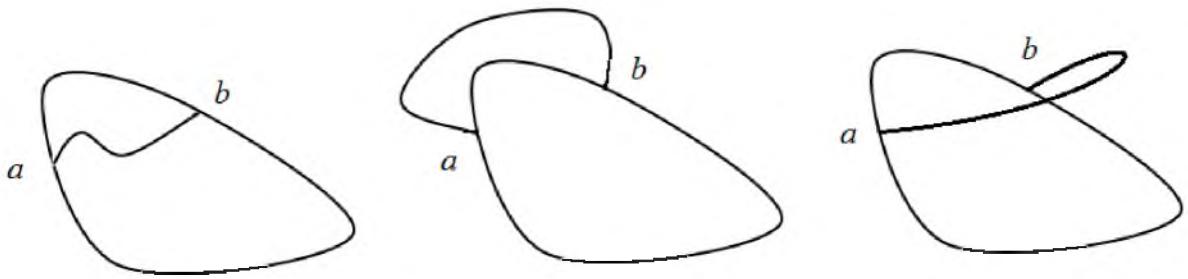


Рис. 25

Если существует взаимно однозначное отображение вершин и ребер графа  $G$  соответственно в точки пространства  $R$  и жордановские кривые этого пространства такие, что кривые, соответствующие разным ребрам, пересекаются только в инцидентных этим ребрам вершинах, то говорят, что граф  $G$  укладывается в пространстве  $R$ .

**Теорема 8.3.2** *Всякий граф укладывается в трехмерном пространстве.*

Доказательство. Разместим все вершины рассматриваемого графа  $G=(V,E)$  на оси  $OX$  и через которую проведем пучок плоскостей, количество которых равно  $|E|$ . Каждое ребро  $(u,v) \in E$  изобразим некоторой кривой, проходящей через вершины  $u$  и  $v$  в соответствующей плоскости. Поскольку все ребра будут лежать в разных плоскостях, то они могут пересекаться только в инцидентных им ребрам, и, следовательно, граф укладывается в трехмерном пространстве. Теорема доказана.

**Теорема 8.3.3** *Граф укладывается на сфере тогда и только тогда, когда он планарный.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы достаточно рассмотреть стереографическую проекцию (рис. 26). Пусть график  $G$  уложен на сфере. Проведем плоскость  $Q$ , касательную к сфере, так, чтобы северный полюс  $N$  (точка, диаметрально противоположная точке касания) не лежал на ребре и не совпадал с вершиной графа  $G$ . Теперь рассмотрим график  $G'$ , полученный стереографической проекцией графа  $G$  из точки  $N$  на плоскость  $Q$ . Поскольку существует биективное соответствие между точками сферы, отличными от  $N$ , и их стереографическими проекциями, то график  $G'$  плоский и изоморфен графу  $G$ . Следовательно,  $G$  — планарный график.

Обратное утверждение доказывается аналогично с учетом установленной биекции.

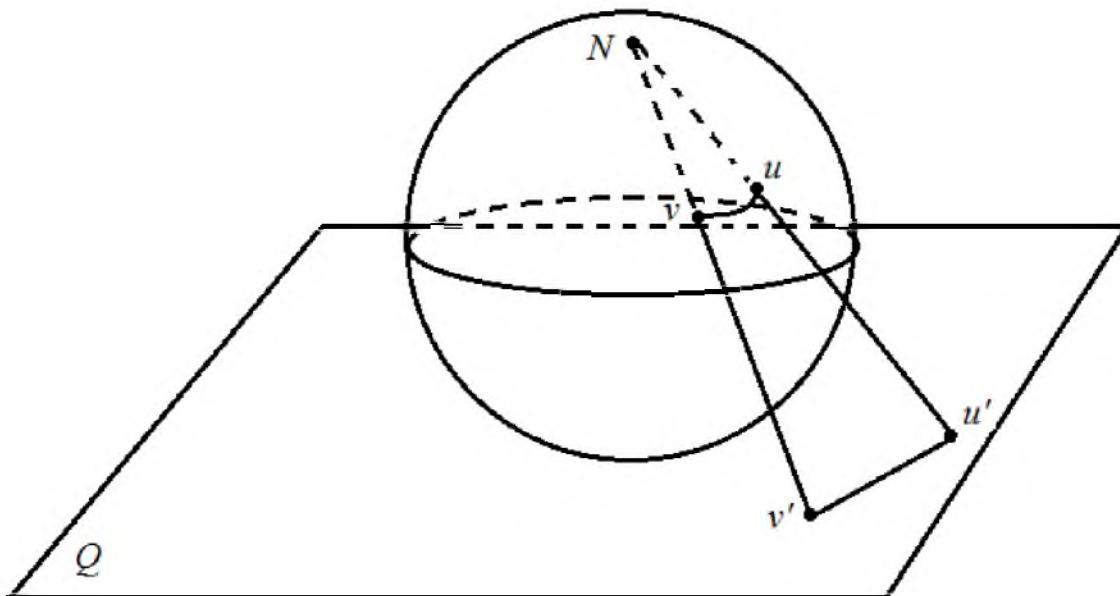


Рис. 26

## **9. Способы представления графов.**

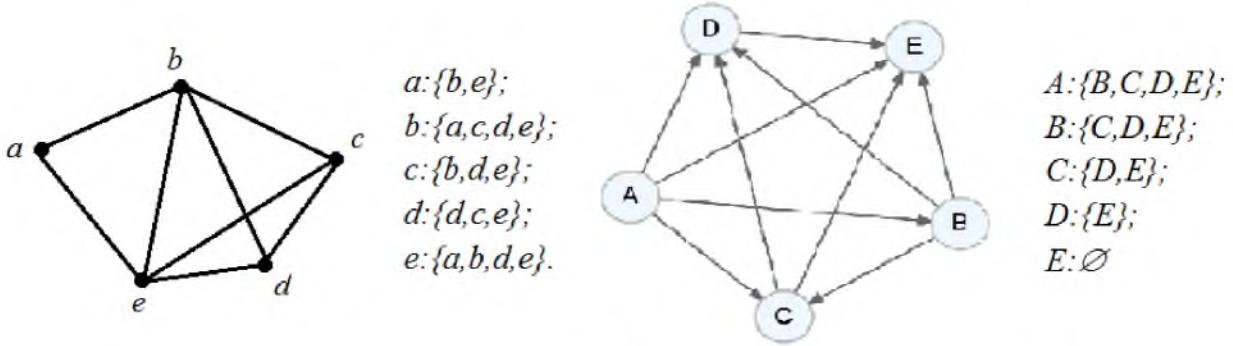
Основными способами задания графа является: *графический, аналитический, матричный*. Выбор способа задания графа зависит от многих факторов, как, например, наглядности, использования специальных алгоритмов решения графа или его обработки и т.п.

**9.1 Графический способ** представления графа заключается в представлении заданного графа на плоскости в виде условного рисунка множества точек, отождествляющих вершины графа, и соответствующих линий, отождествляющие ребра или дуги. Естественно, если график ориентированный, то указывается направление соответствующих дуг.

**9.2 Аналитический способ** задания графа заключается в виде перечисления множества его вершин и множества ребер (дуг), определяющих связи между вершинами.

Примером аналитического способа задания графа является список смежности, при котором каждой вершине графа сопоставляется список смежных ей вершин.

На рис. 27 приведен пример задания неорграфа *a*) и орграфа *б*) списком смежности.



**9.3 Матричные представления** графа являются наиболее удобными и, главное, эффективными способами их представления, т.к. эта форма представления является алгебраической и позволяет определять структурные свойства соответствующего графа. Основными матрицами, полностью описывающими структуру графа, являются **матрица смежностей** и **матрица инциденций**. Также следует отметить, что эти матричные представления графа, наиболее удобны для его обработки средствами вычислительной техники.

Как было уже определено, вершины  $v_i$  и  $v_j$  орграфа являются смежными, если они различны и если существует дуга, идущая из  $v_i$  в  $v_j$  или наоборот.

Дугу и называют инцидентной вершине  $v_i$ , если она заходит в эту вершину или исходит из нее.

**9.3.1 Матрицей смежности орграфа**  $R = [r_{i,j}]_n^n$  графа  $G = (V, E)$  называется квадратная матрица порядка  $n$  ( $n$  – число вершин графа), элементы которой  $r_{i,j}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ;  $j=1, 2, \dots, n$ ) определяются следующим образом:

$$r_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если существует дуга из } v_i \text{ в } v_j; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (10)$$

Заметим, что матрица смежности мультиграфа строится аналогично, и если из вершины  $v_i$  исходят  $m$  дуг в вершину  $v_j$ , то соответственно в матрице смежности данного мультиграфа элемент  $r_{i,j}$  имеет значение  $m$ .

Матрица смежности полностью определяет структуру графа. Возведем матрицу смежности орграфа в квадрат. Тогда элемент  $r_{i,j}^2$  матрицы  $R^2$  определяется по формуле:

$$r_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^n r_{i,k} \cdot r_{k,j}. \quad (11)$$

Слагаемое  $r_{i,k} \cdot r_{k,j} = 1$  тогда и только тогда, когда  $r_{i,k} = 1$  и  $r_{k,j} = 1$ , в противном случае слагаемое  $r_{i,k} \cdot r_{k,j} = 0$ . Так как из равенства  $r_{i,k} = r_{k,j} = 1$  следует существование пути длины два (пути, проходящего через две дуги) из вершины  $v_i$  в вершину  $v_j$ , проходящего через вершину  $v_k$ , то  $r_{i,j}^2$  равно числу путей длины два, идущих из  $v_i$  в  $v_j$  через  $v_k$ .

Если  $r_{i,j}^p$  является элементом матрицы  $R^p$ , то  $r_{i,j}^p = k$  - есть количество путей длины  $p$ , идущих из  $v_i$  в  $v_j$ .

**Пример.** Пусть задан граф  $G = (V, E)$ , представленный на рис. 28.

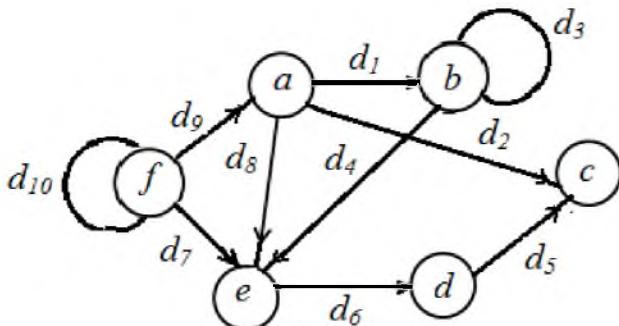


Рис. 28

Построить матрицу смежности. Определить количество путей длины два и три.

Решение.

В соответствии с формулой 11 матрица смежности заданного графа будет иметь вид как представлено на рис. 29.

Для определения путей длины два полученную матрицу  $R$  возведем в квадрат (рис. 30), а для определения путей длины два - в куб (рис. 31)

$$R = \begin{array}{|cccccc|} \hline & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ f & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Рис. 29

$$R^2 = \begin{array}{|cccccc|} \hline & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Рис. 30

Из матрицы  $R^2$  видно, что, например, из вершины  $b$  в вершину  $d$  существует один путь длины два:  $d = (b, b), (b, d)$ ; а, например, из вершины  $f$  в вершину  $b$  - два пути длины два:  $d_1 = (f, f), (f, e)$  и  $d_2 = (f, a), (a, e)$ .

$$R^3 = \begin{array}{|c|cccccc|} \hline & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Аналогично, из матрицы  $R^3$  получаем, что из вершины  $b$  в вершину, например,  $e$  существует один путь длины три –  $d=(b,b),(b,b),(b,e)$ , а из  $f$  в вершину  $e$  – три пути длины три:  $d_1=(f,f),(f,f),(f,e)$ ;  $d_2=(f,f),(f,a),(a,e)$ ;  $d_3=(f,a),(a,b),(b,e)$ .

