Саровский физико-технический институт – филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» **(СарФТИ НИЯУ МИФИ)**	**УТВЕРЖДАЮ** Руководитель СарФТИ НИЯУ МИФИ ________________ Сироткина А.Г. «____» ________________ 2015 г.

ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПЕРЕПОДГОТОВКИ

«Специальные главы высшей математики»
(наименование программы)

Укрупненная группа направлений подготовки
01.03.01. Математика
(направление)

Общие положения

Целью профессиональной переподготовки по направлению **"Математика"** является подготовка современного специалиста в области организации педагогической деятельности с учётом специфики предметной области в высших учебных заведениях.

Категория слушателей: профессорско-преподавательский состав вуза
Срок обучения: 360 часов (10 з.е.)
Режим занятий: 14 часов в неделю без отрыва от производства

Разработчик программы: доцент кафедры ВМ, к.пед.н. Прокофьева Н.В.
Разработчик программы: доцент кафедры ВМ, к.пед.н. Конькова М.И.

Саров 2015

Саровский физико- технический институт – филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» **(СарФТИ НИЯУ МИФИ)**	**УТВЕРЖДАЮ** Руководитель СарФТИ НИЯУ МИФИ ___________________ Сироткина А.Г. «_____»_______________ 2015 г.

ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПЕРЕПОДГОТОВКИ

«Специальные главы высшей математики»
(наименование программы)

Укрупненная группа направлений подготовки
01.03.01. Математика
(направление)

Общие положения

Целью профессиональной переподготовки по направлению **"Математика"** является подготовка современного специалиста в области организации педагогической деятельности с учётом специфики предметной области в высших учебных заведениях.

Категория слушателей: профессорско-преподавательский состав вуза
Срок обучения: 360 часов (10 з.е.)
Режим занятий: 14 часов в неделю без отрыва от производства

Разработчик программы: доцент кафедры ВМ, к.пед.н. Прокофьева Н.В.
Разработчик программы: доцент кафедры ВМ, к.пед.н. Конькова М.И.

Саров 2015

1. Компетенции, подлежащие формированию по итогам обучения

Категория работника	Вид профессиональной (трудовой) деятельности	Компетенции/ готовность к выполнению трудовых действий в разрезе видов профессиональной (трудовой) деятельности
профессорско-преподавательский состав	**1. организационно-управленческая:** • оперативное управление малыми коллективами и группами, сформированными для реализации конкретного научно-исследовательского проекта; • разработка предложений и рекомендаций по повышению эффективности учебно-педагогического процесса	ПК-7Способениспользовать методы математического и алгоритмического моделирования при анализе управленческих задач в научно-технической сфере, в экономике, бизнесе и гуманитарных областях знаний.
		ПК-8 Способен представлять и адаптировать знания с учётом уровня аудитории
	2. научно-педагогическая: • преподавание математических дисциплин в высшем учебном заведении.	ПК-9Способенк организации учебной деятельности в области математики в образовательных учреждениях различного уровня, используя существующие программы и учебно-методические материалы
		ПК-10Способенк планированию и осуществлению педагогической деятельности с учетом специфики предметной области в образовательных организациях различного уровня.
		ПК-11 Способен к проведению методических и экспертных работ в области математики.

2. Объем программы и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов
Общий объем программы	360
Лекционные занятия	134
Практические занятия	118
Подготовка и защита ВКР	108

3. Структура и содержание учебной программы

№ п/п	Наименование разделов и тем профессионального модуля	Всего часов	Аудиторное обучение, в том числе		Применяемые образовательные технологии	Форма контроля
			Лекции	Пр. занятия		
Модуль 1.История и методология математики						
1.1.	История математики как наука	4	2	2	Лекция-беседа	Участие в дискуссии
1.2.	Формирование представлений о числе и фигуре. Этап зарождения математики	6	4	2	Работа в малых группах предполагает совместную учебно-познавательную и творческую деятельность слушателей в группе.	Участие в дискуссии
1.3.	Математика Древней Греции и эпохи эллинизма. Зарождение теоретической математики	12	8	4	Проблемная лекция	Участие в дискуссии
1.4	Развитие элементарной математики в арабском мире и Европе в Средние века	12	8	4	Информационная лекция	Ответы на контрольные вопросы
1.5	Математика Нового времени	12	8	4	Семинар, построенный в виде ответов на заранее подготовленные слушателями вопросы.	Участие в дискуссии
1.6	Математика XIX века	10	6	4	Лекция-беседа	Участие в дискуссии
1.7	Математика в России и в СССР	8	4	4	Доклады слушателей	Коллективное обсуждение представленных докладов
1.8	Математика XX века	8	4	4	Доклады слушателей	Коллективное обсуждение представленных докладов
всего		**72**	**44**	**28**		

Модуль 2.Введение в математическую логику						
2.1.	Предмет математической логики. Логика высказываний. Теорема о функциональной полноте.	8	4	4	Информацион-ная лекция	Выполнение теста по теме: «Основы математической логики»
2.2.	Исчисление высказываний	12	6	6	Лекция - беседа	Ответы на контрольные вопросы, решение задач
2.3.	Алгебра предикатов	4	2	2	Информацион-ная лекция	Ответы на контрольные вопросы, решение задач
2.4	Исчисление предикатов	12	6	6	Лекция - беседа	Выполнение контрольной работы
всего		**36**	**18**	**18**		
Модуль 3.Теория чисел						
3.1	Простые и составные числа.	14	8	6	Проблемная лекция	Ответы на контрольные вопросы, решение задач
3.2	Сравнения	10	4	6	Информацион-ная лекция	Ответы на контрольные вопросы, решение задач
3.3	Алгебраические числа	4	2	2	Лекция-беседа	Ответы на контрольные вопросы, решение задач
3.4	Диофантовы приближения и трансцендентные числа	8	4	4	Лекция-беседа	Выполнение контр.работы
всего		**36**	**18**	**18**		
Модуль 4. Теория случайных процессов						
4.1	Фундаментальные понятия и результаты, лежащие в основе построения математической теории случайных процессов	6	4	2	Лекция-беседа	Ответы на контрольные вопросы, решение задач
4.2	Виды сходимости в вероятностном пространстве и характеристики гладкости случайного процесса	8	4	4	Лекция-беседа	Ответы на контрольные вопросы, решение задач
4.3	Основные классы случайных процессов	16	8	8	Проблемная лекция	Ответы на контрольные вопросы, решение задач

4.4	Интегрирование случайных процессов	6	2	4	Лекция-беседа	Выполнение контрольной работы
всего		**36**	**18**	**18**		
Модуль 5. Численные методы						
5.1	Погрешность результата численного решения задачи	4	2	2	Лекция - беседа	Ответы на контрольные вопросы, решение задач
5.2	Интерполирование функций	8	4	4	Информацион-ная лекция	Ответы на контрольные вопросы, решение задач
5.3	Приближенное вычисление интегралов	8	4	4	Проблемная лекция	Ответы на контрольные вопросы, решение задач
5.4	Численное решение систем линейных алгебраических уравнений	8	4	4	Информацион-ная лекция	Ответы на контрольные вопросы, решение задач
5.5	Решение нелинейных уравнений	4	2	2	Информацион-ная лекция	Ответы на контрольные вопросы, решение задач
5.6	Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений	4	2	2	Проблемная лекция	Выполнение итогового теста
всего		**36**	**18**	**18**		
Модуль 6. Методы оптимизации						
6.1	Проблема выбора и основы теории принятия управленческих решений	4	2	2	Лекция - беседа	Обсуждение вопросов темы, ответы на контрольные вопросы, решение задач
6.2	Основы линейного программирования	12	6	6	Информацион-ная лекция	Обсуждение вопросов темы, ответы на контрольные вопросы, решение задач
6.3	Основы теории матричных игр	12	6	6	Лекция - беседа	Ответы на контрольные вопросы, решение задач

6.4	Моделирование операций по схеме марковских процессов	8	4	4	Информацион-ная лекция	Ответы на контрольные вопросы, решение задач
всего		**36**	**18**	**18**		
итого		**252**	**134**	**118**		

Содержание модулей

Модуль 1.История и методология математики

1.1. *История математики как наука*.

Природа математического знания. Предмет истории математики. Математика как развивающаяся наука. Кризисы развития. Периодизация развития математики. Математизация наук в практической деятельности.

1.2. *Формирование представлений о числе и фигуре. Этап зарождения математики*.

Общая характеристика доисторической эпохи. Возникновение числа и первых числовых систем. Возникновение первых геометрических представлений. Основные достижения математической культуры Древнего Египта. Математические достижения Древнего Вавилона. Математика Древнего Китая. Общая характеристика математической культуры народов Древней Индии.

1.3. *Математика Древней Греции и эпохи эллинизма. Зарождение теоретической математики*.

Панорама развития математики в Древней Греции и в эпоху эллинизма; источники; главные действующие лица; рождение математики как теоретической науки; пифагорейцы.

Открытие несоизмеримости; геометрическая алгебра; знаменитые задачи древности – удвоение куба, трисекция угла, квадратура круга (*экскурс:* число, история понятия трансцендентного числа от древности до решения седьмой проблемы Гильберта).

