

Дружинин В.В.  
Дружинина Р.Ф.

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

*Учебно-методическое пособие*



СарФТИ НИЯУ МИФИ

**Саровский физико-технический институт-  
филиал Национального исследовательского  
ядерного университета «МИФИ»**

**ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЭЛЕКТРОНИКИ**

**Дружинин В.В., Дружинина Р.Ф.**

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**

*Учебно-методическое пособие*

Саров  
2019

УДК 517.518

**Дружинин В.В.**-доктор физико-математических наук, профессор,  
**Дружинина Р.Ф.** – кандидат физико-математических наук, доцент.  
Численные методы. Учебно-методическое пособие. (4-е переиздание).

Данное пособие содержит разделы курса «Численные методы», читаемого студентам Саровского физико-технического института НИЯУ МИФИ.

В классических вопросах (интерполяция, квадратурные формулы и др.) обращается внимание на методы получения оценок погрешности.

Значительное место уделено современной теории разностных схем для дифференциальных уравнений.

Изложен метод наименьших квадратов аппроксимации функций одной переменной по дискретным данным с анализом влияния случайных ошибок наблюдений и ряд других вопросов, представляющих интерес для инженеров и физиков.

В пособии имеются обоснованные алгоритмы решения задач, включаемых в лабораторный практикум по численным методам.

Рецензент: Л.Г. Громова- кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики МИФИ.

© Дружинин В.В., Дружинина Р.Ф., 2001  
© Издательство СарФТИ 2001

Издание четвертое

## Предисловие.

Данное пособие является переизданием учебно-методического пособия «Численные методы», написанного д.ф.-м.н., профессором, зав. кафедрой высшей математики СарФТИ Дружининым Виктором Владимировичем и к.ф.-м.н., доцентом кафедры вычислительной и информационной техники СарФТИ Дружиной Раисой Федоровной, машинописный вариант которого был издан в 2001г. небольшим количеством экземпляров и был предназначен как для студентов инженерных специальностей, так и для инженеров и научно-технических работников, проходящих обучение в СарФТИ по инженерным программам в рамках повышения квалификации.

«Численные методы» являются неотъемлемой частью естественно-научного и инженерного образования, что определило одну из главных целей данного пособия – знакомство студентов с методологией построения и исследования основных численных методов вычислительной математики и ее проблемами при численном решении большого класса естественно-научных и инженерных задач.

Особенностью данного пособия является его практическая предназначенность для приобретения знаний и навыков решения широкого круга математических задач, возникающих при исследовании как естественно-научных, так и инженерно-технических проблем. Излагаемые в данном пособии основные численные методы пригодны как для расчетов с применением средств вычислительной техники, так и для расчетов в «полевых» условиях, т.е. когда необходимо «вручную» быстро «прикинуть» результаты расчетов для их практического использования в решении поставленной задачи.

Конечно, данное пособие не охватывает все вопросы, связанные с применением численных методов на практике, и поэтому в пособии приведен обновленный библиографический список рекомендуемой литературы по данному вопросу.

Данное пособие окажется полезным широкому кругу читателей: студентам, аспирантам, инженерам, научным сотрудникам и всем тем, кто использует численные методы как один из инструментов в своей профессиональной деятельности.

Доцент кафедры вычислительной и информационной техники  
СарФТИ НИЯУ МИФИ, к.ф.-м.н. Алексеев В.В.