Рис. 31

**9.3.2 Матрицей смежности неорграфа**  $R=[r_{i,j}]_n^n$  графа  $G=(V,E)$  называется квадратная матрица порядка  $n$  ( $n$  – число вершин графа), элементы которой  $r_{i,j}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ;  $j=1, 2, \dots, n$ ) определяются следующим образом:

$$r_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } (v_i, v_j); \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (12)$$

Т.е. матрица смежности неорграфа, очевидно, будет симметрична относительно главной диагонали.

**Пример.** Построить матрицу смежности для графа рис.32.

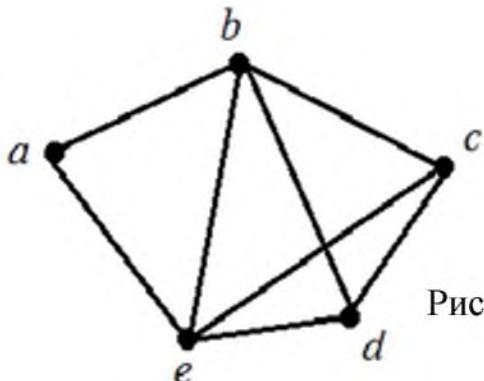


Рис. 32

$$R = \begin{array}{|c|ccccc|} \hline & a & b & c & d & e \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ c & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ d & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ e & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Матрица смежности неорграфа приведенного на рис. 32

Если данную матрицу возвести в квадрат, то получим матрицу путей длины два, которая будет иметь вид:

$$R^2 = \begin{array}{|c|ccccc|} \hline & a & b & c & d & e \\ \hline a & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ b & 1 & 4 & 2 & 2 & 3 \\ c & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ d & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ e & 1 & 3 & 2 & 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Как видно из матрицы, количество путей длины два из вершины  $b$  в вершину  $b$  равно 4. Действительно это так:  $d_1=(b,a), (a,b)$ ;  $d_2=(b,c), (c,b)$ ;  $d_3=(b,d), (d,b)$ ;  $d_4=(b,e), (e,b)$ . А число путей длины два из вершины  $b$  в вершину  $e$  равно трем:  $d_1=(b,c), (c,e)$ ;  $d_2=(b,a), (a,b)$ ;  $d_3=(b,d), (d,e)$ .

**9.3.3 Матрицей инциденций орграфа**  $S = [s_{i,j}]_n^m$  называется прямоугольная матрица размерности  $n \times m$  ( $n$ -число вершин,  $m$  – число дуг), элементы которой  $s_{i,j}$  ( $i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}$ ) определяются следующим образом:

$$s_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } d_j \text{ исходит из вершины } v_i; \\ -1, & \text{если дуга } d_j \text{ заходит в вершину } v_i; \\ 0, & \text{если дуга } d_j \text{ не инцидентна вершине } v_i; \\ 2, & \text{если дуга } d_j \text{ образует петлю } (v_i, v_i). \end{cases} \quad (13)$$

Если граф  $G$  не содержит петель, то каждый столбец матрицы  $S$  содержит единственный элемент, равный 1 (дуга имеет начало) и единственный элемент, равный  $-1$  (дуга имеет конец), а остальные элементы равны нулю. Если же дуга образует петлю, инцидентную вершине  $v_i$ , то соответствующий элемент матрицы равен 2, а остальные элементы - нулю.

**Пример.** Построить матрицу инциденций для графа рис. 28

Решение. В соответствии с 13 получаем прямоугольную матрицу:

$$S = \begin{array}{c|cccccccccc} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & d_7 & d_8 & d_9 & d_{10} \\ \hline a & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ b & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Для неориентированного графа, матрица инциденций определяется так же, за исключением того, что все элементы, равные  $-1$ , заменяются на 1.

#### 9.3.4 Матрица Кирхгофа

Еще одной формой матричного представления неориентированных графов является **матрица Кирхгофа**.

Пусть  $G = (V, E)$  - граф порядка  $n$  и  $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ . Матрицу  $B(G)$  для графа  $G$  определим следующим образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если } (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{если } i \neq j \text{ и } (v_i, v_j) \notin E \\ \deg(v_i), & \text{если } i = j \end{cases} \quad (14)$$

Матрица  $B(G)$  называется матрицей Кирхгофа графа  $G$ . Сумма элементов каждой строки и каждого столбца этой матрицы равна нулю. На рис 33 приведен граф и соответствующая ему матрица Кирхгофа.

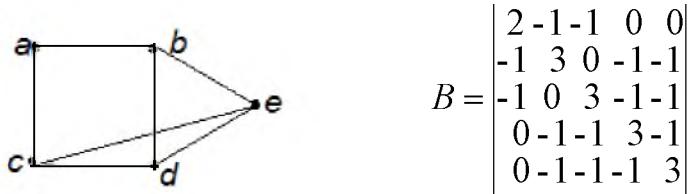


Рис. 33

### 9.3.5 Достижимость и контродостижимость

Вершина графа  $v_j$  называется достижимой из вершины  $v_i$  того же графа, если существует по крайней мере один путь из  $v_i$  в  $v_j$ .

Множество вершин  $R(v_i)$ , достижимых из некоторой вершины  $v_i \in V$ , определяется следующим выражением:

$$R(v_i) = \{v_i\} \cup \Gamma(v_i) \cup \Gamma^2(v_i) \cup \dots \cup \Gamma^p(v_i) \quad (15)$$

Действительно, первым элементом множества  $R(v_i)$  является вершина  $v_i$ , которая достижима из себя самой с помощью пути длины нуль;  $\Gamma(v_i)$  – множество вершин, достижимых из  $v_i$  с использованием путей длины один;  $\Gamma^2(v_i)$  – множество вершин, достижимых из  $v_i$  с использованием путей длины два и т.д.;  $\Gamma^p(v_i)$  – множество вершин, достижимых из  $v_i$  с использованием путей длины  $p$ . Таким образом, множество  $R(v_i)$  получается путем последовательного выполнения слева направо операции объединения в выражении 15 до тех пор, пока мощность текущего множества не перестанет увеличиваться при очередной операции объединения. С этого момента последующие операции объединения не будут давать новых элементов множеству  $R(v_i)$ . Число объединений, которые необходимо выполнить, зависит от графа  $G$ . Но если граф конечен, то  $p < n$ , где  $n$  – число вершин графа. **Отношение достижимостей графа** задается с помощью соответствующей ему **матрицы достижимостей**.

**Матрицей достижимостей графа** называется квадратная матрица  $D = [d_{i,j}]_n^n$  порядка  $n$ , элементы которой определяются как:

$$d_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j \in R(x_i), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (16)$$

**Пример.** Построить матрицу достижимостей графа  $G$ , представленного на рис. 34.

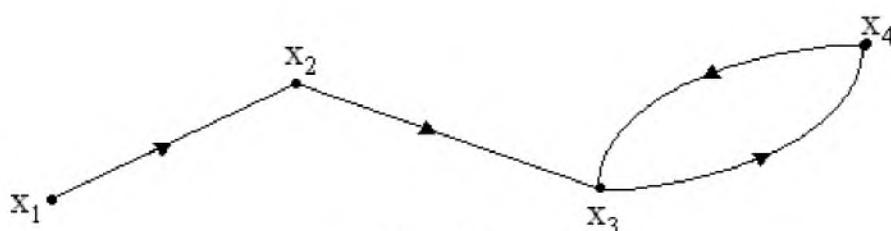


Рис. 34

Решение.  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ;  $\Gamma(x_1) = \{x_2\}$ ;  $\Gamma(x_2) = \{x_3\}$ ;  $\Gamma(x_3) = \{x_4\}$ ;  $\Gamma(x_4) = \{x_3\}$ .

$$D(x_1) = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \{x_3\} \cup \{x_4\} \cup \{x_3\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\};$$

$$D(x_2) = \{x_2\} \cup \{x_3\} \cup \{x_4\} \cup \{x_3\} = \{x_2, x_3, x_4\};$$

$$D(x_3) = \{x_3\} \cup \{x_4\} \cup \{x_3\} = \{x_3, x_4\};$$

$$D(x_4) = \{x_4\} \cup \{x_3\} \cup \{x_4\} = \{x_3, x_4\}.$$

Следовательно, матрица достижимостей имеет вид:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что элементы  $d_{i,i}=1$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , так как каждая вершина достижима из себя самой.

Для определения множества вершин  $Q(v_i)$  из которых достижима вершина  $v_i$ , введено понятие **множества контрдостижимости графа**. Отношение контрдостижимости задается с помощью матрицы контрдостижимостей графа:

**Матрица контрдостижимостей** (обратных достижимостей)  $Q = [q_{i,j}]_n^n$  определяется следующим образом:

$$q_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } v_j \in Q(v_i); \\ 0 - \text{в противном случае}, & \end{cases} \quad (17)$$

где  $Q(v_i)$  – множество таких вершин  $v_j \in V$ , из которой достижима вершина  $v_i$ :

$$Q(v_i) = \{v_i\} \cup \Gamma^{-1}(v_i) \cup \Gamma^{-2}(v_i) \cup \dots \cup \Gamma^{-P}(v_i), \quad (18)$$

где  $\Gamma^{-1}(v_i)$  – множество вершин, из которых достижима вершина  $v_i$  с использованием пути длины единица;  $\Gamma^{-2}(v_i)$  – множество вершин, из которых достижима вершина  $v_i$  с использованием пути длины два и т.д. Операция объединения в выражении (18) выполняется слева направо до тех пор, пока очередное объединение не перестанет изменять “текущее множество”.

**Пример.** Построить матрицу контрдостижимостей  $Q$  для графа  $G$  рис. 1.33.

$$\underline{\text{Решение.}} \quad Q(x_1) = \{x_1\}; \quad Q(x_2) = \{x_2\} \cup \{x_1\} = \{x_1, x_2\};$$

$$Q(x_3) = \{x_3\} \cup \{x_2, x_4\} \cup \{x_1, x_3\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\};$$

$$Q(x_4) = \{x_4\} \cup \{x_3\} \cup \{x_2, x_4\} \cup \{x_1, x_3\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}.$$

Матрица контрдостижимостей будет иметь вид:

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Из определения матриц достижимостей  $D$  и матрицы контрдостижимостей  $Q$  следует, что  $Q=D^T$ . Так как  $D(v_i)$  является множеством вершин, достижимых из  $v_i \in V$ , а  $Q(v_j)$  – множество вершин, из которых достижима вершина  $v_j$ , то  $D(v_i) \cap Q(v_j)$  – множество таких вершин, каждая из которых принадлежит по крайней мере одному пути, идущему от  $v_i$  к  $v_j$ . Эти вершины называются существенными (неотъемлемыми) относительно двух концевых вершин  $v_i$  и  $v_j$ . Вершины  $v_k \notin D(v_i) \cap Q(v_j)$  называются несущественными (избыточными), так как их удаление не влияет на пути от  $v_i$  к  $v_j$ .

Граф с заданными матрицами достижимостей и контрдостижимостей может интерпретировать модель, в которой вершины есть информационные источники, а дуги – каналы связи. В этом случае матрица достижимостей определяет пути от источника информации к потребителям, а матрица контрдостижимостей наоборот – от каких источников существуют пути получения информации.

## **10. Теорема об изоморфизме графов.**

Пусть  $G=(V,E)$  и  $H=(W,F)$  – графы и  $\varphi:V \rightarrow W$  – взаимно-однозначное соответствие. (Заметим, что здесь  $|V|=|W|$ ). Как уже было определено ранее, отображение называется изоморфизмом графов  $G$  и  $H$ , если для любых вершин  $u$  и  $v$  графа  $G$  их образы  $\varphi(u)$  и  $\varphi(v)$  смежные в графе  $H$  тогда и только тогда, когда  $u$  и  $v$  смежные в  $G$ . Если такое отображение существует, то графы  $G$  и  $H$  называются изоморфными.