Апории Зенона - парадоксы, связанные с понятием бесконечного и движения; аксиоматическое построение математики в «Началах» Евклида; структура и содержание "Начал" (*экскурс:* развитие аксиоматического метода от Евклида до Гильберта; могла ли неевклидова геометрия быть открыта в античности?).

Теория отношений Евдокса; классификация иррациональностей; теория правильных многогранников (*экскурс:*"Тимей" Платона и"Начала" Евклида как античный курс "математической физики"); инфинитезимальные методы античности, метод неделимых, метод исчерпывания Евдокса.

Биография Архимеда, метод интегральных сумм Архимеда, дифференциальные методы Архимеда.

«Конические сечения» Аполлония; вывод симптома параболы у Менехма и у Аполлония (*экскурс:* внешние и внутренние факторы, определяющие развитие математики, роль практики и внутренней логики в ее развитии; конические сечения в истории небесной механики – И. Кеплер, И. Ньютон).

Математика первых веков Новой эры. Диофант Александрийский и его «Арифметика»; предшественники Диофанта и его последователи (*экскурс:*Великая теорема Ферма - от Диофанта до А.Уайлса; проблема интерпретации старинного математического текста).

1.4. *Развитие элементарной математики в арабском мире и Европе в Средние века*.

Общая характеристика начала второго периода развития математической науки.

Математика арабского Востока, ал-Хорезми и его трактат об индийском счете, выделение алгебры в самостоятельную науку, рождение тригонометрии.

Математика в Европе в Средние века, Леонардо Пизанский и его творчество; панорама развития математики в эпоху Возрождения.

1.5. *Математика Нового времени*

Математика XVI века: проблема решения алгебраических уравнений: расширение понятия числа, совершенствование символики, решение уравнений 3-й и 4-й степеней.

Франсуа Виет и его символическое исчисление; алгебра Виета (*экскурс:* проблема решения алгебраических уравнений в радикалах).

Математика и научно-техническая революция XVI-XVII вв.: Г.Галилей - И.Кеплер - И.Ньютон; новые формы организации науки – научные общества, академии, журналы.

Развитие вычислительных средств – открытие логарифмов; рождение аналитической геометрии; биография Декарта; предыстория создания математического анализа.

Рождение математического анализа: биография И.Ньютона, метод флюксий; биография Г.В.Лейбница, исчисление Лейбница; аппарат бесконечных рядов.

Развитие математического анализа в XVIII в.: панорама, действующие лица, биография Л.Эйлера; математическая трилогия Эйлера; проблемы обоснования анализа – критика Дж. Беркли, «исчисление нулей» Эйлера, теория пределов Даламбера, теория аналитических функций Ж. Лагранжа.

Развитие понятия функции с древности до начала XX в., классификация функций по Эйлеру, спор о колебании струны и развития понятия решения (классического и обобщенного) уравнения с частными производными в XVIII - начале XX вв.

1.6. *Математика* XIX *века*

Математика XIX века: панорама, организация математической жизни, ведущие математические школы, математические журналы и общества, организация реферативных изданий и международных конгрессов; реформа математического анализа, построение теории действительного числа, рождение теории множеств, открытие парадоксов.

Теория функций комплексного переменного: наследие XVIII в., интерпретация комплексного числа, теория О.Коши, геометрическое направление Б.Римана, теория аналитических функций К.Вейерштрасса.

Алгебра XVIII – начала XX вв.: основная теорема алгебры и проблема решения уравнений в радикалах; "Размышление об алгебраическом решении уравнений" Ж.Л. Лагранжа, рассмотрение группы подстановок корней; «Арифметические исследования» Гаусса, биография К.Ф.Гаусса; создание теории групп и теории Галуа; формирование понятий поля, кольца, алгебры; развитие линейной алгебры, гиперкомплексные числа, определители и матрицы, понятие n-мерного векторного пространства; формирование алгебры как науки об алгебраических структурах; семинар Э. Артина и Э.Нетер. "Современная алгебра" Б.Л. Ван дер Вардена.

Преобразование геометрии: биография Н.И. Лобачевского, открытие неевклидовой геометрии, (экскурс*: об одновременных открытиях),* первые интерпретации; римановы геометрии (*экскурс:* риманова геометрия и рождение теории относительности; *"непостижимая эффективность " математики в физических науках),* классификация геометрических теорий – "Эрлангенская программа" Ф.Клейна.

1.7. *Математика в России и в СССР*

Краткая справка о математических знаниях на Руси в допетровскую эпоху, основание Петербургской Академии наук и Московского университета, реформы Александра I, Остроградский и Лобачевский; реформы Александра II, биография П.Л. Чебышева, Петербургская математическая школа П.Л. Чебышева; основание Московского математического общества, Московская философско-математическая школа; деятельность СВ. Ковалевской.

Организация математической жизни в стране накануне Первой мировой войны, математические центры и издания, конфронтация Петербурга и Москвы, рождение Московской школы теории функций (*экскурс:* влияние философской мысли на зарождение и развитие математических идей); становление математического сообщества после Октябрьской революции, рождение Советской математической школы, "Дело академика Н.Н.Лузина", математические съезды и конференции, организации и издания, математическая жизнь к середине века, ведущие математические центры. Биография А.Н.Колмогорова.

1.8. *Математика* XX *века*

Международный математический конгресс в Париже (1900г.) и "Математические проблемы" Гильберта, биография Д.Гильберта; основные этапы жизни математического сообщества (до первой мировой войны, между первой и второй мировыми войнами, после второй мировой войны), математические конгрессы, международные организации, издательская деятельность, премии, ведущие математические школы и институты; кризис в основаниях математики в начале века, реакция на него: логицизм, формализм, интуиционизм; результаты К.Геделя и кризис программы обоснования математики Д.Гильберта; возникновение группы Бурбаки, ее деятельность и идеология, реакция на неё сообщества и современное положение; революция в вычислительной технике и развитие информатики.

Учебно-методическое и информационное обеспечение модуля 1.

а) основная литература:

1. Колмогоров А.Н. Математика в её историческом развитии. Под ред. В.А. Успенского. М.: Наука. 1991.
2. Рыбников К.А. История математики. М.: Изд. Московского университета. 1994.
3. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Под редакцией А.П.Юшкевича. Т. 1 – 3. М.: Наука. 1970 – 1972.
4. Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей. Под ред. А.Н. Колмогорова и А.П. Юшкевича. М.: Наука, 1978.
5. Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций. Под ред. А.Н. Колмогорова и А.П. Юшкевича. М.: Наука, 1981.
6. Математика XIX века. Чебышевское направление в теории функций. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Вариационное исчисление. Теория конечных разностей. Под ред. А.Н. Колмогорова и А.П. Юшкевича. М.: Наука. 1987.
7. Гнеденко Б.В. Очерки по истории математики в России. Издание 3-е. М.: УРСС. 2007.
8. Юшкевич А.П. История математики в России до 1917 года. М.: Наука, 1968.
9. Очерки по истории математики. Под ред. Б.В. Гнеденко. М.: Изд. Московского университета. 1997.

б) дополнительная литература:

10. Рыбников К.А. Введение вметодология математики (тезисы лекций). М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ. 1994 – 1995.
11. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М.: ИЛ. Издание 2-е. М.: УРСС. 2006.
12. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.: Наука, 1990.
13. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. М.: Наука, 1990.
14. Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж. Пути и лабиринты. Очерки по истории математики. М.: Мир, 1987.
15. Хрестоматия по истории математики. Под ред. А.П. Юшкевича. М.: Просвещение. Т. 1 – 2, 1976 – 1977.

Модуль 2. Введение в математическую логику

2.*1. Предмет математической логики. Логика высказываний. Теорема о функциональной полноте.*

Предмет математической логики. Парадоксы теории множеств, семантические парадоксы. Формальный аксиоматический метод Гильберта, программа Гильберта. Роль теорем Гёделя о неполноте. Логика высказываний. Высказывания и логические связки. Формулы логики высказываний, понятие подформулы. Истинностные таблицы для логических связок и формул. Теорема о функциональной полноте.

2.2. Исчисление высказываний.

Исчисление высказываний. Аксиомы и правила вывода исчисления высказываний. Понятие вывода и выводимой формулы; примеры. Корректность исчисления высказываний. Выводимость из гипотез. Теорема о дедукции для исчисления высказываний. Примеры выводимых правил: правило силлогизма, контрапозиции. Непротиворечивые множества формул в исчислении высказываний. Теорема Линденбаума. Свойства максимальных непротиворечивых множеств. Теорема о полноте исчисления высказываний.

2.3. Алгебра предикатов.

Логика предикатов. Предикаты. Переменные и их области изменения. Кванторы. Языки первого порядка: термы, формулы, подформулы. Примеры языков первого порядка. Свободные и связанные вхождения переменных. Замкнутые формулы. Подстановка терма вместо переменной. Модели (алгебраические системы, интерпретации) для данного языка первого порядка. Истинность замкнутой формулы в данной модели. Предикаты, выразимые в данной модели.

Учебно-методическое и информационное обеспечение модуля 2.

а) основная литература:

1. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984.
2. Успенский В. А., Верещагин Н. К., Плиско В. Е. Вводный курс математической логики. М.: Физматлит, 2002.
3. Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Математическая логика. М.: УРСС, 2004.
4. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по математической логике, теории множеств и теории алгоритмов. М.: Физматлит, 2004.
5. Верещагин Н. К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. М.: МЦНМ, 2000
6. Верещагин Н. К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть
7. Крупский В. Н., Плиско В. Е. Теория алгоритмов. М.: Издательский центр «Академия», 2009.