## Введение

Курс «Численные методы» является логическим завершением разделов высшей математики, практически используемых в инженерной деятельности и изучаемой студентами на 1-3 курсах. Современная высшая математика была создана в течение последних 3-х столетий и целиком была направлена на поиск аналитических результатов: вычисление интегралов, решение дифференциальных и алгебраических уравнений, определение собственных векторов и собственных значений матриц и т.д. Под аналитическим результатом понимается конечная формула, составленная из основных элементарных функций. Аналитическое решение позволяет быстро найти результат целого класса задач и, что более важно, судить о качественном характере в широком интервале исходных значений задачи. Именно аналитичность решения большинства рассматриваемых в математике задач позволила ей развиваться и использовать полученные результаты в физике, астрономии, электротехнике, теоретической механике и других прикладных дисциплинах. Требование к аналитичности результата потребовало от математики введения бесконечно малых и бесконечно больших величин, пределов, производных, интегралов, комплексных чисел и функций от комплексного переменного, операционного исчисления, теории групп и т.д. Необходимость в выведении формул диктовалась обычно поставленной задачей, которая требовала решить то или иное уравнение (на бумаге с помощью карандаша), или вычислить интеграл в связи с запросами техники. При этом до создания современных ЭВМ было сравнительно мало других способов достаточно быстро найти результат поставленной задачи, если она не решалась аналитически. Ряд задач вообще не могут иметь аналитического решения. Например, аналитические решения в общем виде имеют алгебраические уравнения: второго  $ax^2+bx+c=0$ , третьего:  $ax^3+bx^2+dx+c=0$ , четвертого:  $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$  порядков. Уравнение же пятого и высших порядков в общем случае аналитически не решается. Это не значит, что решения вообще нет. Например, уравнение  $2x^5+3x^4-112=0$  среди пяти возможных корней имеет корень  $x=2$ . Это решение найдено численными методами. Практика показывает, что большинство задач возникающих в квантовой механике, электротехнике, сопромате, теоретической механике, инженерных расчетах не имеет аналитического решения (или его очень трудно найти). В связи с созданием в последние десятилетия мощной вычислительной техники, и в

связи с её непрекращающимся развитием, насыщением нашей действительности самыми разнообразными по размерам и возможностям вычислительными устройствами - от карманных калькуляторов до ЭВМ с числом операций  $10^{15}$  в сек и более, роль численных методов резко возрастает, так как позволяет использовать математические методы практически во всех сферах деятельности. При этом проблемы решения самих уравнений переводится в плоскость современных возможностей численных методов и производительности используемых средств вычислительной техники.

В данном пособии рассматриваются такие вопросы численных методов как оценка погрешностей вычислений, быстрое вычисление функции, интерполяция, экстраполяция, аппроксимация (эти вопросы касаются связи задания функции в виде таблицы и в виде элементарной функции), решение алгебраических и трансцендентных уравнений методами обратной интерполяции, дихтомии, графически, методом хорд и касательных, с помощью итерационного процесса, решение систем линейных уравнений, численного интегрирование, решение дифференциальных уравнений методами Эйлера, Рунге-Кутты. Все рассмотренные вопросы сопровождаются численными решениями, вплоть до указания последовательности арифметических действий и промежуточных результатов. Это сделано с учетом того, что большинство студентов, для которых предназначено пособие, не всегда имеют лишнее время для подробной проверки предложенного решения. С другой стороны, при изучении алгоритма решения конкретной задачи всегда необходимо проследить его реализацию вплоть до мельчайших подробностей, что может помочь при первом освоении данного курса. Данное пособие не охватывает всего многообразия бурно развивающихся численных методов.

## §1. Элементарная теория погрешностей

При численном решении задачи возникает вопрос о точной или приближенной записи конечного и промежуточного результатов. Например, иррациональные числа в десятичных дробях с конечным числом значащих цифр всегда являются приближенными величинами. Например, точное значение числа  $A=1/3$  приближенно записывается в виде десятичной дроби  $a = 0.33$  или  $a = 0.3333$ . Во втором случае приближенное значение числа  $a$  ближе к его точному значению. Будем и далее обозначать точное значение числа буквой  $A$ , а приближенное - буквой  $a$ . Ошибкой или погрешностью  $\Delta_a$  назовем разность

$$\Delta_a = A - a \quad (1.1)$$

$\Delta_a$  может как положительной, так и отрицательной величиной.

Величина

$$\Delta = |A - a| \quad (1.2)$$

называется абсолютной погрешностью приближенного числа  $a$ . Можно ввести также предельную абсолютную погрешность  $\Delta a$  числа  $a$ , которая больше или равна абсолютной погрешности, т.е.

$$\Delta a \geq \Delta \quad (1.3)$$

$\Delta a$  устанавливает верхнюю и нижнюю границу погрешности, т.к.  $\Delta \leq \Delta_a \leq \Delta a$ . Отсюда следует, что точное число  $A$  располагается в отрезке

$$a - \Delta a \leq A \leq a + \Delta a. \quad (1.4)$$

Использование предельной абсолютной погрешности удобно при работе с числами, точное значение которых не определено. Пусть, например, имеем иррациональное число  $A = \sqrt{2}$ . Извлекая корень, можно найти его приближенное значение  $a = 1.414200$  с величиной  $\Delta a = 0,000015$ , т.е. можно написать

$$1.414185 < \sqrt{2} < 1.414215 \quad (1.5)$$

Введем относительную погрешность

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|} \quad (1.6)$$

и предельную относительную погрешность

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|A|} \quad (1.7)$$

В случае примера (1.5)  $\delta a = 1.06 \cdot 10^{-5}$ .