Очевидно, что отношение изоморфизма графов является отношением эквивалентности.

Другими словами: графы  $G$  и  $H$  изоморфны, если существует такое взаимно-однозначное соответствие между множеством вершин  $V$  и  $W$ , что любые две вершины одного графа смежные тогда и только тогда, когда соответствующие им вершины другого графа также смежны. На рис. 35 приведены изоморфные графы:  $G$  и  $H$ ;  $A$  и  $B$ ;  $G_1$ ,  $G_2$  и  $G_3$ .

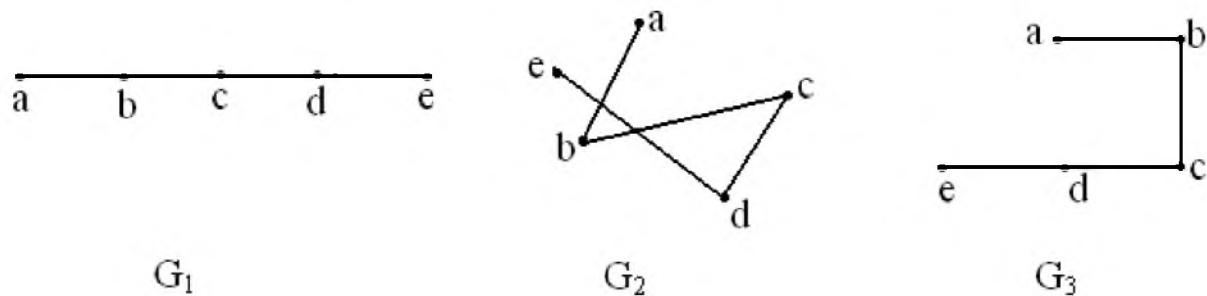
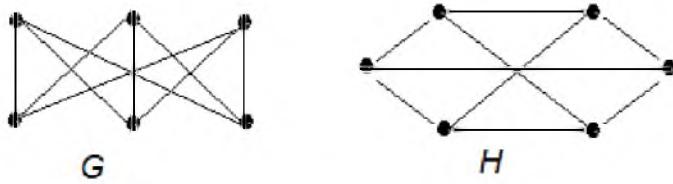


Рис. 35

**Теорема 10.1** Графы изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы смежностей можно получить одну из другой одинаковыми перестановками строк и столбцов.

Доказательство.

Пусть заданы два изоморфных графа  $G = (V, E)$  и  $H = (W, F)$ .

Перенумеруем вершины графов  $G$  и  $H$  целыми числами от 0 до  $n$ .  $|V|=|W|$ .  $A(G)$  и  $B(H)$  - матрицы смежностей графов  $G$  и  $H$  соответственно. Если  $A(G)=B(H)$ , то все доказано. В противном случае графы  $G$  и  $H$  отличаются лишь нумерацией вершин. Значит, существует такая подстановка  $S$  на множестве вершин  $V$ , которая сохраняет смежность, т.е. если  $(u, v) \in E$ , то  $(S(u), S(v)) \in F$ . Тогда получаем  $b_{s(i)s(j)} = a_{ij}$ , где  $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ . Теорема доказана.

Следует заметить, что теорема об изоморфизме графов остается справедливой, если рассматривать не матрицы смежностей, а матрицы Кирхгофа.

## 11. Характеристики графов

Решение многих технических задач методами теории графов сводится к определению соответствующих характеристик графов. Из множества характеристик отметим следующие.

**Цикломатическое число.** Пусть  $G$  – неориентированный граф, имеющий  $n$  вершин,  $m$  ребер и  $k$  компонент связности. Цикломатическим числом графа  $G$  называют число

$$v(G) = m - n + k \quad (19)$$

Физический смысл цикломатического числа заключается в том, что его значение определяет наибольшее число независимых циклов в графе. При расчете электрических цепей цикломатическим числом можно пользоваться для определения числа независимых контуров.

**Хроматическое число.** Граф  $G$  называют  $n$ -хроматическим ( $n$ -натуральное число), если его вершины можно раскрасить  $n$  различными цветами так, чтобы никакие две смежные вершины не были раскрашены одинаково. Наименьшее число  $n$ , при котором граф является  $n$ -хроматическим, называют хроматическим числом графа и обозначают  $\gamma(G)$ .

Если  $\gamma(G)=2$ , то граф называют бихроматическим. Необходимым и достаточным условием того, чтобы граф был бихроматическим, является отсутствие в нем циклов нечетной длины. Хроматическое число играет важную роль при решении задачи наиболее экономичного использования ячеек памяти при программировании. Однако его определение, за исключением случая бихроматического графа, представляет собой довольно трудную задачу, требующую нередко вычислительных средств.

Для некоторых простых графов нетрудно найти хроматические числа. Например,

$$\gamma(K_n) = n; \quad \gamma(K_n - e) = n - 1; \quad \gamma(K_{m,n}) = 2; \quad \gamma(C_{2n}) = 2; \quad \gamma(C_{2n+1}) = 3.$$

Вполне очевидно, что для графа, имеющего  $n$  вершин его хроматическое число не превышает  $n$ , а когда граф имеет подграф  $K_m$ , то его хроматическое число не меньше  $m$ .

К 3-хроматическим графикам относится, например, граф Петерсена, циклические графы с нечетным числом вершин. Но условия отношения графа к 3-хроматическим не найдены.

Значительно больше информации о хроматическом числе графа можно получить, если известны степени каждой его вершины.

Обозначим для заданного графа  $G=(V,E)$  вершину, имеющую максимальную степень символом  $p$ . В этом случае имеют место следующие теоремы, доказательство которых опускаем.

**Теорема 11.1** Для всякого графа  $G=(V,E)$  имеет место неравенство  $\gamma(G) \leq p+1$ .

**Теорема Брукса.** Если  $G$  – связный неполный граф и  $p \geq 3$ , то  $\gamma(G) \leq p$ .

Хотя обе теоремы и дают определенную информацию о хроматическом числе графа, но их оценки довольно неточны. Например, звездный граф  $K_{1,n}$ , который согласно теореме Брукса раскрашивается  $n$  красками, на самом деле является бихроматичным. Эта ситуация сильно упрощается, если ограничиться планарными графами. И здесь имеет место так называемая теорема о пяти красках:

**Теорема 11.2** Для всякого планарного графа  $G$  имеет место неравенство  $\gamma(G) \leq 5$ . (Доказательство, которое мы опустим, ведется индукцией по числу вершин графа  $G$ ).

Существует гипотеза четырех красок, которая формулируется так: «всякий планарный граф раскрашивается с помощью четырех красок».

Больше столетия математики пытаются решить данную проблему, т.е. доказать справедливость или ложность этой гипотезы, но до сих пор окончательное решение не найдено. Известно, например, что всякий планарный граф порядка  $n < 52$  раскрашивается с помощью четырех красок.

**Множество внутренней устойчивости.** Множество  $S \subseteq V$  графа  $G=(V,\Gamma)$  (здесь  $\Gamma$  – отображение, т.е.  $\Gamma:V \rightarrow V$ ) называют внутренне устойчивым, если никакие две вершины из  $S$  не смежны, т.е. для любого  $x \in S$  имеет место  $S \cap \Gamma(S) = \emptyset$ .

Внутренне устойчивое множество  $S_i$  называется максимальным, если в графе  $G$  не существует такого другого внутренне устойчивого множества  $S_k$ , так что  $S_i \subset S_k$ .

**Пример.** Для графа, приведенного на рис. 36,  $V=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ . Тогда множества  $S_1=\{x_1, x_3\}$ ,  $S_2=\{x_2, x_4\}$ ,  $S_3=\{x_2, x_6\}$ ,  $S_4=\{x_2, x_4, x_6\}$  являются внутренне устойчивыми. Из них множества  $S_1$  и  $S_4$  – максимальные, а множества  $S_2$  и  $S_3$  не являются таковыми, так как  $S_2 \subset S_4$  и  $S_3 \subset S_4$ .

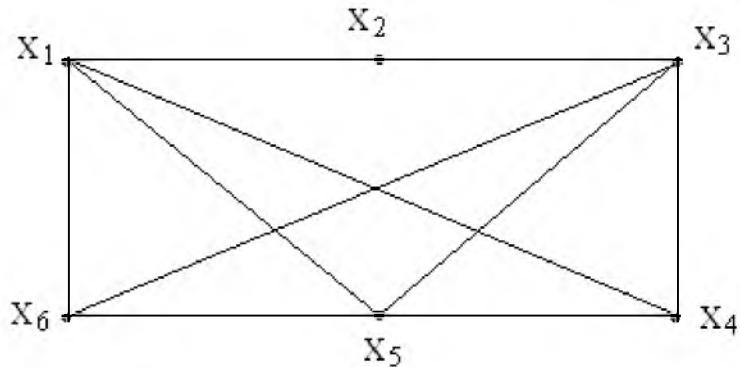


Рис. 36

Очевидно, что число элементов в разных максимальных внутренне устойчивых множеств не обязательно одинаковое.

Если  $D$  – семейство всех внутренне устойчивых множеств графа  $G$ , то число

$$\alpha(D) = \max_{S \subset D} |S| \quad (20)$$

называется числом внутренней устойчивости графа  $G$ , а множество  $S^*$ , на котором достигается этот максимум, называется наибольшим независимым множеством.

**Множество внешней устойчивости.** Множество  $T \subset V$  графа  $G=(V,\Gamma)$  называют внешне устойчивым, если любая вершина, не принадлежащая  $T$ , соединена дугами с вершинами из  $T$ , т.е. для любого  $x \notin T$  имеет место  $\Gamma(x) \cap T \neq \emptyset$ .

Внешне устойчивое множество  $T_i$  называют минимальным, если в  $G$  не существует другого внешне устойчивого множества  $T_k \subset T_i$ .

**Пример.** Для графа, изображенного на рис. 37, множества  $T_1=\{X_1, X_4, X_6\}$ ,  $T_2=\{X_1, X_4\}$ ,  $T_3=\{X_3, X_5, X_6\}$  являются внешне устойчивыми. Множества  $T_2$  и  $T_3$  минимальные, а  $T_1$  не является минимальным, так как внешне устойчивое множество  $T_2 \subset T_1$ .

В графе может быть несколько минимальных внешне устойчивых множеств и в общем случае они не содержат одинаковое число вершин.

Если  $R$  – семейство внешне устойчивых множеств графа, то число

$$\beta(G) = \min_{T \subset R} |R| \quad (21)$$

называется числом внешней устойчивости графа, а множество  $T^*$ , на котором достигается минимум, называется наименьшим внешне устойчивым множеством.

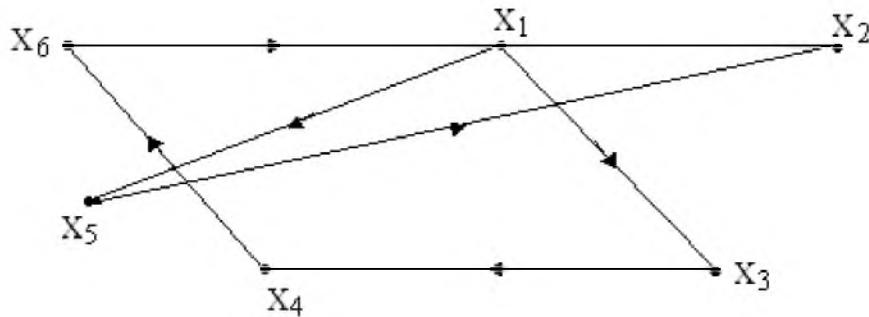


Рис. 37

## **12. Свойства эйлеровых и гамильтоновых графов**

### **12.1 Эйлеровы графы**

Одной из важнейших разновидностей связных графов являются так называемые **эйлеровы и гамильтоновы графы**.