б) дополнительная литература:

8. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.
9. Архангельский А. В. Канторовская теория множеств. М.: Изд-во МГУ, 1988.
10. Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994.

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

11. Крупский В. Н. Лекции по теории алгоритмов для первого курса мехмата (2004). http://lpcs.math.msu.su/~krupski/download/mm1/lect_kru.pdf, http://lpcs.math.msu.su/~krupski/download/mm1/lect_kru.ps
12.Крупский В. Н. Подборка задач по теории алгоритмов. http://lpcs.math.msu.su/~krupski/download/mm1/zad_alg.pdf, http://lpcs.math.msu.su/~krupski/download/mm1/zad_alg.ps
13. Плиско В. Е. Математическая логика: Курс лекций. http://lpcs.math.msu.su/~plisko/matlog.pdf, http://lpcs.math.msu.su/~plisko/matlog.ps
14. Плиско В. Е. Теория алгоритмов: Курс лекций. http://lpcs.math.msu.su/~plisko/ta.pdf, http://lpcs.math.msu.su/~plisko/ta.ps

Модуль 3. Теория чисел

3.*1. Простые и составные числа.*

Общие понятия. Свойства простых и составных чисел, законы распределения простых чисел в натуральном ряде. Решение линейных уравнений. Теорема Чебышева об оценках количества простых чисел до заданной границы.Простые числа в арифметических прогрессиях.Нерешённые задачи о простых числах.Дзета-функция Римана. Асимптотический закон распределения простых чисел.

3.2. *Сравнения.*

Общие понятия. Теорема Эйлера и малая теорема Ферма. Характеры. L-функции Дирихле.

3.3. *Алгебраические числа.*

Определение алгебраических чисел и вопросы существования. Теорема Кантора о счётности множества алгебраических чисел.

3.4. *Диофантовы приближения и трансцендентные числа.*

Определение трансцендентных чисел. Теорема Лиувилля и конструирование трансцендентных чисел. Трансцендентность гильбертова числа. Диофантовы уравнения.

Учебно-методическое и информационное обеспечение модуля 3.

а) основная литература:

1. Виноградов И.М. Основы теории чисел. Учебник. Изд. 6-е испр. М. -Л.: ГИТТЛ, 1952.
2. Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. Введение в теорию чисел. Учебное пособие. М.: Изд-во МГУ, 1984.
3. Нестеренко Ю.В. Теория чисел. Учебник для вузов. М.: Издательский центр «Академия», 2008.

б) дополнительная литература:

4. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985.
5. Бухштаб А.А. Теория чисел. Учебник. М.: Просвещение, 1966.
6. Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:www.numbertheoryweb.

Модуль 4. Теория случайных процессов

4.*1. Фундаментальные понятия и результаты, лежащие в основе построения математической теории случайных процессов.*

Вероятностное пространство. Случайный процесс как семейство случайных величин, определенных на одном вероятностном пространстве. Конечномерные распределения случайного процесса. Эквивалентность двух случайных процессов.

Математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция случайного процесса. Нормированная корреляционная функция и ее свойства. Примеры на вычисление корреляционной функции.

4.2. *Виды сходимости в вероятностном пространстве и характеристики гладкости случайного процесса*

Виды сходимости в вероятностном пространстве: по вероятности, с вероятностью 1, в среднеквадратичном, по распределению. Соотношения между видами сходимости.

Непрерывность и дифференцируемость случайного процесса. Необходимые и достаточные условия непрерывности и дифференцируемости случайного процесса в среднеквадратичном.

4.3. Основные классы случайных процессов

Стационарные случайные процессы. Стационарность в узком и широком смыслах. Примеры.

Нормальные случайные процессы. Конечномерные распределения нормального процесса. Стационарный нормальный процесс.

Марковские случайные процессы. Условная плотность распределения и ее вероятностный смысл. Свойство конечномерной плотности распределения марковского процесса. Уравнение Колмогорова-Чепмена.

Винеровский и пуассоновский процессы и их свойства.

4.4. Интегрирование случайных процессов

Интегрирование случайных процессов в среднеквадратичном. Стохастические интегралы и дифференциалы.

Формула замены переменных в стохастическом интеграле Ито. Стохастические дифференциальные уравнения.

Учебно-методическое и информационное обеспечение модуля 4.

а) основная литература:

1. Семаков С.Л. Случайные процессы: введение в теорию и приложения. М:. Финакадемия, 2004.

2. Семаков С.Л. Выбросы случайных процессов. М.: Наука, 2005.

3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Высшая школа, 1998.

4. Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М. Случайные процессы. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.

б) дополнительная литература:

5. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. М.: Мир, 1969.

6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, Т. 1,2. М.: Мир, 1984.

7. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Советское радио, 1977.

Модуль 5. Численные методы

5.*1. Погрешность результата численного решения задачи.*

Источники и классификация погрешности. Запись чисел в ЭВМ. Приближенные числа, их абсолютные и относительные погрешности. Арифмитические действия с приближенными числами. Погрешность функции. Определение допустимой погрешности аргументов по допустимой погрешности функции.

5.*2. Интерполирование функций.*

Постановка задачи интерполирования функции. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Оценка остаточного члена интерполяционного многочлена Лагранжа. Схема Эйткена. Разделенные разности и их свойства. Интерполяционная формула Ньютона. Интерполирование сплайн-функциями. Метод наименьших квадратов. Обратное интерполирование.

5.*3. Приближенное вычисление интегралов.*

Постановка задачи численного интегрирования. Вычисление определенного интеграла по формулам прямоугольников, трапеции, Симпсона. Точностные оценки формул интегрирования, выбор шага интегрирования. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Ортогональные многочлены. Правило Рунге практической оценки погрешности. Квадратурные формулы Гаусса.

5.*4. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений.*

Основные понятия. Метод Гаусса решения системы линейных алгебраических уравнений. Схема Гаусса с выбором главного элемента. Решение системы линейных алгебраических уравнений специального вида методом прогонки. Метод простой итерации, особенности реализации данного метода на ЭВМ. Метод Зейделя.

5.*5. Решение нелинейных уравнений.*

Этапы нахождения корней нелинейного уравнения. Метод деления отрезка пополам. Метод последовательных приближений и смежные вопросы. Метод Ньютона решения нелинейного уравнения. Модифицированный метод Ньютона. Сравнение методов решения нелинейного уравнения по различным критериям.

5.*6. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Задача Коши, общие замечания. Разностная аппроксимация задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Особенности интегрирования систем уравнений. Построение разностной схемы. Разностная аппроксимация дифференциальных операторов. Методы Эйлера и Рунге-Кутта. Оценка погрешности конечно-разностных методов. Многошаговые методы численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Учебно-методическое и информационное обеспечение модуля 5.

а) основная литература:

1. Н.С.Бахвалов, Н.П.Жидков, Г.М.Кобельков. Численные методы. М., Физматлит, 2003.

2. Н.С.Бахвалов, А.А.Корнев, Е.В.Чижонков. Численные методы. Решения задач и упражнения. М., Дрофа, 2009.

б) дополнительная литература:

3. А.А.Самарский, Е.С.Николаев. Методы решения сеточных уравнений. М., Наука.

Модуль 6. Методы оптимизации

6.*1. Проблема выбора и основы теории принятия управленческих решений.*

Примеры сложных управленческих решений и применение исследования операций. История развития и использования методов исследования операций. Основные понятия исследования операций. Операция. Эффективность операции. Математическая модель операции. Общая постановка задачи исследования операции. Детерминированный случай. Оптимизация решения в условиях неопределенности. Оценка операции по нескольким критериям. Методика проведения исследования операций. Определение целей. Составление плана разработки проекта. Формулировка проблемы. Построение модели. Разрабботка вычислительного метода. Разработка технического задания на программирование, программирование и отладка. Сбор данных. Проверка модели. Реализация результатов исследования операций.

6.2. *Основы линейное программирование.*

Основная задача линейного программирования. Геометрическая интерпретация основной задачи линейного программирования. Задача линейного программирования с ограничениями-неравенствами. Переход от нее к ОЗЛП и обратно. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования. Табличный алгоритм замены базисных переменных. Отыскание опорного решения основной задачи линейного программирования. Общее решение основной задачи линейного программирования.

6.*3. Основы теории матричных игр.*

Основные понятия теории игр и игры с седловой точкой. Решение игры в смешанных стратегиях и упрощение игр. Игра 2×2 и ее геометрическая интерпретация. Игры $2\times n$ и $m\times2$. Решение игр $m\times n$. Игры с безразличной природой.

6.*4. Моделирование операций по схеме марковских процессов.*

Граф состояний и уравнения Колмогорова для марковского процесса с непрерывным временем. Потоки событий. Предельные вероятности состояний. Процессы гибели и размножения.

Учебно-методическое и информационное обеспечение модуля 6.