В качестве предельной относительной погрешности можно принять число

$$\delta a = \frac{\Delta a}{a - \Delta a} \quad (1.8)$$

Выделим ряд источников погрешностей, возникающих при решении той или иной задачи численными методами.

### I. Приближенная математическая формулировка описываемого явления.

Обычно реальная система является более сложной, чем это заложено в ее описывающем законе. Это ведет к погрешностям. Например, если описывать уравнение состояния воздуха с помощью формулы закона Клайперона для идеального газа

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \quad (1.9)$$

где  $p$  - давление,  $V$  - объем,  $m$  - масса,  $\mu$  - молекулярный вес,  $T$  - температура газа,  $R = 8.314 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$ , то при вычислении давления уже заранее внесена погрешность, т.к. воздух - реальный газ, а для него лучше подходит уравнение состояния Ван-дер-Ваальса.

II. Погрешности, связанные с неточностью определения входящих в формулу параметров, в частности - неточность определения физических констант (теплоемкость, удельное сопротивление, заряд электрона, скорость света и т.д.). В общем случае, если

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где  $x_1$  определена с абсолютной погрешностью  $\Delta_1$ ,  $x_2 - \Delta_2$  и т.д, то

$$\Delta y = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \cdot \Delta_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \cdot \Delta_2 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \cdot \Delta_n, \quad (1.10)$$

где частные производные берутся при некоторых приближенных значениях  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Например, в случае одного моля идеального газа ( $m = \mu$ ) давление его вычисляется по формуле

$$p = \frac{RT}{V}, \quad (1.11)$$

а

$$\Delta p = \frac{T}{V} \Delta R + \frac{R}{V} \Delta T + \frac{RT}{V^2} \Delta V. \quad (1.12)$$

Пусть  $\Delta R = 10^{-3} \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$ ,  $\Delta T = 0.5 \text{ К}$ ,  $\Delta V = 5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$ ,  
 $R = 8.314 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$ ,  $T = 293 \text{ К}$ ,  $V = 22.4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$ .

Тогда  $p = 1.0875 \cdot 10^5 \text{ Па} = 1,0732 \text{ атм}$ .  $\Delta p = 0.0258 \text{ атм}$ .,  $\delta p = 0.024 = 2,4\%$ .

Погрешность второго типа в случае суммы  $y = \sum_{i=1}^n x_i$  равна  $\Delta y = \sum_{i=1}^n \Delta x_i$ .

В случае произведения  $y = \prod x_i$  относительная погрешность  $\delta y = \sum_{i=1}^n \delta x_i$ .

### III. Погрешности, связанные с переходом от рядов к конечным суммам.

Например, расчет функции  $y = e^{2x}$  можно выполнять в виде суммирования

$$y = e^{2x} = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{9x^3}{3!} + \dots + \frac{(2x)^n}{n!} + r_n(x) \quad (1.13)$$

В случае  $x = 0.2$ , ограничиваясь первыми двумя слагаемыми в (1.13), находим приближенное значение  $e^{0.4} \cong 1 + 0.4 = 1.400$ . При учете же трех слагаемых  $e^{0.4} \cong 1 + 0.4 + 0.08 = 1.480$ . Этот процесс можно продолжать до бесконечности, причем погрешность все равно будет оставаться, т.к.  $e^{0.4}$  число иррациональное. Иногда такого же типа погрешность возникает при переходе к пределам. Например, надо рассчитать сумму

$$S = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^3}{3!4^3} + \frac{\pi^5}{5!4^5} - \frac{\pi^7}{7!4^7}$$

Если сопоставить исходную сумму с рядом  $S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ , то убеждаемся, что  $S \cong 1/\sqrt{2}$ , так как  $\tilde{S} = \sin \pi/4 = 1/\sqrt{2}$ . При этом также допускается погрешность за счет бесконечной суммы в исходном выражении.