**Определение.** Связный граф  $G$  называется **эйлеровым**, если существует замкнутая цепь, включающая каждое его ребро. Такая цепь называется **эйлеровой цепью**.

Связный граф называется **полуэйлеровым**, если в нем существует цепь, которая включает каждое его ребро. Таким образом, каждый эйлеров граф будет полуэйлеровым.

На рис. 38 приведены графы: неэйлеров ( $a$ ), эйлеров ( $b$ ) и полуэйлеров ( $c$ ).

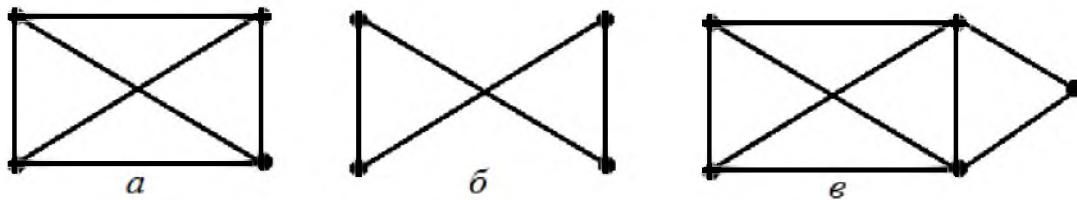


Рис. 38

Понятие эйлерового графа возникло в связи с известной головоломкой о **семи кёнигсбергских мостах** - старинной математической задачей, в которой спрашивалось, как можно пройти по всем семи мостам Кёнигсберга (рис. 39), не проходя ни по одному из них дважды. Впервые она была решена в 1736 году математиком Леонардом Эйлером, доказавшим, что это невозможно, и изобретшим таким образом **эйлеровы циклы**.



Рис. 39 Кёнигсбергские мосты

На рис. 40 Представлен граф, соответствующий задаче о семи кёнигсбергских мостах.

Возникает естественный вопрос: как установить, что заданный граф является эйлеровым? Ответ на этот вопрос дают такие утверждения.

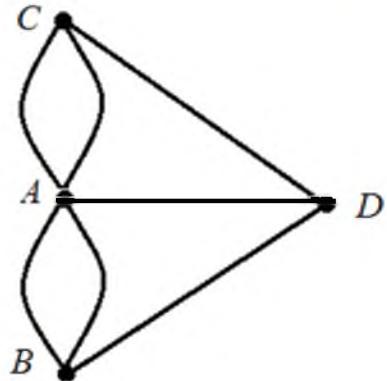


Рис.40

**Теорема 12.1** Если степень каждой вершины конечного графа не меньше двух, то граф имеет цикл.

Доказательство. Пусть  $v$  – некоторая вершина графа  $G$ . Пользуясь методом построения по индукции, построим маршрут  $v_1, v_2, \dots, v_k, \dots$  так, что бы вершина  $v_{i+1}$ , была смежная с  $v_i$  и не совпадала с  $v_{i-1}$ . Существование такой вершины вытекает из условий теоремы. Поскольку граф  $G$  конечный, то на некотором шаге построения нашего маршрута придем к вершине, выбранной раньше. И если, например,  $v_k$  первая из таких вершин, то часть маршрута, лежащая между первым и вторым проявлением в маршруте вершины  $v_k$ , и есть искомый цикл. Теорема доказана.

Данная теорема справедлива как для псевдографа, так и для мультиграфа.

**Теорема 12.2** Связный граф  $G$  есть эйлеров тогда и только тогда, когда каждая вершина графа  $G$  имеет четную степень.

Доказательство. (Необходимость) Пусть график  $G$  имеет эйлерову цепь  $P$ . Тогда при каждом прохождении цепи  $P$  через любую из вершин графа  $G$  степень этой вершины увеличивается на 2. Но поскольку каждое ребро встречается в  $P$  только один раз (эйлерова цепь), то каждая вершина должна иметь четную степень.

Достаточность доказывается индукцией по числу ребер графа  $G$ .

Следствие 1. Связный граф эйлеров тогда и только тогда, когда множество его ребер можно разбить на непересекающиеся циклы.

**Теорема 12.3.** Для того, чтобы связный граф  $G$  был полуэйлеровым, необходимо и достаточно, чтобы он содержал ровно две вершины нечетной степени.

#### Доказательство.

Необходимость. Пусть  $G$  – полуэйлеров граф, следовательно, он обладает эйлеровой цепью  $\langle w, v \rangle$ . Добавляя к нему ребро  $(w, v)$ , получаем граф  $G' = G + (v, w)$ , обладающий эйлеровым циклом, следовательно, по предыдущей теореме, в графе  $G'$  степени всех вершин четны. Но тогда четны степени вершин в  $G$ , за исключением вершин  $v$  и  $w$ .

Достаточность. Пусть  $G$  имеет ровно две вершины нечетной степени  $v$  и  $w$ . Добавляя к нему ребро  $(w, v)$ , получаем граф  $G' = G + (v, w)$ , все вершины которого четной степени, следовательно, по предыдущей теореме, в графе  $G'$  есть эйлеров цикл. Удаляя из него ребро  $(w, v)$ , получаем эйлерову цепь.

Следует заметить, что если граф полуэйлеров имеет две вершины нечетной степени, то у всякой полуэйлеровой цепи одна из этих вершин начальная, а вторая конечная.

Для построения эйлерова цикла в эйлеровом графе можно использовать **алгоритм Флери**:

Начиная с произвольной вершины, идем по ребрам графа, соблюдая следующие правила:

- Удаляем ребра по мере их прохождения, и удаляем также изолированные вершины, которые при этом образуются;
- Идем по мосту только тогда, когда нет других возможностей.

**Пример.** Построить эйлерову цепь для графа, приведенного на рис. 41.

Решение. Граф эйлеров, т.к. все вершины имеют четную степень.

Следовательно, в графе имеется эйлеров цикл.

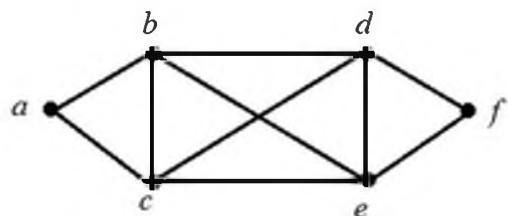


Рис. 41

Воспользовавшись алгоритмом Флери и начиная, например, с вершины  $a$ , получаем следующую последовательность обхода всех ребер заданного графа:  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow f \rightarrow e \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow c \rightarrow a$ .

Замечание. Для решения некоторых задач вместо эйлерова цикла удобно использовать родственное понятие эйлеровой цепи, отказываясь от условия «вернуться в исходную точку». К таким задачам, например, относятся задачи «нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги».

**Пример. Задача китайского почтальона.** Почтальон должен разнести почту по вверенному ему району, для чего он проходит по всем без исключения улицам района и возвращается в исходную точку (на почту). Требуется найти кратчайший маршрут почтальона. Данная задача вполне современна: оптимальные маршруты нужно прокладывать для разнообразных машин городского транспорта: автобусов, маршруток, такси, автотранспорта специального назначения (поливающих, посыпающих, убирающих, размечдающих улицы городов). В представлении задачи китайского почтальона графом перекрестки соответствуют вершинам, а отрезки улиц между перекрестками - ребрам. В общем случае задача решается, если соответствующий граф будет эйлеров и тогда оптимальным будет эйлеров цикл.

## 12.2 Гамильтоновы графы.

**Определение.** Цикл, проходящий через каждую вершину графа ровно один раз, называется *гамильтоновым*. Граф называется гамильтоновым, если в нем существует гамильтонов цикл. Например, граф  $G_1$ , изображенный на рис. 42 а) является гамильтоновым, а изображенный на рис. 42 б) таковым не является.

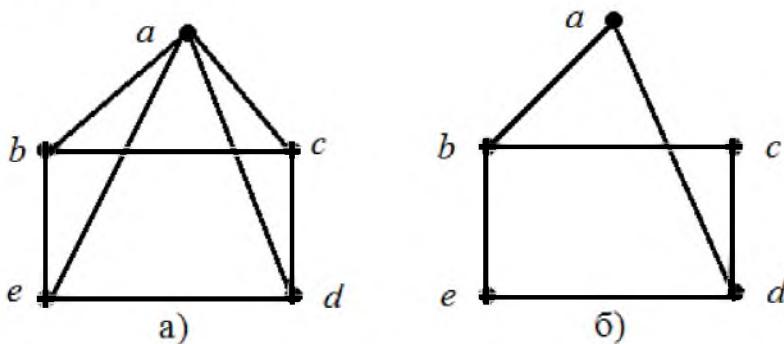


Рис. 42

Наиболее известной задачей о гамильтоновом цикле является *задача коммивояжера*. Дан список городов, соединенных дорогами, длины которых известны. Коммивояжер должен объехать все города, побывав в каждом по одному разу, и вернуться в свой город. Требуется найти кратчайший маршрут коммивояжера.

Пример практического приложения задачи коммивояжера: фирме требуется развести товары со склада по списку магазинов, используя одну машину, и вернуть эту машину на склад, причем машина должна пройти минимально возможное расстояние. Представление задачи коммивояжера графом очевидно: города — это вершины, а дороги — ребра. Как и в случае задачи китайского почтальона, для полного представления задачи нужен

взвешенный граф, в котором ребрам-дорогам приписаны их длины. Однако можно заметить, что любой (не обязательно оптимальный) маршрут коммивояжера представляет собой гамильтонов цикл. Следовательно, задача коммивояжера разрешима тогда и только тогда, когда граф этой задачи гамильтонов.

Итак, гамильтоновым циклом называется цикл, или путь, проходящий через каждую вершину графа в точности по одному разу. Эйлеровы и гамильтоновы пути сходны по способу задания. Первые содержат все ребра, и притом по одному разу, вторые – все вершины по одному разу. Но, несмотря на внешнее сходство, задачи их отыскания резко отличаются по степени трудности. Для решения вопроса о существовании эйлерова цикла в графе достаточно выяснить, все ли его вершины четные. Критерий же существования гамильтонова цикла на произвольном графе еще не найден. Однако есть несколько достаточных условий существования гамильтоновых циклов в графе:

- всякий полный граф является гамильтоновым, так как он содержит простой цикл, которому принадлежат все вершины данного графа;
- если график, помимо простого цикла, проходящего через все его вершины, содержит и другие ребра, то он также является гамильтоновым;
- если график имеет один гамильтонов цикл, то он может иметь и другие гамильтоновы циклы.

Поиск критерия гамильтоновости графа – одна из основных проблем теории графов. Вполне очевидно, что гамильтонов график всегда связан и наличие петель и кратных ребер на гамильтоновость не влияют. Поэтому в задачах на гамильтоновость можно считать графы обычными и связными.

Дираком и Оре были найдены достаточные условия существования гамильтонова пути в неориентированном графике.

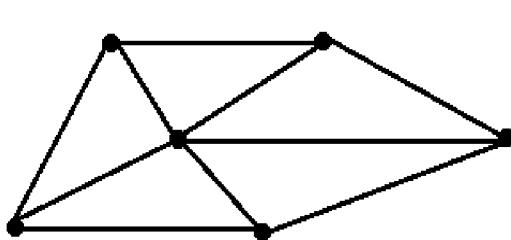


Рис. 43

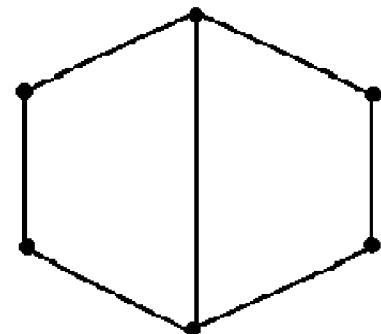


Рис. 44

**Теорема Дирака.** Если в графике  $G=(V,E)$  с  $n \geq 3$  вершинами  $\deg v \geq n/2$ , то график  $G$  является гамильтоновым (граф Дирака).