а) основная литература

1. Лапчик М.П., Рагулина М.И., Хеннер Е.К Численные методы. М.: Академия, 2008.
2. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высш. шк., 2008.
3. Соколов А.В, Токарев В.В. Методы оптимальных решений. Т.1. Общие положения. Математическое программирование. М.: Физматлит, 2010.
4. Соколов А.В, Токарев В.В. Методы оптимальных решений. Т.2. Многокритериальность. Динамика. Неопределенность. М.: Физматлит, 2010.
5. Горлач Б.А. Исследование операций: учебное пособие. СПб.:Изд-во «Лань», 2013.
6. Успенский В. А., Верещагин Н. К., Плиско В. Е. Вводный курс математической логики. М.: Физматлит, 2002.
7. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по математической логике, теории множеств и теории алгоритмов. М.: Физматлит, 2004.

б) дополнительная литература

8. Измаилов А.Ф., Солодов М.В. Численные методы оптимизации. М.: Физматлит, 2008.
9. Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Математическая логика. М.: УРСС, 2004.

4. Требования к оценке качества освоения программы

Формы и методы контроля и оценки результатов освоения модулей

Наименование учебного модуля	**Основные показатели оценки**	**Формы и методы рубежного контроля учебного модуля**
Модуль 1. **История и методология математики.**	Проходной уровень освоения содержания модуля не менее 60%	Защита презентации (темы докладов см. в приложении 2)
Модуль 2. **Введение в математическую логику.**	Проходной уровень освоения содержания модуля не менее 60%	Выполнения контрольной работы и теста по тематике модуля (см. приложение 2)
Модуль 3. **Теория чисел.**	Проходной уровень освоения содержания модуля не менее 60%	Выполнения контрольной работы по тематике модуля (см. приложение 2)
Модуль 4. **Теория случайных процессов.**	Проходной уровень освоения содержания модуля не менее 60%	Выполнения контрольной работы по тематике модуля (см. приложение 2)
Модуль 5. **Численные методы.**	Проходной уровень освоения содержания модуля не менее 60%	Выполнения теста по тематике модуля (см. приложение 2)
Модуль 6. **Методы оптимизации.**	Проходной уровень освоения содержания модуля не менее 60%	Выполнение РР по тематике модуля (см. список литературы [5])
Итоговая аттестация	Проходной уровень освоения содержания программы не менее «удовлетворительно»	Защита выпускной квалификационной работы

Форма итоговой аттестации по программе: выполнение и защита квалификационной работы.

Слушателям после успешного окончания обучения (выполнившим все требования учебного плана) выдаются документы установленного образца о повышении квалификации (удостоверение о краткосрочном повышении квалификации)

5. Подготовка и защита выпускной квалификационной работы (ВКР)

Перечень тем ВКР

1. Приближения в метрике Чебышёва.
2. Математический метод изучения оптимальных стратегий в играх.
3. Анализ принятия оптимальных решений в условиях конфликта методами теории игр.
4. Анализ теории простых чисел и детерминантный признак делимости.
5. Применение линейной алгебры в комбинаторике.

Структура ВКР

1. Титульный лист (образец см. в приложении 1).
2. Оглавление(1-2 страницы).
3. Аннотация.
4. Введение (2-4 страницы).
5. Основная часть: глава 1 (теоретическая); глава 2 (практическая).
6. Заключение. (2-3 страницы).
7. Список литературы. (1-3 страницы).
8. Приложения(если необходимо).

Форматирование текста ВКР

Работа должна быть набрана в текстовом редакторе Word с соблюдением следующих требований:

– Текст следует печатать через 1,5 межстрочного интервала с использованием шрифта Times New Roman кегль 14.

– Поля должны иметь следующие размеры: левое -30 мм., верхнее – 20 мм., правое -15 мм., нижнее – 20 мм.

– Абзацы в тексте следует начинать с отступа, равного 12 мм.

— Нумерация страниц начинается со страницы 3 (на титульном листе и оглавлении номер страницы не ставится). Номер страницы ставится в центре нижней части листа без точки. Страницы работы нумеруются арабскими цифрами (нумерация сквозная по всему тексту).

– Вставки на полях и между строк не допускаются.

– При включении цитат обязательна ссылка на источник.

– Сокращения в тексте не допускаются.

– Таблицы должны быть простыми и удобными. В графах таблиц необходимо повторять одинаковые цифры, символы, формулы и обозначения, не заменяя их кавычками или иными знаками. Пропуски в графах (за отсутствием данных) следует заполнять знаком «тире» или словами «нет данных».

– Заголовки располагают в середине строки без точки в конце и печатают заглавными буквами без подчеркивания. Каждый структурный элемент следует начинать с новой страницы.

– Главы нумеруются. Они могут делиться на параграфы, которые в свою очередь могут делиться на пункты и подпункты (и более мелкие разделы). Номер параграфа состоит из номеров главы и параграфа в главе, разделенных точкой. В конце номера точка не ставится. Аналогичным образом нумеруются и пункты в параграфе (например: 2.4.2 Анализ результатов). Заголовки параграфов, пунктов и подпунктов следует печатать с абзацного отступа с прописной буквы без точки в конце, не подчеркивая. Если заголовок состоит из двух предложений, их разделяют точкой. Переносы слов в заголовках не допускаются. Расстояние между заголовком и текстом должно быть равно одной пустой строке.

Расстояние между заголовками главы и параграфа – 2 интервала (8 мм).

6. **Кадровое обеспечение образовательного процесса по программе.**

№ пп.	Фамилия, имя, отчество	Образование (вуз, год окончания, специальность)	Должность, уч. степень, звание, стаж работы в данной или аналогичной должности, лет	Перечень основных научных и учебно-методических публикаций
Профессорско-преподавательский состав программы				

1.	Прокофьева Надежда Викторовна	Высшее, АГПИ им. А.П. Гайдара, 2002г., математика	Доцент, к.пед.н., 7 лет	1. К вопросу о гуманитарном потенциале задач теории вероятностей/ Н.В. Прокофьева // Гуманитарные традиции математического образования в России: материалы Всерос. науч. конф. (с международным участием). – Арзамас: Изд-во АГПИ им. А.П. Гайдара, 11-12 декабря 2012. – С. 230-234.
				2. Стратегия постановки образовательных перспектив при обучении студентов линейной алгебре в техническом вузе/ Н.В. Прокофьева // Современная российская наука глазами молодых исследователей: материалы IV Междунар. научно-практ. конф. молодых учёных и специалистов (17 февраля 2014 г.)// В мире научных открытий. Красноярск: Научно-инновационный центр, 2014 г. 33.1 (51) – С. 422- 433.
				3. Обучение методу математической индукции на адаптационном курсе математики в техническом вузе/ Н.В. Прокофьева // Современная российская наука глазами молодых исследователей: материалы IV Междунар. научно-практ. конф. молодых учёных и специалистов (17 февраля 2014 г.)// В мире научных открытий. Красноярск: Научно-инновационный центр, 2014 г. 33.1 (51) – С. 411- 421.

2.	Конькова Мария Ивановна	Высшее, АГПИ им. А.П. Гайдара, 2003г., математика	Доцент, к.пед.н., 11 лет	1. Проблема формального и интуитивного в теории и практике обучения математике / М.И. Конькова // В мире научных открытий. – 2011. – №. 9.3 (31). – С.

				725–732. 2. Сущностные характеристики категории преемственности и ее функции в обучении основам математического анализа в системе школа–вуз / М.И. Конькова // Мир науки, культуры, образования. – 2011. – №. 6 (31). – С. 79-80. 3. О придании динамичности визуальным моделям, используемым в обучении основам математического анализа [Электронный ресурс] / М.И. Конькова, М.И.Зайкин// Современные проблемы науки и образования. – 2012. – №. 5 www.science-education.ru/105-7060. – С. 28-30. (авт. – 50 %). Публикация в коллективной монографии: 4. Об одном способе обогащения наглядно-образной основы понятия непрерывности функции в точке / С.В. Арюткина [и др.]; под общ.ред. проф. М.И. Зайкина. – Арзамас: Изд-во АГПИ им. А.П. Гайдара, 2012. – С. 316-319.

Приложение 1

Пример оформления титульного листа ВКР

Министерство образования и науки Российской Федерации
Саровский физико-технический институт – филиал
Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Факультет повышения квалификации

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ
Декан ФПК
________ Г. А. Федоренко
«___»___________20___ г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
Название темы (без кавычек)

по направлению подготовки **01.03.01. «Математика»**

Исполнитель:
Ф.И.О.
____

Консультант:
Ф.И.О.
____

Саров 2015

Приложение 2

I. Контрольные материалы для проведения рубежного контроля и оценки образовательных достижений слушателей программы профессиональной переподготовки по модулю 1.

Для более глубокого изучения курса истории и методологии математики слушателям предлагается подготовить доклад по одной из следующих тем:

1. Математика в Московском Университете в XIX – начале XX вв.
2. Вклад А.Н Колмогорова в науку и образование.
3. Математика в Московском университете в XIX – начале XX вв.
4. Математика в Москве в XIX – начале XX вв.
5. Математические работы И. Ньютона.

II. Контрольные материалы для проведения рубежного контроля и оценки образовательных достижений слушателей программы профессиональной переподготовки по модулю 2.