### IV. Погрешности, связанные с заданной точностью определения числа.

Если число выражается в виде десятичной бесконечной дроби, то при реальных действиях все равно необходимо брать конечное число знаков после занятой, что дает погрешность. Например, надо разделить  $21/7$ .

Точное значение  $a=3$ . Если же представить  $1/7$  в виде десятичной дроби, то это будет число 0.1428571. Возьмем его в виде 0.142, тогда  $a = 21 \cdot 0.142 = 2.982$ , т.е.  $\Delta=0.018$ .

### V. Погрешности действий, связанные с погрешностями отдельных чисел.

Они неустранимы и накапливаются при длительных расчетах на ЭВМ. Снижение этого типа погрешностей должно учитываться при выработке алгоритма задачи.

При записи числа в виде десятичной дроби важно указывать значащие цифры, которыми является набор чисел, первое из которых не равно нулю. Например, в числе 0.02780 это 2780. Таким образом, числа 0.02780 и 0.0278 не равноценны, т.к. у них разное число значащих цифр. Второе число, если

оно приближенное, может быть больше первого.

Если говорят, что число  $a$  определено с точностью  $\Delta$ , то значит точное число  $A$  лежит на отрезке  $a - \Delta \leq A \leq a + \Delta$ . Например, число  $a=1.843$  определено с точностью  $\Delta=0.002$ . Значит, точное число  $1.841 \leq A \leq 1.845$ . Число  $a$  в этом примере имеет четыре значащие цифры.

Округление чисел производится, по определенным правилам.

1. Если первая из отбрасываемых цифр больше 5, то последняя из сохраняемых цифр увеличивается на единицу. (Округляя до сотых число 3.887 получим 3.89).
2. Если первая из отбрасываемых цифр равна 5, а среди остальных отбрасываемых цифр есть ненулевые, то остающаяся последняя, цифра увеличивается на единицу ( $8.94502 \Rightarrow 8.95$ ).
3. Если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то остающиеся цифры не меняются ( $0.022 \Rightarrow 0.02$ ).
4. Если первая из отбрасываемых цифр равна 5, а после нее стоят нули, то четная последняя остающаяся цифра не меняется, а нечетная - увеличивается на единицу ( $3.25 \Rightarrow 3.2$ ,  $3.35 \Rightarrow 3.4$ ),

При таком округлении абсолютная погрешность не превосходит половины единицы разряда последней оставленной значащей цифры.

### Пример 1.1.

1. Число  $A=3.889$  округляем до двух значащих цифр, что дает значение  $a=3.9$ . Отсюда  $\Delta a = |3.889 - 3.9| = 0.011$ . Единица разряда последней значащей цифры 9 есть 0.1, половина этого числа 0.05. Действительно  $0.05 > 0.011$ .

2. Число  $A = 0.00734$  округлим до двух значащих цифр, что дает  $a=0.0073$  и  $\Delta a = |0.00734 - 0.0073| = 4 \cdot 10^{-5}$ . Единица разряда последней значащей цифры числа  $a$ , (т.е. цифры 3) есть  $0.0001 = 10^{-4}$ . Половина от этого числа  $5 \cdot 10^{-5}$ . Таким образом, абсолютная погрешность  $\Delta = 4 \cdot 10^{-5}$  меньше половины единицы разряда последнего значащего числа  $5 \cdot 10^{-5}$ .

При сложении чисел с разной абсолютной точностью выделяют число (или числа) с наименьшей абсолютной точностью, а все остальные округляют так, чтобы они имели точность на порядок (в десять раз) выше выделенного числа. После сложения результат округляют до точности выделенного числа.

**Пример 1.2.** Сложить числа  $a = 3.8$ ,  $b = 2.243$ ,  $c = 0.0794$ .

Решение. Самая низкая точность у числа  $a$ . Округляем  $b = 2.24$  и  $c = 0.08$ . Далее складываем  $a + b + c = 3.8 + 2.24 + 0.08 = 6.12$ . После округления результата получаем  $a + b + c = 6,1$  с абсолютной погрешностью 0.05.