На рис. 43 приведен граф Дирака. На рис. 44 приведен гамильтонов граф не являющийся графом Дирака.

**Теорема Оре.** Пусть  $G$  — обычновенный связный граф, содержащий  $n$  вершин, где  $n > 2$ . Если  $\deg(v) + \deg(w) > n$  для любых двух различных несмежных вершин  $v$  и  $w$  графа  $G$ , то граф  $G$  гамильтонов.

На рис. 45 приведен пример графа Оре а на рис 46 приведен пример графа не являющимся графом Оре, но, тем не менее, являющийся гамильтоновым графом.

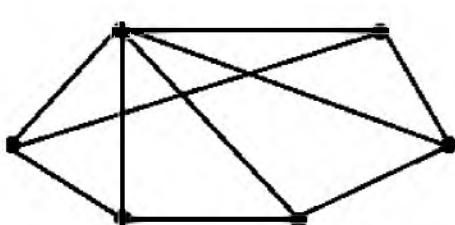


Рис. 45

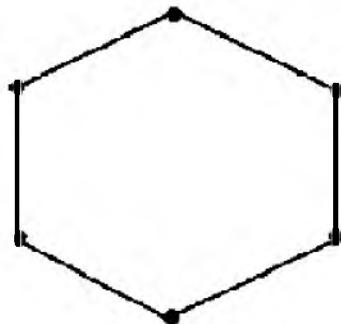


Рис.46

Нетрудно заметить, что всякий граф Дирака автоматически является графом Оре. Но вот пример графа Оре, не являющегося графом Дирака (Рис. 47)

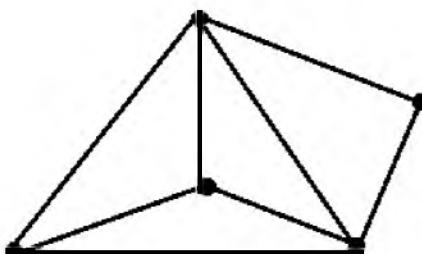


Рис. 47

### 13. Расстояния в графах

Пусть задан связный неорграф  $G = (V, E)$  и две несовпадающие вершины  $a$  и  $b$ . Если для двух вершин существует маршрут, связывающий их, то обязательно найдется минимальный маршрут, соединяющий эти вершины. Обозначим длину этого маршрута через  $\rho(a, b)$ .

#### Определения.

- Величину  $\rho(a, b)$  (конечную или бесконечную) называют **расстоянием между вершинами  $a, b$** . Это расстояние удовлетворяет аксиомам метрики:

1)  $\rho(a, b) \geq 0$ , причем  $\rho(a, b) = 0$  тогда и только тогда, когда  $a = b$ ;

- 2)  $\rho(a,b) = \rho(b,a);$
- 3)  $\rho(a,b) \leq \rho(a,c) + \rho(c,b).$

- Если  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , то матрица  $P = (p_{ij})$ , в которой  $p_{ij} = \rho(v_i, v_j)$ , называется **матрицей расстояний**.
- Для фиксированной вершины  $a$  величина  $e(a) = \max\{p(a,b) | b \in V\}$  называется **эксцентриситетом** вершины  $a$ . Таким образом эксцентриситет вершины равен расстоянию от данной вершины до наиболее удаленной от нее. Если  $P$  – матрица расстояний, то эксцентриситет  $e(a_i)$  равен наибольшему из чисел, стоящих в  $i$ -той строке.
- Максимальный среди эксцентриситетов вершин называется **диаметром графа** и обозначается  $d(G)$ .

$$d(G) = \max\{e(a) | a \in V\} \quad (22)$$

- Вершина называется **периферийной**, если  $e(a) = d(G)$ .

**Пример.** На рис. 48 изображен график с вершинами  $V = \{a, b, c, d, h\}$  и его матрица расстояний  $P$ .

Для него имеем:  $e(a)=3; e(b)=2; e(c)=3; e(d)=2; e(h)=2$ . Следовательно,  $d(G)=3$ . Вершины  $a$  и  $c$  являются периферийными.

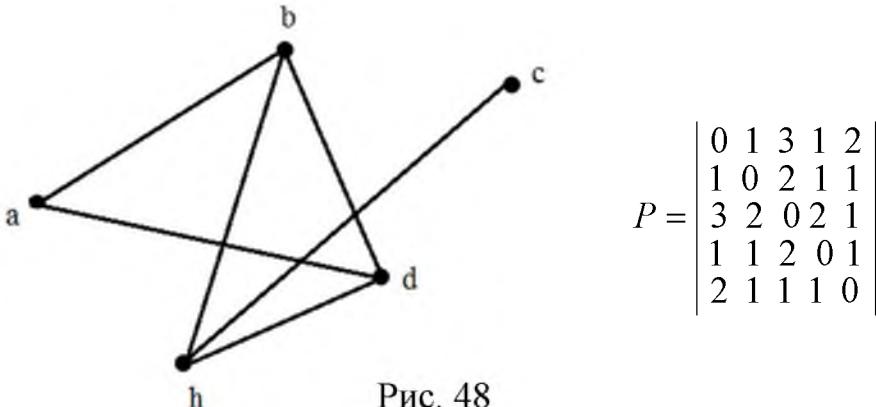


Рис. 48

### Определения.

- Минимальный из эксцентриситетов графа  $G$  называется его **радиусом** и обозначается  $r(G)$ .

$$r(G) = \min\{e(a) | a \in V\} \quad (23)$$

- Вершина  $a$  называется **центральной**, если  $e(a) = r(G)$ .
- Множество всех центральных вершин графа называется его **центром**.

**Пример.** Радиус приведенного на рис. 48 графа равен 2, а его центром является множество  $\{b, d, h\}$ .

## 14. Ориентированные графы

Большое значение в решении многих инженерных задач имеют ориентированные графы.

### 14.1 Основные определения.

Напомним, что граф  $G=(V,E)$  называется *ориентированным*, когда его ребра, называемые в ориентированном графе *дугами*, заданы в виде упорядоченных пар  $(u,v)$ , где  $u$  – начальная вершина,  $v$  – конечная вершина.

- **Степенью выхода вершины  $v$**  (часто обозначается как  $\beta(v)$ ,  $\vec{deg}(v)$ , или  $out(v)$ ) ориентированного графа называют число дуг, выходящими из этой вершины. Если  $out(v)=0$ , то вершина называется *стоком*.
- **Степенью входа вершины  $v$**  ориентированного графа называют число дуг входящих в эту вершину, и обозначают как  $\beta^-(v)$ ,  $\vec{deg}^-(v)$ ,  $in(v)$ . Если  $in(v)=0$ , то вершина  $v$  называется *источником*.
- Ориентированный граф с одним источником и одним стоком называют *сетью (граф-сетью)*, т.е. *граф-сеть* – это ориентированный граф, в котором нет циклов (Рис.49).

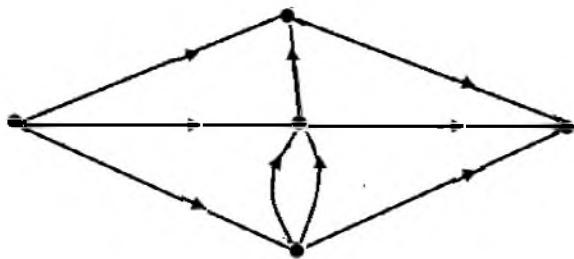


Рис. 49

Очевидно, что степень вершины орграфа  $deg(v) = \sum_{v \in V} in(v) + \sum_{v \in V} out(v)$ , и поскольку каждая дуга орграфа из  $E$  учитывается в каждой из сумм приведенного выражения, то

$$\sum_{v \in V} in(v) = \sum_{v \in V} out(v). \quad (24)$$

Но тогда **теорема о сумме степеней вершин для орграфа** может быть сформулирована следующим образом:

*Сумма степеней входа всех вершин орграфа равна сумме степеней выхода всех его вершин.*

Часто это утверждение называют *орлеммой о рукопожатии*.

Также напомним:

- *Путем орграфа* называется последовательность дуг, в которой конечная вершина всякой дуги, отличной от последней, является начальной вершиной следующей дуги.
- Число дуг пути называется *длиной пути*.
- Путь называется *контуром*, если его начальная вершина совпадает с конечной вершиной.
- Путь (контур), в котором все дуги различны, называется *простым*.
- Путь (контур), в котором все вершины, кроме первой и последней, различны, называется *элементарным*.

Связный орграф называется *эйлеровым орграфом*, если в нем существует замкнутая цепь, проходящая через каждую его дугу.

Связный орграф называется *гамильтоновым*, если в нем существует цикл, проходящий через каждую из его вершин.

Важное место в теории орграфов занимают следующие две теоремы:

**Теорема 14.1** *Связный орграф является эйлеровым тогда и только тогда, когда для любой его вершины  $v$   $in(v)=out(v)$ .*

**Теорема 14.2** *Связный орграф порядка  $n$  является гамильтоновым, если для любой его вершины  $v$   $out(v) \geq n/2$  и  $in(v) \geq n/2$ .*

Пусть  $G=(V,E)$  – орграф. Если  $(u,v) \in E$ , то  $u$  называется *предшественником* (или предком) вершины  $v$ , а вершина  $v$  – *непосредственно подчиненной вершине u*, или непосредственно достижимой из вершины  $u$ .

Если граф  $G=(V,E)$  является *разреженным*, т.е. число дуг  $E$  достаточно мало по сравнению с числом вершин  $V$ , то более эффективным способом его представления чем матричные, является его представление *списком дуг*, который задается двумя наборами  $\bar{m} = (m_1, m_2, \dots, m_E)$  и  $\bar{n} = (n_1, n_2, \dots, n_E)$ , где  $(d_{mi}, d_{ni})$  –  $i$ -я дуга графа  $G$ .

**Пример.** Орграф, приведенный на рис. 50, представлен следующим списком дуг:

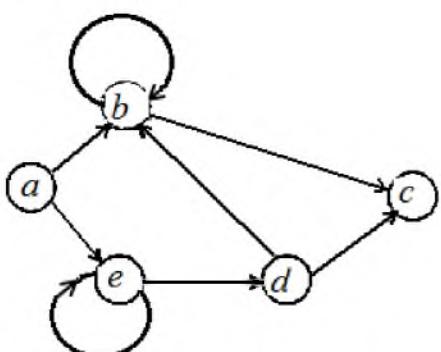


Рис. 50

$$\begin{aligned}\bar{m} &= (a, a, b, b, d, d, e, e), \\ \bar{n} &= (b, e, b, c, b, c, e, d).\end{aligned}$$

Для представления рассматриваемого графа матрицей смежности требуется  $5^2=25$  элементов, а списком дуг только  $8 \cdot 2=16$  элементов.

Другим представлением графа, удобным при работе с графами, в которых удаляются или добавляются вершины, является *структура смежности*,

получаемая составлением для каждой вершины  $a$  списка ее последователей, т.е. вершин  $b$ , для которых имеется дуга  $(a,b)$ . Например, для орграфа, приведенного на рис. 50, его представление структурой смежности будет иметь вид:

Вершина	Список последователей
a:	b,e
b:	b,c
c:	
d:	b,c
e:	d,e

## 14.2 Взвешенный ориентированный граф

Граф называется **взвешенным (нагруженным)**, если дугам этого графа поставлены в соответствие веса, так что дуге  $(v_i, v_j)$  сопоставлено некоторое число  $l(v_i, v_j) = c_{ij}$ , называемое **весом дуги**.