Тест по теме: «Основы математической логики»:

1. Наука, изучающая законы и формы мышления, называется:
а) алгебра;
б) геометрия;
в) философия;
г) логика.
2. Повествовательное предложение, в котором что-то утверждается или отрицается называется:
а) выражение;
б) высказывание;
в) вопрос;
г) Умозаключение.
3. Константа, которая обозначается «1» в алгебре логики называется:
а) ложь;
б) правда;
в) истина;
г) неправда.
4. Какое из следующих высказываний являются истинными?
а) город Париж — столица Англии;
б) 3+5=2+4;
в) II + VI = VIII;
г) томатный сок вреден.
5. Объединение двух высказываний в одно с помощью союза «и» называется:
а) инверсия;
б) конъюнкция;
в) дизъюнкция;
г) импликация.
6. Чему равно значение логического выражения (1v1)&(1v0)?
а)1; б) 0; в) 10; г) 2.
7. Двойное отрицание логической переменной равно:
а) 0;
б) 1;
в) исходной переменной;
г) обратной переменной.

Вариант итоговой контрольной работы.

1. Составьте таблицу истинности булевой функции, реализованную данной формулой. Составьте по таблице истинности СДНФ и СКНФ:

$$((x|\overline{y}) \to (z + \overline{xy})) \leftrightarrow (\overline{x} \downarrow y).$$

2. Проверьте, будут ли эквивалентны формулы, применяя следующие способы:

a) составлением таблиц истинности;

b) приведением формул к СДНФ или СКНФ с помощью эквивалентных преобразований.

$$x \to (y + x) \text{ и } (x \to y) + (x \to z).$$

3. С помощью эквивалентных преобразований приведите формулу к ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ. Постройте полином Жегалкина.

$$(x \vee \overline{y}) \to (\overline{x} + \overline{z}).$$

4. Найдите сокращенную, все тупиковые и минимальные ДНФ булевой функции, следующими способами:

a) методом Квайна;

b) с помощью карт Карно.

$$f(0, 1, 0)=f(1, 0, 0)=f(1, 0, 1)=0.$$

Выяснить, каким классам Поста принадлежит данная функция.

5. Предикатный символ D(x,y) интерпретируется на множестве натуральных чисел N как «x делитель y», + интерпретируется стандартно. Записать формулами языка I-го порядка в сигнатуре {+, D} условия «x=0» и «x=2».

6. Привести к предваренному виду формулу

$$(\forall x)((\forall z)(z<x\to P(z))\to P(x))\to(\forall x)P(x).$$

Будет ли эта формула истинной на множестве натуральных чисел, когда < интерпретируется стандартно, а P(x) означает произвольное свойство натуральных чисел?

7. Проверить, что ПВ4 сохраняет тождественную истинность секвенций.

8. Показать, что $(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \equiv (\forall x)(A(x) \vee (\forall x)B(x))$ не является тождеством.

III. Контрольные материалы для проведения рубежного контроля и оценки образовательных достижений слушателей программы профессиональной переподготовки по модулю 3.

Контрольная работа по теме: «Теория чисел»

1. Решить в целых числах систему уравнений: $\begin{cases} 4x+3y+2z+8t=36, \\ 3x-4y+7z+5t=12. \end{cases}$

2. Решить сравнение: $5^x = 3 \pmod{77}$.

3. Построить полную систему характеров по модулю 22.

4. Найти решения в целых числах уравнения: $x^2 - 57y^2 = 1$.

5. Разложить на неприводимые над GF(5) множители многочлен $x^4 + 2x^3 - 1$.

6. Найти рациональное число, приближающее $\sqrt{23}$ с точностью меньшей $2 \cdot 10^{-6}$, и имеющее знаменатель, меньший 400.

IV. Контрольные материалы для проведения рубежного контроля и оценки образовательных достижений слушателей программы профессиональной переподготовки по модулю 4.

Контрольная работа по теме: «Теория случайных процессов»

1. Нормированная корреляционная функция случайного процесса имеет вид $\kappa(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|)$, где параметры α и β равны, соответственно, α=0,5 1/сут; β=1,1 1/сут. Параметры $\bar{x}$ =3,2 и σ_x =0,4. Требуется найти интенсивность выбросов процесса за уровень $a = \bar{x} + 2\sigma_x$ и среднюю продолжительность выбросов.

2. Для нормированной корреляционной функции случайного процесса $\kappa(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|)$ доказать справедливость формулы $\ddot{k}(0) = -(\alpha^2 + \beta^2)$.

3. Параметры α и β корреляционной функции случайного процесса $\kappa(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|)$ можно определить, зная время, через которое она достигнет первого минимума ($\tau_{\min}$) и значение функции в этой точке ($K_{\min}$). Доказать этот факт.

4. Доказать, что для спектрального разложения случайного стационарного процесса с подынтегральной нормированной корреляционной функцией справедливо соотношение

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|-i\omega\tau}(1+\alpha|\tau|)d\tau = \frac{2\alpha^3}{\pi(\omega^2+\alpha^2)^2}.$$

5. В результате обработки статистических данных по интервалам между событиями в потоке Пальма получены значения по вариантам:

а) M(T) = 2 мин, σ_T = 1 мин. б)M(T) = 1 мин, σ_T = 0,33 мин.

Подобрать порядок соответствующего потока Эрланга. Определить плотность распределения t, построить графики исходной и эрланговской плотностей распределения.

6. Построить размеченный граф состояний СМО для схемы «гибели и размножения».

7.Найти гарантию обслуживания и пропускную способность СМО для n=2 и значениях(λ; μ), 1/ч по вариантам:

а) λ=1,5, μ=2,0; б)λ=4, μ=5; в) λ=0,4, μ=0,6; г) λ=6, μ=8.

8. Имеется трехканальная СМО с ожиданием. Интенсивность потока заявок равна λ=1,5 , интенсивность обслуживания μ=2 . Определить следующие показатели СМО:

– коэффициент загрузки системы;
– коэффициент загрузки одного канала;
– вероятность того, что все каналы в системе свободны.

9. Имеется трехканальная СМО с ожиданием. Интенсивность потока заявок равна λ =2, интенсивность обслуживания μ=3 . По параметрам предыдущей задачи определить следующие показатели СМО:

– вероятность того, что все каналы заняты;
– среднюю длину очереди;
- среднее время ожидания в очереди.

V. Контрольные материалы для проведения рубежного контроля и оценки образовательных достижений слушателей программы профессиональной переподготовки по модулю 5.

Итоговый тест по численным методам

1. Чем вызвана неустранимая погрешность?
а) Тем, что математическая модель исследуемого объекта никогда не учитывает всех без исключения явлений, влияющих на состояние объекта, и тем, что входящие в задачу заданные параметры (числа или функции) измеряются с какой-либо ошибкой.
б) Тем, что любые арифметические операции над числами производятся при наличии ограниченного количества используемых для записи чисел разрядов позиционной системы исчисления.
в) Тем, что в результате применения численного метода могут быть получены не точные, а приближенные значения искомой функции, даже если все предписанные методом вычисления проделаны абсолютно точно.
2. Некоторые величины t = 0,34 и k = 0,42 измерены с точностью до 0,01. Найти абсолютную и относительную погрешности в определении величины d = t·k = 0,1428.
а) Абсолютная погрешность = 0,0075 , относительная погрешность = 0,053.
б) Абсолютная погрешность = 0,0077 , относительная погрешность = 0,051.
в) Абсолютная погрешность = 0,0077 , относительная погрешность = 0,054.
3. Пусть a^* – точное, *a* – приближенное значение некоторого числа. Дайте определение относительной погрешности.
а) Относительной погрешностью приближения*a* называется величина δ_a такая, что $\left|a - a^*\right| < \delta_a$.
б) Относительной погрешностью приближения*a* называется величина δ_a такая, что $\delta_a = \sqrt{(a - a^*)/a}$, ($a \neq 0$).
в) Относительной погрешностью приближения*a* называется величина $\delta_a = \left|(a - a^*)/a\right|$, ($a \neq 0$).
4. Определить относительную погрешность приближенного числа b = 2,3254 по ее абсолютной погрешности Δ_b = 0,01, предварительно округлив число b до верных знаков.
а) Относительная погрешность = 0,0078. б) Относительная погрешность = 0,0043.
в) Относительная погрешность = 0,0143.
5. Объем V = 2,385 м^3 и плотность ρ = 1400 кг/м^3 образца измерены с точностью до 1 дм^3 и 1 кг/м^3 соответственно. Найти абсолютную и относительную погрешности в определении массы образца m = V·ρ = 3339 кг.
а) Абсолютная погрешность = 3,895, относительная погрешность = 0,0012.
б) Абсолютная погрешность = 3,786, относительная погрешность = 0,0011.
в) Абсолютная погрешность = 3,657, относительная погрешность = 0,0010.
6. Даны числа a = 1,137 и b = 1,073 с абсолютными погрешностями Δ_a=Δ_b=0,011. Оценить погрешность их разности c = a – b.
а) Δ_c = 0,011. б) Δ_c = 0,022. в) Δ_c = 0,001.
7. Чем обусловлено появление погрешности округления при численном решении поставленной задачи?
а) Тем, что математическая модель исследуемого объекта не может учитывать все без исключения явления, влияющие на состояние объекта.
б) Тем, что любые арифметические операции над числами производятся при наличии ограниченного количества используемых для записи чисел разрядов позиционной системы исчисления.
в) Тем, что в результате применения численного метода могут быть получены не точные, а

приближенные значения искомой функции, даже если все предписанные методом вычисления проделаны абсолютно точно.