**Весом** (или длиной, стоимостью и т.п.) **пути**  $S$ , состоящего из некоторой последовательности дуг  $(v_i, v_j)$ , называется число  $l(S)$ , равное сумме весов дуг, входящих в этот путь, т.е.  $l(S) = \sum c_{ij}$ .

Матрица  $C = [c_{ij}]$  называется **матрицей весов**, где  $c_{ij}$  - вес дуги  $(v_i, v_j)$ , если дуга  $(v_i, v_j)$  существует. Если дуга  $(v_i, v_j)$  не существует, то ее вес обозначается знаком  $\infty$ .

На рис. 51 приведен взвешенный граф и соответствующая ему матрица весов.

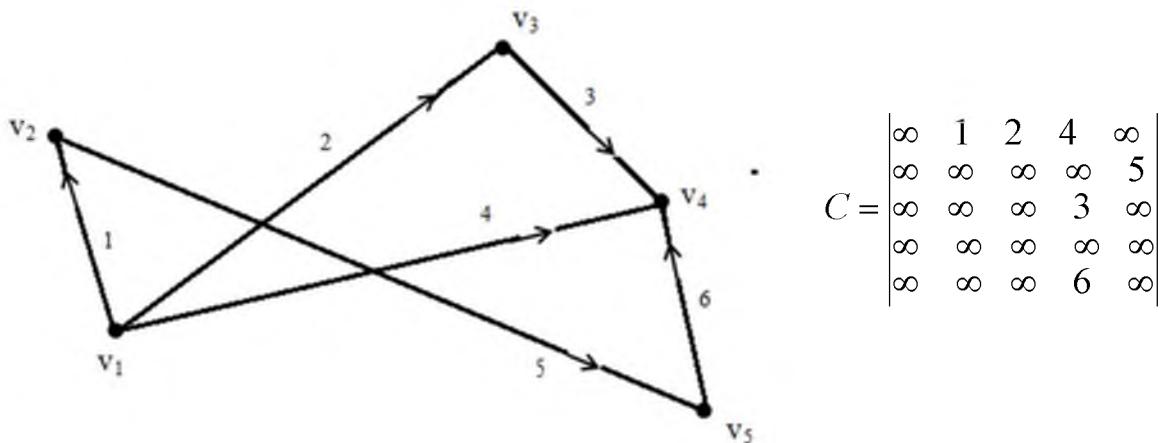


Рис. 51

Например, для графа рис. 51 длина пути  $(v_1, v_2, v_5, v_4) = 1+5+6=12$ .

Пусть  $M_V$  - множество меток вершин и  $M_E$  - множество весов (меток) дуг графа  $G=(V,E)$ . И задано  $f:V \rightarrow M_V$  - распределение меток вершин и  $g:E \rightarrow M_E$  - весов дуг. Для вершины  $v_i \in V$  элемент  $f(v_i)$  называется весом вершины  $v_i$ , а для дуги  $e_k \in E$  элемент  $g(e_k)$  - весом дуги  $e_k$ . Граф вида  $G=(V,E,f,g)$  называется **помеченным графом**.

**Пример.** Пусть задан график:  $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  - множество его вершин и  $E=\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}$  - множество его дуг. Заданы распределения меток вершин  $f:V \rightarrow N$  и дуг  $g:E \rightarrow l$ , где  $N=\{\text{Н.Новгород}, \text{Арзамас}, \text{Павлово}, \text{Саров}\}$ ,  $l=\{113, 75, 79, 138, 138\}$  и  $f=\{(v_1, \text{Н.Новгород}), (v_2, \text{Арзамас}), (v_3, \text{Саров}), (v_4, \text{Павлово})\}$ ;  $g=\{(v_1, v_2), 113\}, (v_2, v_3), 76\}, (v_1, v_4), 79\}, (v_2, v_4), 138\}, (v_3, v_4), 134\}$ . Полученный помеченный график  $G=(V,E,f,g)$  и его матрица весов  $L$  приведены на рис. 52

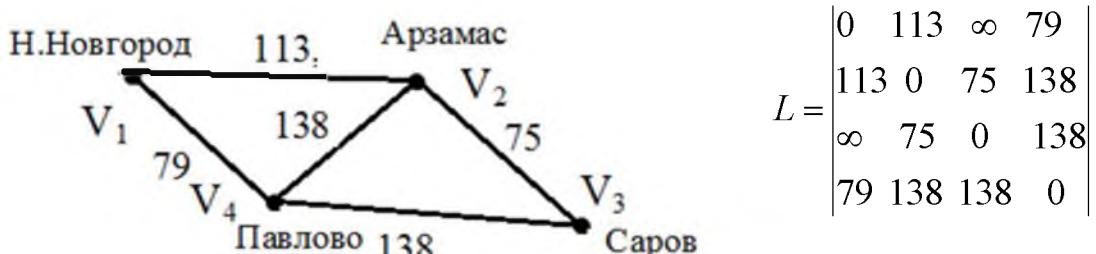


Рис. 52

### 14.3 Определение путей экстремальной длины

Для ненагруженного графа вводится понятие **кратчайшего пути**, который определяется как минимальное количество дуг между заданными вершинами. Наиболее часто встречается задача нахождения экстремальных путей в нагруженном, ориентированном графе без контуров, которая решается с помощью алгоритмов Флойда, Форда, Беллмана и др.

Рассмотрим задачу нахождения кратчайшего пути между двумя вершинами ориентированного графа.

Каждой дуге графа  $G=(V,E)$  поставим в соответствие число  $l(E)$ , характеризующее её длину. Требуется найти кратчайшее расстояние между двумя фиксированными вершинами  $v_0$  и  $v_n$ . Например, если под длиной дуги  $l(v_i, v_j)$  понимать стоимость перевозки из пункта  $v_i$  в пункт  $v_j$ , то содержание задачи сводится к определению пути из  $v_0$  в  $v_n$ , при котором затраты на перевозку будут минимальны.

Данная задача предполагает, во-первых, определение кратчайшего пути, и во-вторых, определение самого пути минимальной длины.

Алгоритм решения этой задачи должен позволять определить кратчайший путь и его длину за конечное число шагов.

Каждая вершина графа получает некоторую числовую метку на первом шаге. Затем метки вершин могут меняться, становясь на некотором шаге постоянным числом. Установившаяся метка данной вершины есть кратчайшее расстояние от  $v_0$  до этой вершины. Если пути, соединяющего вершины  $v_0$  и  $v_n$  не существует, считают расстояние между ними равно  $+\infty$ .

Алгоритм состоит в выполнении следующих операций:

Шаг 1. Поставить следующие метки: для вершины  $v_0$  метку  $\lambda_0$ , для любой другой вершины  $v_i$  метку  $\lambda_i=+\infty$  ( $i=1,2,\dots,n$ ).

Шаг 2. Найти на графе такую дугу  $(v_i, v_j)$ , для которой

$$\lambda_j - \lambda_i > l(v_i, v_j).$$

Разность  $+\infty - \infty$  считать равной нулю. Если такая дуга найдется, то изменить метку вершины  $v_j$  на

$$\lambda'_j = \lambda_i + l(v_i, v_j).$$

Если такой дуги нет, то пути, соединяющего  $v_0$  и  $v_n$  не существует.

Шаг 3. Повторять шаг 2 до тех пор, пока метки вершин не перестанут меняться.

Установившиеся метки обозначим  $\lambda_i^*$  ( $i=1,2,\dots,n$ ).

Может быть два случая:

- 1)  $\lambda_i^* = +\infty$ . Это значит, что пути, соединяющего вершины  $v_0$  и  $v_n$  не существует.
- 2)  $\lambda_i^*$  - конечное число. Оно равно кратчайшему расстоянию между  $v_0$  и  $v_n$ .

Сам путь минимальной длины получим, отмечая вершины, по которым достигается минимум.

На граф-сети между входом и выходом путь минимальной длины всегда существует. Его можно определить за один шаг, если пользоваться формулой:

$$\lambda'_j = \min\{\lambda_i + l(v_i, v_j)\}. \quad (25)$$

**Пример.** Для приведенного на рис. 53 графа найти кратчайший путь между вершинами  $v_0$  и  $v_5$ .

**Решение.** Имеем ориентированный граф без циклов, имеющий одну вершину  $v_0$  без входящих дуг – вход графа, и одну вершину  $v_5$  без выходящих дуг – выход графа. Такой граф есть граф-сеть.

Следуя приведенному алгоритму, обозначим  $\lambda_0=0$ ,  $\lambda_i=+\infty$ , ( $i=1,2,\dots,5$ ).

Далее меняем метки всех вершин, кроме  $v_0$ . Смысл метки  $\lambda_i$  – некоторое расстояние от вершины  $v_0$  до  $v_i$ . Поэтому метка вершины  $v_0$  не меняется.

Для вершины  $v_1$ :  $\lambda_1 - \lambda_0 = +\infty > l(v_0, v_1) = 2$ .

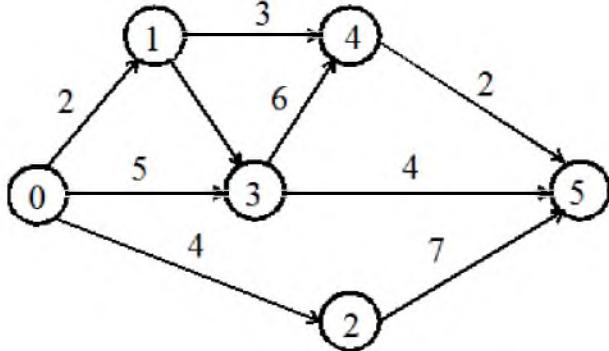


Рис. 53

Поэтому меняем метку вершины  $v_1$  на

$$\lambda'_1 = \lambda_0 + l(v_0v_1) = 0 + 2 = 2, \quad (v_0)$$

Справа отметим вершину, из которой пришли в вершину  $v_1$ . Аналогично для вершины  $v_2$ :  $\lambda_2 - \lambda_0 = +\infty > l(v_0, v_2) = 4$ , и

$$\lambda'_2 = \lambda_0 + l(v_0v_2) = 0 + 4 = 4, \quad (v_0)$$

В вершину  $v_3$  ведут два пути: их вершины  $v_0$  и из вершины  $v_1$ . Поэтому используем формулу 25:

$$\lambda'_3 = \min\{\lambda_0 + l(v_0v_3); \lambda'_1 + l(v_1v_3)\} = \min\{0 + 5; 2 + 4\} = 5, \quad (v_0)$$

Справа обозначим вершину, по которой достигается минимум.

Аналогично для вершины  $v_4$  и  $v_5$  получаем:

$$\lambda'_4 = \min\{\lambda'_1 + l(v_1v_4); \lambda'_3 + l(v_3v_4)\} = \min\{2 + 3; 5 + 6\} = 5, \quad (v_1)$$

$$\begin{aligned} \lambda'_5 &= \min\{\lambda'_2 + l(v_2v_5); \lambda'_3 + l(v_3v_5); \lambda'_4 + l(v_4v_5)\} = \\ &= \min\{5 + 2; 5 + 4; 4 + 7\} = 7, \end{aligned} \quad (v_4)$$

Полученное значение  $\lambda_5^* = 7$  есть длина минимального пути из  $v_0$  в  $v_5$ .

Сам путь получаем проходя по отмеченным вершинам из  $v_5$  в  $v_0$ :  $v_5, v_4, v_1, v_0$ , т.е. минимальный путь из  $v_0$  в  $v_5$   $L = \{v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_4 \rightarrow v_5\}$  и длина которого равна 7.

Отметим, что задача может иметь не единственное решение.