8. Дайте определение сплайн-функции.

а) Полином $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(f(x_i) \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \Big/ (x - x_i) \prod_{k \neq i} (x_i - x_k) \right)$, принимающий в точках x_i значения $f(x_i)$, называется сплайн-функцией, соответствующей данной функции f(x) и узлам x_i (i = 0, 1,…, n).

б) Сплайн-функцией m-го порядка, соответствующей данной функции f(x) и узлам x_i (i = 0, 1,…, n), называется функция s(*x*), которая: 1) является полиномом m-го порядка на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ (i = 1, 2,…, n); 2) непрерывна вместе со своими производными до (m–1)-го порядка в узлам x_i (i = 1, 2,…, n–1); 3) $s(x_i) = f(x_i)$ (i = 0, 1,…, n).

в) Сплайн-функцией, соответствующей данной функции f(x) и узлам x_i (i = 0, 1,…, n), называется полином вида $P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$, где $q = (x - x_0)/h$, h – шаг разностной сетки, $\Delta^k y_i$ – конечные разности k-го порядка.

9. Сформулируйте постановку задачи интерполирования функции.

а) Требуется вычислить производные от функций, заданных в табличном виде.

б) Требуется найти значение функции f(x), $x \neq x_i$ (i = 0, 1,…,n), если известны узлы интерполирования x_i (i = 0, 1,…,n) и значения функции f(x) в этих узлах.

в) Требуется определить допустимую погрешность аргументов по допустимой погрешности функции.

10. Что принимают за меру качества аппроксимации функции f(x) полиномом $P_m(x)$ в методе наименьших квадратов?

а) За меру качества аппроксимации функции f(x) полиномом $P_m(x)$ в узлах x_i принимают максимум модуля разности $f(x_i)$ и $P_m(x_i)$ (i = 1, 2,…, n).

б) За меру качества аппроксимации функции f(x) полиномом $P_m(x)$ в узлах x_i принимают сумму $\sum_{i=1}^{n} \omega(x_i)\,[\,f(x_i) - P_m(x_i)\,]^2$, где $\omega(x) \geq 0$ – заранее выбранная «весовая» функция.

в) За меру качества аппроксимации функции f(x) полиномом $P_m(x)$ в узлах x_i принимают сумму $\sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i) - P_m(x_i) \right|$.

11. В чем заключается задача обратного интерполирования?

а) Пусть функция y = f(x) задана таблицей. Требуется по заданному значению функции y найти соответствующее значение аргумента x.

б) Пусть функция y = f(x) задана таблицей. Требуется найти функцию φ(x), расчеты по которой либо совпадают, либо в определенном смысле приближаются к данным значениям функцииf(x).

в) Пусть функция y = f(x) задана таблицей. Требуется построить полином вида $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(f(x_i) \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \Big/ (x - x_i) \prod_{k \neq i} (x_i - x_k) \right)$, принимающий в точках x_i, называемых узлами, значения интерполируемой функции $f(x_i)$.

12. По прогнозу 1983 г. добыча нефти в Западной Европе должна была составить в 1980 г. – 2,6 млн.баррелей/сут., в 1985 г. – 3,9 млн. баррелей/сут. и в 1990 г. – 3,2 млн. баррелей/сут. Используя интерполяционный полином Лагранжа, рассчитать данный показатель на 1988 г.

а) 3,720 млн. баррелей/сут. б) 3,894 млн. баррелей/сут.

в) 3,643 млн. 3,894 млн. баррелей/сут.

13. Как определяется остаточный член интерполирования полиномами Ньютона?

а) $\left|R_n\right| \le \dfrac{h^2(b-a)}{24} M_2$, где $M_2 = \max\limits_{\xi\in[a,b]} \left| f''(\xi)\right|$, ξ – некоторая точка заданного промежутка [*a*, b], h = const – расстояние между соседними узлами интерполяции x_i (i = 0, 1,…, n).

б) $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$, где ξ есть некоторая точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы интерполяции x_i (i = 0, 1,…, n) и точку *x*, в которой находится значение сеточной функции f(x).

в) $R_n = \max\left|x-x_i\right|,\ (i=\overline{0,n})$, где x_i – узлы интерполяции, *x* – точка, в которой находится значение сеточной функции f(x).

14. Какую функцию называют аппроксимирующей?

а) Пусть для конечного множества значений аргумента $x_0, x_1, \ldots, x_n$ известны табличные значения функций $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Аппроксимирующей (приближающей) называют функцию φ(x), расчеты по которой либо совпадают, либо в определенном смысле приближаются к данным значениям функций.

б) Пусть для конечного множества значений аргумента $x_0, x_1, \ldots, x_n$ известны табличные значения функций $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Аппроксимирующей (приближающей) называют функцию φ(x), производные от которой равны производным функции f(x).

в) Пусть для конечного множества значений аргумента $x_0, x_1, \ldots, x_n$ известны табличные значения функций $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Аппроксимирующей (приближающей) называют функцию φ(x), значения которой отличаются от данных значений функций на постоянную величину.

15. Назовите достоинства и недостатки интерполяционных формул Лагранжа.

а) Достоинство – метод наиболее прост в понимании и организации вычислительного процесса. Основной недостаток метода – при увеличении числа узлов и соответственно степени интерполяционный многочлен Лагранжа требуется строить заново.

б) Достоинство – метод относится к числу итерационных методов и имеет наибольшую точность интерполяции. Основной недостаток метода – медленная скорость сходимости, что приводит к значительным затратам машинного времени.

в) Достоинство – использование многочленов невысокого порядка и вследствие этого малое накопление погрешностей в процессе вычислений. Основной недостаток метода – из числа методов интерполяции наиболее сложен в организации вычислительного процесса.

16. В чем состоит сущность метода наименьших квадратов?

а) Метод состоит в следующем. Весь отрезок интерполирования разбивают на частичные отрезки и на каждом из частичных отрезков приближенно заменяют интерполируемую функцию f(x)многочленом невысокой степени. Для того чтобы не возникало разрывов производной в местах сочленения, на каждом частичном отрезке степень полинома берется «с запасом», а возникающую свободу в выборе коэффициентов полиномов используется для сопряжения производных на границах участков.

б) Метод состоит в том, что строится полином, сумма квадратов отклонений которого от табличных значений интерполируемой функции $y_i = f(x_i)$ минимальна, т.е. за меру качества аппроксимации функции f(x) полиномом $P_m(x)$ в узлах x_i принимают сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega(x_i)\left[f(x_i)-P_m(x_i)\right]^2$, где $\omega(x) \ge 0$ – заранее выбранная «весовая» функция.

в) Сущность метода наименьших квадратов состоит в ледующем. Строится полином вида $P_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n}\left(f(x_i)\prod\limits_{k=0}^{n}(x-x_k) \Big/ (x-x_i)\prod\limits_{k\ne i}(x_i-x_k)\right)$, принимающий в точках x_i, называемых узлами, значения интерполируемой функции $f(x_i)$.

17. Когда удобно пользоваться интерполяционной схемой Эйткена?

а) Когда требуется найти многочлен $P_n(x)$, значения которого в точках x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ совпадают со значениями функции $f(x)$, т.е. $P_n(x_i) = f(x_i)$.

б) Когда требуется найти не общее выражение интерполяционного многочлена $P_n(x)$, а лишь его значения при конкретных x и при этом значения функции даны в достаточно большом количестве узлов.

в) Когда требуется найти функцию $\varphi(x)$, значения которой отличаются от табличных значений функций $f(x_0)$, $f(x_1)$, …, $f(x_n)$ на постоянную величину.

18. Написать интерполяционный полином Лагранжа для функции f(x), которая представлена четырьмя своими значениями: f(0) = –0,5; f(0,1) = 0; f(0,3) = 0,2 и f(0,5) = 1.

а) $P_3(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{7}x^2 - 11x - \dfrac{2}{13}$. б) $P_3(x) = \dfrac{25}{11}x^2 - \dfrac{73}{12}x + \dfrac{4}{7}$.

в) $P_3(x) = \dfrac{125}{3}x^3 - 30x^2 + \dfrac{73}{12}x - \dfrac{1}{2}$.

19. Назовите области применения интерполирования функций.

а) К интерполированию функций чаще всего прибегают, когда приходится вычислять значения функции в промежуточных точках, при этом данная функция задана в табличном виде и аналитическое выражение функции неизвестно. Интерполирование применяют и в случае, когда аналитический вид функции известен, но сложен и требует большого объема вычислений для определения отдельных значений функции.

б) К интерполированию функций чаще всего прибегают, когда приходится вычислять производные от функций, заданных таблично, или когда непосредственное дифференцирование функции затруднительно. Интерполирование применяют и в случае, когда необходимо вычислить производные от функций, имеющих разрыв 2-го рода.

в) К интерполированию функций чаще всего прибегают, когда требуется определить допустимую погрешность аргументов по допустимой погрешности функции. Интерполирование применяют и в случае, когда необходимо вычислить погрешность функции нескольких переменных при заданных погрешностях аргументов.

20. С какой точностью можно вычислить по интерполяционной формуле Лагранжа ln 100,5 по известным значениям ln 100, ln 101, ln 102 и ln 103.

а) $4{,}5\cdot10^{-5}$; б) $6{,}7\cdot10^{-7}$; в) $2{,}3\cdot10^{-9}$.