#### 14.4 Алгоритм Форда Беллмана нахождения минимального пути

Имеется ориентированный взвешенный граф не содержащий контуров. Основными вычисляемыми значениями являются величины  $\lambda_i(k)$ , где  $i=1, 2 \dots, n$  ( $n$  – число вершин графа);  $k=1, 2, \dots, n-1$ . Для фиксированных  $i$  и  $k$  величина  $\lambda_i(k)$  равна длине минимального пути, ведущего из заданной начальной вершины  $v_1$  в вершину  $v_i$  и содержащего не более  $k$  дуг.

*Шаг 1.* Установка начальных условий. Ввести число вершин графа и матрицу весов  $C = [c_{ij}]$  заданного графа.

*Шаг 2.* Положить  $k=0$ ;  $\lambda_i(0) = \infty$  для всех вершин, кроме  $v_1$ ;  $\lambda_1(0) = 0$ .

*Шаг 3.* В цикле по  $k$ ,  $k=1, 2, \dots, n-1$ , каждой вершине  $v_i$  на  $k$ -ом шаге присыпывать индекс  $\lambda_i(k)$  по правилу:

$$\lambda_i(k) = \min_{1 \leq j \leq n} \{\lambda_j(k-1) + c_{ji}\} \quad (26)$$

для всех вершин, кроме  $v_1$ , и положить  $\lambda_1(k) = 0$ .

*Шаг 4.* В результате работы алгоритма сформируется таблица индексов  $\lambda_i(k)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ;  $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ .

При этом  $\lambda_i(k)$  определяет длину минимального пути из первой вершины в  $i$ -ую, содержащего не более  $k$  дуг.

*Шаг 5.* Восстановление минимального пути. Для любой вершины  $v_m$  предшествующая ей вершина  $v_r$  определяется из соотношения:

$$\lambda_r(n-2) + c_{rm} = \lambda_m(n-1), \quad v_r \in G^{-1}(x_m), \quad (27)$$

где  $G^{-1}(v_m)$  - прообраз вершины  $v_m$ .

Для найденной вершины  $v_r$  предшествующая ей вершина  $v_q$  определяется из соотношения:

$$\lambda_q(n-3) + c_{qr} = \lambda_r(n-2), \quad v_q \in G^{-1}(v_r),$$

где  $G^{-1}(v_r)$  - прообраз вершины  $v_r$ , и т.д.

Последовательно применяя это соотношение, начиная от последней вершины  $v_i$ , находим минимальный путь.

**Пример.** Найти кратчайший путь между вершинами  $V_1$  и  $V_6$  для графа рис. 54.

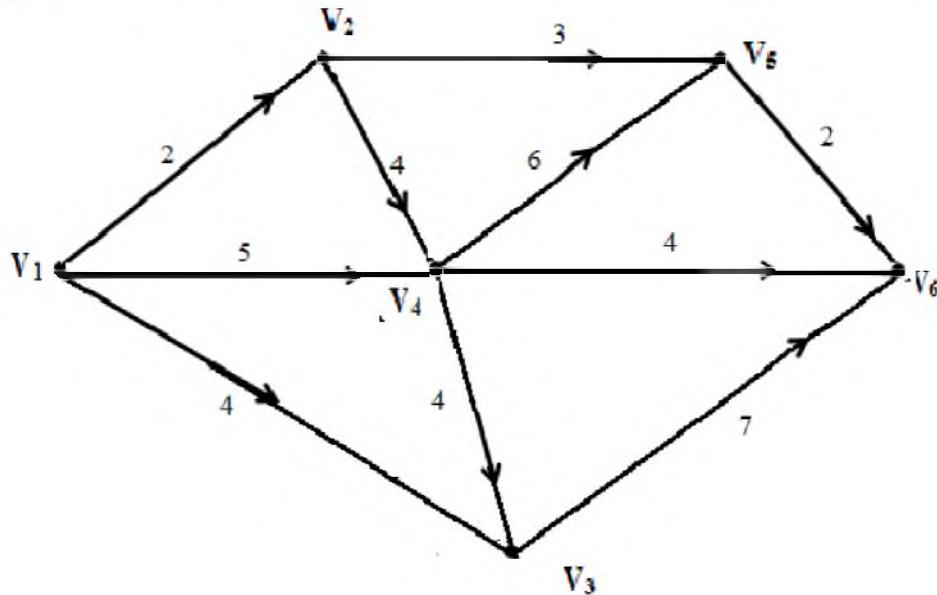


Рис. 54

Решение. Для наглядности работы алгоритма Форда-Беллмана расчетные значения индексов  $\lambda_i(k)$  будем заносить в таблицу 1

*Шаг 1.* Введем число вершин графа  $n = 6$  и его матрицу весов  $C$ .

$$C = \begin{vmatrix} \infty & 2 & 4 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 4 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 \\ \infty & \infty & 4 & \infty & 6 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{vmatrix}$$

*Шаг 2.* Положив  $k=0$ , определяем  $\lambda_1(0)=0$  и  $\lambda_2(0)=\lambda_3(0)=\lambda_4(0)=\lambda_5(0)=\lambda_6(0)=\infty$ . Эти значения занесем в первый столбец таблицы 2.1

*Шаг 3.* Определив  $k=1$  и  $\lambda_1(1)=0$ , вычисляем  $\lambda_i(1)=\min_{1 \leq j \leq 6}\{\lambda_j(0)+c_{ji}\}$ . Полученные значения заносим второй столбец таблицы 2.1.

Далее, определив  $k=2$  и  $\lambda_1(2)=0$ , вычисляем  $\lambda_i(2)=\min_{1 \leq j \leq 6}\{\lambda_j(1)+c_{ji}\}$  занеся полученные значения в третий столбец таблицы и т.д. (*Шаг 4; k=2 ... Шаг 7; k=6*, заполняя полученными результатами столбцы 4 – 7 соответственно).

Таблица 1

Номер вершины $i$	$\lambda_i(0)$	$\lambda_i(1)$	$\lambda_i(2)$	$\lambda_i(3)$	$\lambda_i(4)$	$\lambda_i(5)$
1	0	0	0	0	0	0
2	$\infty$	2	2	2	2	2
3	$\infty$	4	4	4	4	4
4	$\infty$	5	5	5	5	5
5	$\infty$	$\infty$	5	5	5	5
6	$\infty$	$\infty$	9	11	7	7

Полученные величины  $\lambda_i(5)$  равны длине минимального пути из первой вершины  $V_1$  в  $V_i$ -тую, содержащего не более 5 дуг.

*Шаг 8.* Восстановление минимального пути. Для последней вершины  $v_6$  предшествующая ей вершина  $v_r$  определяется из соотношения (26) полученного при  $m=6$ :

$$\lambda_r(4) + c_{r6} = \lambda_6(5), \quad v_r \in G^{-1}(v_6), \quad (28)$$

2.18 где  $G^{-1}(v_6) = \{v_3, v_4, v_5\}$  - прообраз вершины  $v_6$ .

Подставим в (28) последовательно индексы  $r=3, r=4, r=5$  чтобы определить  $r$ , для какого  $r$  это равенство выполняется:

$$\lambda_3(4) + c_{3,6} = 4 + 7 = 11 \neq \lambda_6(5) = 7;$$

$$\lambda_4(4) + c_{4,6} = 5 + 4 = 9 \neq \lambda_6(5) = 7;$$

$$\lambda_5(4) + c_{5,6} = 5 + 2 = 7 = \lambda_6(5) = 7.$$

Видно, что равенство выполняется при  $r=5$  и, следовательно, предшествующей вершине  $v_6$  является вершина  $v_5$ .

Аналогично, для вершины  $v_5$  предшествующая ей вершина определяется из соотношения (27) при  $m=5$ :

$$\lambda_r(3) + c_{r5} = \lambda_5(4), \quad v_r \in G^{-1}(v_5), \quad (29)$$

где  $G^{-1}(v_5) = \{v_2, v_4\}$  - прообраз вершины  $v_5$ .

Подставляя в (29) значения  $r=2$  и  $r=4$ , получаем:

$$\lambda_2(3) + c_{2,5} = 2 + 3 = 5 = \lambda_5(4) = 5;$$

$$\lambda_4(3) + c_{4,5} = 5 + 6 = 11 \neq \lambda_5(4).$$

Следовательно, предшествующей вершине  $v_5$  является вершина  $v_2$ .

Определяем предшествующую вершину для вершины  $v_2$ .

Имеем:

$$\lambda_r(2) + c_{r2} = \lambda_2(3), \quad v_r \in G^{-1}(v_2) = \{v_1\}. \quad (30)$$

Подставляя в (29) значение  $r=1$  получаем:

$$\lambda_1(2) + c_{1,2} = 0 + 2 = 2 = \lambda_2(3) = 2.$$

Т.е., предшествующей вершиной для  $v_2$  является вершина  $v_1$ .

Итак, найден минимальный путь из вершины  $v_1$  в вершину  $v_6$ :

$v_1 - v_2 - v_5 - v_6$ , и длина которого равна 7.

## 15. Деревья

Одной из распространенных разновидностей графа является **дерево**.

**Определения.**

- Связный ациклический граф называется **деревом**.
- Дерево называется **корневым**, если в нем выделена вершина, которая называется **корнем**.
- **Основным деревом** связного графа  $G$  называется любой его подграф, содержащий все вершины графа  $G$  и являющийся деревом.

На рис. 55 приведены графы, являющиеся деревьями.

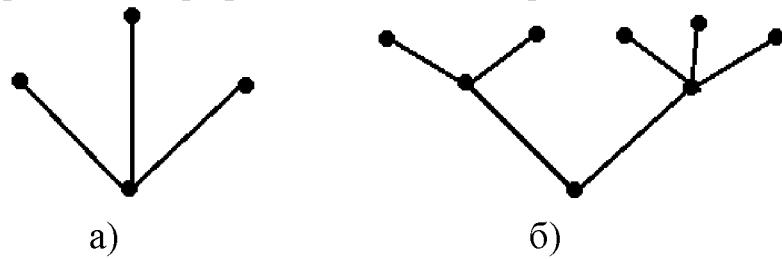


Рис. 55

Если граф несвязный и не имеет циклов, то каждая его связная компонента будет деревом, а сам граф называется **лесом**. Например граф рис. 55 можно интерпретировать как лес, состоящий из двух деревьев.

Для графа, приведенного на рис. 56 а), графы, приведенные на рис. 56 б) и в) являются оставными деревьями.

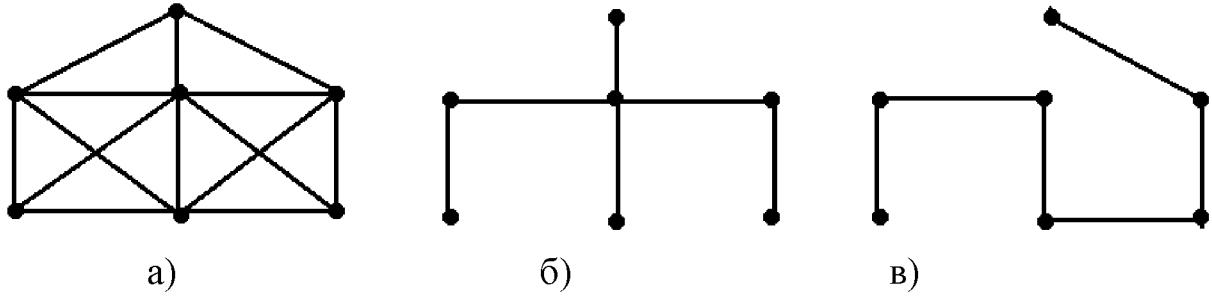


Рис. 56

Если граф  $G$  имеет  $n$  вершин и  $m$  ребер, то любое оставное дерево графа  $G$  получается из этого графа в результате удаления  $m-(n-1)=m-n+1$  ребер, так как всякое дерево с  $n$  вершинами имеет  $(n-1)$  ребер.

Отметим, что ребро графа называется существенным, если его удаление ведет к нарушению связности этого графа.