21. Опишите методику нахождения корней уравнения f(x) = 0 методом обратного интерполирования.

а) Рассмотрим функцию $y = f(x)$ и составим таблицу ее значений, близких к нулю. При этом количество узлов выбираем в зависимости от требуемой точности корня. В качестве x_0 и x_1 берем те соседние узлы, для которых $f(x_0)\cdot f(x_1) < 0$, и применяя метод обратного интерполирования, отыскиваем значение x, при котором y = 0.

б) Рассмотрим интервал [*a*, b], на концах которого функция f(x) принимает ненулевые значения противоположного знака. Строим итерационную процедуру, состоящую в переходе от такого интервала к новому интервалу, совпадающему с одной из половин предыдущего и обладающему тем же свойством. Процесс заканчивается, когда длина вновь полученного интервала станет меньше заданной точности ε, и в качестве корня уравнения приближенно принимается середина этого интервала.

в) На выбранном интервале строится система равноотстоящих точек $x_k = x_0 + k\cdot h$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ при достаточно малом шаге h. Применяя метод обратного интерполирования, находим значения функции $y = f(x)$ в всех точках x_k. Затем методом простого перебора выбираем наименьшее значение функции y.

22. В чем состоит суть методов численного интегрирования функций?

а) Суть состоит в замене подынтегральной функции f(x) вспомогательной, интеграл от которой легко вычисляется в элементарных функциях.

б) Суть состоит в следующем: при заданном числе интервалов разбиения следует расположить их концы так, чтобы получить наивысшую точность интегрирования.
в) Суть состоит в том, что из подынтегральной функции f(x) выделяют некоторую функцию g(x), имеющую те же особенности, что функция f(x), элементарно интегрируемую на данном промежутке и такую, чтобы разность f(x)–g(x) имела нужное число производных.
23. Опишите методику вычисления определенного интеграла по формулам прямоугольников.
а) Отрезок интегрирования [a, b] разбивается на n равных интервалов. В пределах каждого интервала $[x_i, x_{i+1}]$ подынтегральная функция f(x) заменяется интерполяционным многочленом Лагранжа первой степени с узлами x_i и x_{i+1}, что соответствует замене кривой на секущую. Интеграл по [a, b] вычисляется как сумма интегралов по всем частичным отрезкам.
б) В квадратурных формулах $\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} c_i f(t_i) + \Psi$ коэффициенты c_iи абсциссы t_iподбираются так, чтобы формулы были точны для многочленов наивысшей возможной степени N. При n узлах точно интегрируются все многочлены степени $N \leq 2n–1$. Коэффициенты c_iи абсциссы t_i находятся из системы 2n-1 нелинейных уравнений.
в) Отрезок интегрирования [a, b] разбивают на частичные отрезки $[x_i, x_{i+1}]$ равной длины. На каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ подынтегральная функция f(x) заменяется на постоянную величину $f(x_{i+1/2})$ (либо $f(x_i)$, либо$f(x_{i+1})$) и интеграл по [a, b] вычисляется как сумма интегралов по всем частичным отрезкам.

24. Вычислить приближенное значение интеграла $\int_{1}^{5} \frac{dx}{x}$ по формуле трапеций при n = 4.

а) Значение интеграла = 1,628. б) Значение интеграла = 1,683.
в) Значение интеграла = 1,647.
25. Определить величину шага h по оценке остаточного члена для вычисления интеграла $\int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$ по формуле трапеций с точностью до 10^{-2}.
а) h = 1,49. б) h = 0,79. в) h = 0,96.
26. Назовите области применения формул численного интегрирования.
а) К численному интегрированию чаще всего прибегают, когда приходится вычислять интегралы от функций, заданных таблично, или когда непосредственное интегрирование функции затруднительно.
б) К численному интегрированию чаще всего прибегают, когда приходится вычислять значения функции в промежуточных точках, при этом данная функция задана в табличном виде и аналитическое выражение функции неизвестно.
в) К численному интегрированию чаще всего прибегают, когда требуется определить допустимую погрешность аргументов по допустимой погрешности функции.
27. Назовите достоинства метода Гаусса (метода наивысшей алгебраической точности) вычисления определенного интеграла.
а) Метод Гаусса в ряду других методов численного интегрирования наиболее прост в понимании и организации вычислительного процесса. При этом есть легко определяемая оценка погрешности.
б) В методе Гаусса отрезок интегрирования разбивается на n равных интервалов в отличие от других квадратурных формул, в которых абсциссы x_iподбираются исходя из соображений точности и, вообще говоря, являются иррациональными числами.
в) Для функций высокой гладкости при одинаковом числе узлов метод Гаусса дает значительно более точные результаты, чем другие методы численного интегрирования. При этом для

получения одной и той же точности по формуле Гаусса необходимо выполнить меньше операций.

28. Выбор шага интегрирования для обеспечения заданной точности вычисления интеграла с помощью метода двойного пересчета.

а) Общая погрешность вычисления интеграла рассматривается как сумма погрешности усечения ε_s и погрешности округления ε_p. Так как с уменьшением шага расчета h погрешность ε_s убывает, а ε_p возрастает, то существует оптимальный шаг h, определяемый таким образом, чтобы ε_s составляла примерно половину ε_p.

б) Вычисляют интеграл I по выбранной квадратурной формуле дважды: сначала интеграл I_h с некоторым шагом h, затем интеграл $I_{h/2}$ с шагом h/2, а затем сравнивают их. Если окажется, что $|I_h - I_{h/2}| < \varepsilon$, где ε – допустимая погрешность, то полагают $I \approx I_{h/2}$. Если же $|I_h - I_{h/2}| \geq \varepsilon$, то расчет повторяют с шагом h/4 и т.д.

в) Пусть требуется вычислить интеграл I с точностью ε. Используя формулу соответствующего остаточного члена Ψ, выбирают шаг h таким, чтобы выполнялось неравенство $|\Psi| < \varepsilon/2$. Затем вычисляют I по выбранной квадратурной формуле с полученным шагом. При этом вычисления следует производить с таким числом знаков, чтобы погрешность округления не превышала $\varepsilon/2$.

29. Проведите сравнение формул численного интегрирования по точности на основании остаточных членов формул.

а) Формула прямоугольников обеспечивает высокую точность при небольшом числе узлов, чем формулы Симпсона и трапеций, а последние – более точные результаты, чем формула Гаусса. Однако для функции малой гладкости, имеющих лишь 1-ю или 2-ю производную, а также для функций с разрывами производных простые формулы интегрирования (Гаусса, трапеции и Симпсона) могут давать примерно ту же точность, что и формула прямоугольников.

б) Для функций имеющих непрерывные производные достаточно высокого порядка при одинаковом числе узлов формула Гаусса дает значительно более точные результаты, чем формула Симпсона, а последняя – более точные результаты, чем формулы прямоугольников и трапеций. При этом для получения одной и той же точности по формуле Гаусса необходимо выполнить меньше операций, чем по формуле Симпсона, а по последней – меньше, чем по формуле трапеций.

в) Анализ формул численного интегрирования показывает, что для функций высокой гладкости квадратурная формула трапеций является наиболее точной по сравнению с формулами Гаусса и Симпсона). Однако для функций с разрывами производных наиболее точной является более сложная формула прямоугольников.

30. Вычислить по формуле трапеций интеграл $I = \int_1^5 \frac{dx}{x}$ при n = 4 и оценить остаточный член.

а) $I = 67/38$, $|R| \leq 0{,}053$; б) $I = 101/60$, $|R| \leq 0{,}67$;

в) $I = 65/30$, $|R| \leq 0{,}94$.

31. Отличие метода Гаусса с выбором главного (ведущего) элемента от метода Гаусса решения системы линейных алгебраических уравнений.

а) Отличие в том, что на очередном шаге реализации метода Гаусса исключается не следующее по номеру неизвестное, а то неизвестное, коэффициент при котором является наибольшим по модулю. Таким образом, в качестве ведущего элемента здесь выбирается главный, т.е. наибольший по модулю элемент.

б) Отличие в том, что на очередном k-ом шаге реализации метода Гаусса исключается элемент $a_{kk}^{(k-1)}$, называемый главным элементом на k-м шаге исключения. Тем самым система линейных алгебраических уравнений приводится к треугольному виду.

в) Отличие в том, что на очередном шаге реализации метода Гаусса исключается не следующее по номеру неизвестное, а то неизвестное, коэффициент при котором является наименьшим по модулю. Таким образом, в качестве ведущего элемента здесь выбирается главный, т.е. наименьший по модулю элемент.

32. В чем преимущество метода Зейделя для решения системы линейных алгебраических уравнений перед методом простой итерации?

а) Дает большой выигрыш в точности, так как, во-первых, метод Зейделя существенно уменьшает число умножений и делений, во-вторых, позволяет накапливать сумму произведений без записи промежуточных результатов.

б) Метод Зейделя являются абсолютно сходящимся, т.е. для него нет необходимости вводить достаточные условия сходимости в отличие от метода простой итерации.

в) Обычно данный метод дает лучшую сходимость, чем метод простой итерации. Кроме того, метод Зейделя может оказаться более удобным при программировании, так как при вычислении $x_i^{(k+1)}$ нет необходимости хранить значения $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$, …, $x_{i-1}^{(k)}$.

33. Для решения систем линейных алгебраических уравнений какого вида разработан метод прогонки?

а) Метод прогонки разработан для решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженной (лишь малая доля элементов матрицы отлична от нуля) матрицей коэффициентов.

б) Метод прогонки разработан для решения систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов.

в) Метод прогонки разработан для решения систем линейных алгебраических уравнений с апериодической матрицей коэффициентов.

34. Опишите метод Гаусса решения системы линейных алгебраических уравнений.

а) В основе данного метода лежит идея последовательного исключения неизвестных. Решение системы распадается на два этапа: 1) прямой ход, когда исходная система приводится к треугольному виду; 2) полученные коэффициенты при неизвестных и правые части уравнений хранятся в памяти ЭВМ и используются при осуществлении обратного хода, который заключается в нахождении неизвестных из системы треугольного вида.

б) Заданная система линейных уравнений каким-либо образом приводится к эквивалентному виду. Исходя из произвольного начального вектора, строится итерационный процесс. При выполнении достаточных условий сходимости, получается последовательность векторов, неогранично приближающихся к точному решению.

в) Если матрица коэффициентов *A* невырожденная (определитель этой матрицы не равен нулю), то исходная система имеет единственное решение. Значения неизвестных могут быть получены по формулам $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$, det A_i и det A -определители матриц A_i и*A* соответственно, матрица A_i образуется из матрицы *A* путем замены ее i-го столбца столбцом свободных членов.

35. Почему метод простой итерации решения систем линейных алгебраических уравнений называется самоисправляющимся?

а) Потому что для данного метода вводятся достаточные условия сходимости.

б) Потому что отдельная ошибка, допущенная при вычислениях, не отражается на конечном результате, т.к. ошибочное приближение рассматривается как новый начальный вектор.

в) Потому что при использовании данного метода строится отдельная процедура, исправляющая любые ошибки, допущенные при расчетах.

36. Каковы недостатки решения системы уравнений по правилу Крамера?

а) Данное правило разработано и применимо лишьдля решения систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов.

б) Реализация данного метода в виде вычислительной процедуры требует выполнения значительного количества арифметических операций и соответственно больших затрат машинного времени. Кроме того, он очень чувствителен к ошибкам округления.

в) Данный метод дает менее точные результаты, чем другие методы решения систем линейных алгебраических уравнений. При этом требуется выполнение жестких достаточных условий сходимости.

37. Опишите метод Якоби (простой итерации) решения системы линейных алгебраических уравнений.

а) Исходная система линейных алгебраических уравнений записывается в виде, разрешенном относительно неизвестных; при этом неизвестные появляются и в правой части. Исходя из произвольного начального вектора, строится итерационная процедура. При выполнении достаточных условий сходимости, получается последовательность векторов, неогранично приближающихся к точному решению. Точное решение системы получается лишь в результате бесконечного итерационного процесса и всякий вектор из полученной последовательности является приближенным решением.

б) Находятся определители матриц A_i (det A_i) и*A* (det A), где *A* – матрица коэффициентовсистемы линейных алгебраических уравнений, матрица A_i образуется из *A* путем замены ее i-го столбца столбцом свободных членов. Если определитель матрицы коэффициентов *A* не равен нулю, то исходная система имеет единственное решение и значения неизвестных определяются по формулам $x_i = \det^2 A_i - \det^2 A$.

в) Метод Якоби разработан для решения систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов. Исходная система n уравнений приводится к виду $x_i = \alpha_i + \beta_i x_{i+1}$, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Числа α_i и β_i, называемые прогоночными коэффициентами, последовательно находятся в прямом ходе. При осуществлении обратного хода определяется x_n, а затем вычисляются значения x_i $(i = n-1, \ldots, 1)$, последовательно применяя рекуррентные формулы $x_i = \alpha_i + \beta_i x_{i+1}$.

38. Опишите метод деления отрезка пополам.

а) Для нахождения корня нелинейного уравнения f(x) = 0 требуется, чтобы на концах интервала [*a*, b] функция f(x) принимала ненулевые значения противоположного знака. Итерационная процедура состоит в переходе от такого интервала к новому интервалу, совпадающему с одной из половин предыдущего и обладающему тем же свойством. Процесс заканчивается, когда длина вновь полученного интервала станет меньше заданной точности ε, и в качестве нелинейного корня уравнения приближенно принимается середина этого интервала.

б) Согласно данному методу общая погрешность вычисления интеграла рассматривается как сумма погрешности усечения ε_s и погрешности округления ε_p. Так как с уменьшением шага расчета h погрешность ε_s убывает, а ε_p возрастает, то существует оптимальный шаг h, определяемый таким образом, чтобы ε_s составляла примерно половину ε_p.

в) Строится система равноотстоящих точек $x_i = x_0 + i \cdot h$ (i = 0, 1, 2,…) при достаточно малом шаге h. Приближенные значения $y(x_i)$, являющиеся решением дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, вычисляются последовательно по формулам $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$.

39. Сколько необходимо проделать итераций, чтобы методом деления отрезка пополам решить нелинейное уравнение $y = x^2 - 0{,}55$ с точностью $\varepsilon = 0{,}05$ на отрезке [0,5; 0,9].

а) Потребуется 5 итераций, корень уравнения = 0,74.

б) Потребуется 6 итераций, корень уравнения = 0,76.

в) Потребуется 7 итераций, корень уравнения = 0,75.

40. В чем достоинство и недостаток метода Ньютона нахождения корней нелинейного уравнения?

а) Метод Ньютона весьма быстро сходится, точность каждого приближения в этом методе пропорциональна квадрату точности предыдущего. Основной недостаток метода – необходимость достаточно точного начального приближения.

б) Метод Ньютона относится к числу итерационных методов второго порядка и имеет наибольшую точность нахождения корней нелинейного уравнения. Основной недостаток метода – медленная скорость сходимости, что приводит к значительным затратам машинного времени при решении сложных нелинейных уравнений.

в) Метод Ньютона в ряду итерационных методов нахождения корней нелинейного уравнения наиболее прост в организации вычислительного процесса. Основной недостаток метода –

достаточно медленная скорость сходимости.

41. Дано уравнение $x^3 + x^2 - 1 = 0$. Привести данное уравнение к виду, при котором выполняются достаточные условия сходимости для метода простой итерации на отрезке [0,1; 1].

а) $x = x^{-2} - 3$. б) $x = (1 - x^3)/3x$. в) $x = 1/\sqrt{x+3}$.

42. Решение нелинейного уравнения методом простой итерации.

а) Нелинейное уравнение $f(x) = 0$ на интервале $[a, b]$ заменяется эквивалентным уравнением $x = \varphi(x)$. Итерации образуются по правилу $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, $(k = 0, 1, \ldots)$, причем задается начальное приближение x_0. Если последовательность чисел x_k имеет предел при $k \to 0$, то этот предел является корнем уравнения $x = \varphi(x)$.

б) Для нахождения корня нелинейного уравнения $f(x) = 0$ методом простой итерации требуется, чтобы на концах интервала $[a, b]$ функция $f(x)$ принимала ненулевые значения противоположного знака. Итерационная процедура состоит в переходе от такого интервала к новому интервалу, совпадающему с одной из половин предыдущего и обладающему тем же свойством. Процесс заканчивается, когда длина вновь полученного интервала станет меньше заданной точности ε, и в качестве корня уравнения приближенно принимается середина этого интервала.

в) Для нахождения корня нелинейного уравнения $f(x) = 0$ методом простой итерации требуется, чтобы функция $f(x)$ имела на интервале $[a, b]$ непрерывные производные 1-го и 2-го порядков, сохраняющие на $[a, b]$ постоянный знак. Для начала вычислений необходимо задание одного начального приближения x_0. Последующие приближения определяется по формуле $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$, $(k = 0, 1, \ldots)$.

43. Проведите сравнение методов деления отрезка пополам (ДОП) и Ньютона по различным критериям (универсальность, скорость сходимости).

а) Метод Ньютона обладает большей универсальностью, чем метод ДОП, т.к. сходимость зависит только от выбора начальной точки. Вычисления методом ДОП можно начинать лишь с отрезка, на концах которого функция имеет разные знаки, а внутри этого интервала непрерывные производные 1-го и 2-го порядков. При решении практических задач не всегда удается проверить выполнение необходимых ограничений на выбор подобного интервала. Однако метод ДОП обладает более высокой скоростью сходимости.

б) Более универсальным является метод ДОП. Он гарантирует получение решения для любой непрерывной функции $f(x)$, если найден интервал, на котором она меняет знак. Метод Ньютона предъявляет к функции более жесткие требования. Сходимость метода Ньютона существенно зависит от выбора начальной точки. При реализации данного метода необходимо предусматривать вычисление производных функции для организации итерационного процесса и проверки условий сходимости. Важным преимуществом метода Ньютона является высокая скорость сходимости, обеспечивающая значительную экономию машинного времени при решении сложных нелинейных уравнений.

в) Методы Ньютона и ДОП имеют одинаковые необходимые и достаточные условия сходимости, поэтому применимы в одинаковых условиях. Однако метод ДОП обладает линейной скоростью сходимости, поэтому весьма быстро сходится в отличие от метода Ньютона, который обладает лишь квадратичной скоростью сходимости.