Число  $\gamma = m - n + 1$  называется **цикломатическим числом** графа.

Из определения дерева следует теорема.

**Теорема. 15.1** Граф есть дерево тогда и только тогда, когда любые две его вершины связаны единственной цепью.

**Доказательство.** Пусть граф является деревом. Если допустить существование более одной цепи, связывающей любые две вершины, то в таком бы графе существовал цикл и граф не являлся бы деревом по определению.

Наоборот, поскольку две любые вершины соединены цепью, то граф связный, и в силу того что эта цепь единственная, то он не имеет циклов, и, значит, является деревом. Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекают следствия:

**Следствие 15.1.1** Если граф  $D$  – дерево и  $u$  – его концевая вершина, то граф  $D-u$  есть дерево.

Доказательство. Так как граф  $D-u$ , полученный удалением вершины  $u$  из графа  $D$ , будет являться его подграфом, и граф  $D$  есть дерево, то в силу теоремы 8.1 граф  $D-u$  также будет деревом.

**Следствие 15.1.2** В дереве каждое ребро существенное.

Доказательство. Действительно, удаление ребра  $(u,v)$  в дереве  $D$  в силу единственности цепи, соединяющей вершины  $u$  и  $v$  (из определения графа), ведет к появлению двух компонент связности: одна компонента будет

содержать вершину  $u$ , другая вершину  $v$ , и граф  $D$  не будет тогда являться связным.

**Теорема 15.2** Если  $D = (V, E)$  – дерево и вершина  $x \notin V$ , то граф  $D' = (V \cup \{x\}, E \cup \{(v, x)\})$ , где  $v$  – произвольная вершина из  $V$ , также является деревом.

Доказательство. Так как граф  $D$  – дерево, то существует единственная цепь, соединяющая любую вершину  $v'$  с вершиной  $v$ . Поскольку вершина  $x \notin V$ , то добавление одного концевого ребра  $(v, x)$  приводит к тому, что из каждой вершины  $v'$  имеется лишь единственная цепь, соединяющая вершины  $v'$  и  $x$ . В силу теоремы 8.1 получаем, что  $D'$  является деревом.

Приведем наиболее важные утверждения, вытекающие из определения и свойств дерева  $D$ :

- $D$  не имеет циклов и имеет  $n-1$  ребро;
- $D$  – связный граф и имеет  $n-1$  ребро;
- $D$  – связный граф и каждое его ребро является мостом;
- Любые две вершины графа  $D$  соединены ровно одной простой цепью;
- $D$  не имеет циклов, но добавление любого нового ребра в  $D$  способствует возникновению ровно одного цикла.

Часто возникает вопрос: сколько разных деревьев можно построить на  $n$  вершинах? Ответ на этот вопрос дает известная **теорема Кэли**.

**Теорема Кэли** (без доказательства). Число разных деревьев, которые можно построить на  $n$  вершинах равно  $n^{n-2}$ .

Теорема Кэли имеет много разных интерпретаций. Рассмотрим, например, известную задачу под названием *задачи о соединении городов*: необходимо соединить  $n$  городов железными дорогами так, чтобы не строить лишних линий. Сколько способами можно построить такую систему дорог?

Практическое значение этой задачи состоит в том, что при известной стоимости строительства единицы длины железной дороги, необходимо построить сеть дорог, соединяющих все  $n$  городов, имеющую наименьшую стоимость ее строительства.

Теорема Кэли дает решение этой задачи. Для этого каждому дереву  $T$ , построенному на  $n$  вершинах, сопоставляется сумма  $C(T) = \sum_{(a,b) \in E} c(a,b)$ , где

$c(a,b)$ - стоимость дороги между городами  $a$  и  $b$ . Выбрав среди этих сумм

наименьшую, получим решение задачи. Для этого, как следует из теоремы Кэли, необходимо пересмотреть не более  $n^{n-2}$  сумм.

## 16. Бесконечные графы

### **Определение.**

Граф  $G=(V,E)$  называется **бесконечным** (неориентированным) графом, если  $V$  – есть бесконечное множество его вершин и  $E$  – бесконечное множество его ребер. Если оба множества счетные, то и граф называется **счетным**. Следует указать, что эти определения исключают тот случай, когда  $V$  – конечное множество, а  $E$  – бесконечное множество и наоборот, когда  $E$  – конечное множество, а  $V$  – бесконечное множество. В этих случаях граф можно считать конечным графом.

Определения таких понятий, как смежные вершины, инцидентные ребра, изоморфные графы, подграф графа, связный граф, компонент связности полностью переносятся на бесконечные графы.

Мощностью вершины  $v$  бесконечного графа называется мощность множества ребер, инцидентных вершине  $v$ . Следовательно, степень вершины в бесконечном графе может быть как конечной, так и бесконечной.

Бесконечный граф называется **локально конечным**, если степень каждой его вершины конечна. Примером локально конечного графа может быть квадратная решетка, составленная из целых чисел (Рис. 57.)

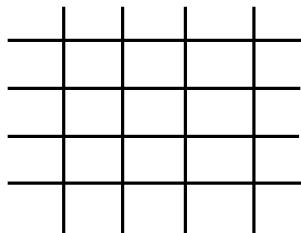


Рис. 57. Локально конечный граф.

Аналогично можно определить локально счетный бесконечный граф. Бесконечный граф называется локально счетным, если каждая вершина графа имеет счетную степень.

**Теорема 16.1** *Всякий связный локально счетный бесконечный граф является счетным.*

**Доказательство.** Пусть  $v$  – произвольная вершина такого бесконечного графа, и  $A$  – множество всех вершин, смежных с вершиной  $v$ ,  $B$  – множество всех вершин, смежных с вершинами из множества  $A$  и т.д. По условию теоремы множество  $A$  – счетно, множество  $B$  – счетно и т.д. Но в силу теоремы об объединении счетных множеств объединение счетных множеств дает снова счетное множество. Поскольку последовательность  $\{v\}, A, B, \dots$  в

силу связности графа содержит каждую вершину бесконечного графа, то этим теорема полностью доказана.

Следствие. *Всякий связный локально конечный бесконечный граф является счетным.*

Доказательство следует из того, что объединение счетного множества конечных множеств есть счетное множество.

На бесконечные графы также переносятся и понятие маршрута, причем это понятие может иметь такие разновидности:

- *конечный маршрут* в бесконечном графе  $G$  определяется так, как и в случае конечных графов;
- *бесконечным в одну сторону маршрутом* в графе  $G$ , который начинается в вершине  $v_0$  называется бесконечная последовательность ребер вида  $(v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3) \dots$ ;
- *бесконечным в обе стороны маршрутом* в графе  $G$  называется бесконечная последовательность ребер вида  $\dots, (v_{-2}, v_{-1}), (v_{-1}, v_0), (v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3) \dots$ .

Бесконечные в одну и в обе стороны цепи, а также простые цепи определяются так, как и понятия длины и расстояния между вершинами. Условия существования бесконечных цепей у графов дает теорема Кенига.

**Лемма Кенига.** *Пусть  $G$  – связный локально конечный бесконечный граф. Тогда для всякой его вершины  $v$  существует бесконечная в одну сторону простая цепь, начинаящая в вершине  $v$ .*

Доказательство. Если  $u$  – произвольная вершина графа  $G$ , отличная от вершины  $v$ , то существует некоторая простая цепь, которая соединяет вершины  $u$  и  $v$ . Отсюда вытекает, что в  $G$  должно быть бесконечно много простых цепей с началом в вершине  $v$ . Поскольку степень вершины  $v$  конечна, то бесконечное множество таких простых путей должно начинаться с одного и того же ребра. Если таким ребром является ребро  $(u, v_1)$ , то повторив эту процедуру для вершины  $v_1$ , получим новую вершину  $v_2$  и соответствующее ей ребро  $(v_1, v_2)$ . Продолжая этот процесс дальше, получим бесконечную в одну сторону простую цепь  $v, v_1, v_2 \dots$ . Лемма доказана.

Важное значение леммы Кенига состоит в том, что она дает возможность получать результаты о бесконечных графах из соответствующих результатов о конечных графах.

Рассмотрим бесконечные эйлеровы и гамильтоновы графы.

Связный счетный граф  $G$  называется **эйлеровым**, если в нем существует бесконечная в обе стороны цепь, содержащая каждое ребро графа  $G$ . Такая цепь называется (двусторонней) **эйлеровой цепью**.

Счетный граф называется полуэйлеровым, если в нем существует бесконечная в одну или в обе стороны цепь, включающая каждое ребро графа  $G$ .

**Теорема 16.2.** Пусть  $G$  – связный счетный эйлеров граф, тогда:

1. в  $G$  каждая вершина имеет бесконечную или четную степень;
2. для всякого конечного подграфа  $H$  графа  $G$  дополнение  $\bar{H}$  подграфа  $H$  в графе  $G$  имеет не больше двух компонент связности;
3. если  $H$  – конечный подграф графа  $G$  и каждая вершина  $H$  имеет четную степень, то дополнение  $\bar{H}$  подграфа  $H$  имеет ровно один бесконечный компонент связности.

Доказательство.

1. Пусть  $P$  – эйлерова цепь графа  $G$ . Тогда при любом прохождении по цепи  $P$  через произвольную вершину графа  $G$  степень этой вершины увеличивается на два. Поскольку каждое ребро встречается в  $P$  только один раз, то всякая вершина графа  $G$  имеет либо бесконечную (счетную) степень, либо эта степень четная.

2. Пусть  $P$  – эйлерова цепь графа  $G$ . Разобьем  $P$  на три подцепи:  $P_-$ ,  $P_0$ ,  $P_+$  так, чтобы  $P_0$  являла собой конечную цепь, содержащую все ребра графа  $H$  (и, возможно, еще некоторые ребра графа  $G$ , не принадлежащие графу  $H$ ), а  $P_-$  и  $P_+$  – две бесконечные в одну сторону цепи. Тогда бесконечный граф  $K$ , вершинами которого являются вершины  $P_-$  и  $P_+$ , а ребрами – ребра этих цепей, имеет не более двух компонент связности. Поскольку  $H$  можно получить из графа  $K$  добавлением лишь конечного числа ребер, то отсюда вытекает, что и  $\bar{H}$  тоже может иметь не больше двух компонент связности.

3. Разобьем как и в предыдущем случае эйлерову цепь  $P$  на три подцепи:  $P_-$ ,  $P_0$ ,  $P_+$ . Пусть  $u$  – начальная вершина,  $v$  – концевая вершина цепи  $P_0$ . Покажем, что  $u$  и  $v$  соединены маршрутом в  $H$ .

Если  $u=v$ , то все ясно, а если  $u \neq v$ , то удалив ребро графа  $H$ , получим, что вершины  $u$  и  $v$  имеют нечетные степени в  $H$ . А отсюда согласно следствию о связности графа («всякий граф порядка  $n$ , имеющий больше  $(n-1) \cdot (n-2)/2$  ребер, связный») вытекает, что  $u$  и  $v$  связаны полуэйлеровой цепью. Следовательно,  $\bar{H}$  имеет ровно один компонент связности.

Теорема доказана.

## Литература

1. С.Д. Шапорев. Дискретная математика. С-кт Петербург, БХВ-Петербург, 2007 г.
2. Ю.П. Шевелев. Дискретная математика, СПб, «Лань», 2008 г.
3. Ю.П. Шевелев. Прикладные вопросы дискретной математики, СПб, «Лань», 2018 г.
4. В.И. Копылов. Курс дискретной математики, СПб, «Лань», 2011 г.
5. О.Е. Акимов. Дискретная математика. Логика, группы, графы. Москва, Лаборатория базовых знаний, 2001 г.
6. Зыков А.А. Основы теории графов. М., Наука, 1987 г.
7. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. М., В.ш., 1986 г.
8. Ore O. Теория графов. М.; Наука, 1986 г.