## §2. Вычисление значений многочлена по схеме Горнера

В практических задачах довольно часто функцию  $y=f(x)$ , заданную аналитически, необходимо представить в графическом или табличном виде. Этот переход является совершенно необходимым при практическом использовании математических формул, при исследовании характера сложных функций, при нахождении корней функции  $f(x)$  и т.д. Однако, сама процедура подстановки конкретного значения  $x$  в  $f(x)$  и вычисления  $y$  может быть очень громоздкой. Но существуют численные методы ускоряющие и облегчающие процесс нахождения численных значений функции. В этом параграфе мы рассмотрим вычисление полинома  $n$ -степени.

Пусть дан многочлен  $n$ -ой степени (слова многочлен и полином - синонимы)

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n. \quad (2.1)$$

Если вычислять его методом прямой подстановки, то требуется  $(n^2+3n)/2$  элементарных арифметических операций. Например, при вычислении  $P_2(x) = 2x^2 + 4x + 3$  требуется 5 операций, при вычислении  $P_4(x)$  требуется уже 14 операций, и т.д.

Схема Горнера позволяет значительно сократить число операций. Представим  $P_n(x)$  в виде

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = \\ (\dots((a_0x + a_1)x + a_2)x + a_3)x + \dots + a_{n-1})x + a_n. \quad (2.2)$$

Введем так называемые коэффициенты Горнера  $b_k$ :

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = b_0x + a_1, \quad b_2 = b_1x + a_2, \quad \dots, \quad b_n = b_{n-1}x + a_n.$$

Легко показать, что  $b_n = P_n(x)$ . Из записи полинома  $P_n(x)$  в виде (2.2) с использованием круглых скобок видно, что внутренние круглые скобки  $(a_0x + a_1)$  есть  $b_1$ , следующие круглые скобки  $((a_0x + a_1) + a_2) = b_2$  и т.д. При этом требуется всего  $2n$  операций, т.е. для расчета полинома  $P_2(x)$  нужно 4 операции, для  $P_3(x)$  - 6 операций т.д. При больших степенях это вызывает существенную экономию расчетного времени.

**Пример 2.1.** Рассчитать  $P_4(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 5$  при  $x=2$ .

Решение. Находим коэффициенты Горнера:  $b_0 = 2$ ,  $b_1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ ,  $b_2 = 5 \cdot 2 - 3 = 7$ ,  $b_3 = 7 \cdot 2 + 1 = 15$ ,  $b_4 = 15 \cdot 2 - 5 = 25$ . Таким образом  $P_4(2) = 25$ .

Вычисления удобно располагать в следующей таблице:

$a_i$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$		$a_{n-1}$	$a_n$
$x$		$b_0x$	$b_1x$	$b_2x$	$\dots$	$b_{n-2}x$	$b_{n-1}x$
$b_i$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\dots$	$b_{n-1}$	$b_n$

Использование коэффициентов Горнера удобно при составлении алгоритма расчета «вручную», а также и с использованием средств вычислительной техники для больших полиномов. Следует заметить, что при написании программы расчета коэффициентов Горнера используется лишь одна ячейка памяти, в которую последовательно заносятся  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ , причем формирование этих чисел идет по одному принципу, т.е. можно использовать соответствующую подпрограмму для их вычисления.

Коэффициенты Горнера, как будет показано ниже, играют большую вспомогательную роль при изучении свойств многочлена: способности его делиться на двучлены и трехчлены, отделение корней в заданной области.

Рассмотрим деление многочлена  $P_n(x)$  на двучлен  $(x-c)$ .

Согласно теореме Безу<sup>1</sup>

$$\frac{P_n(x)}{(x-c)} = P_{n-1}(x) + \frac{r}{(x-c)}, \quad (2.3)$$

где  $P_{n-1}(x)$  – новый многочлен степени  $(n-1)$ , а  $r=P_n(c)$ .

Нахождение остатка легко осуществляется по схеме Горнера. При этом коэффициенты в  $P_{n-1}(x)$  есть коэффициенты Горнера  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ , т.е.

$$P_{n-1}(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}. \quad (2.4)$$

**Пример 2.2.** Разделить  $P_4(x) = x^4 - 2x^3 + x - 2$  на  $(x-3)$ .

Решение.

Находим остаток по схеме Горнера, используя таблицу

$i$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$
$a_i$	$1$	$-2$	$0$	$1$	$-2$
$b_{i-1} \cdot 3$		$3$	$3$	$9$	$30$
$b_i$	$1$	$1$	$3$	$10$	$28$

Таким образом,  $x^4 - 2x^3 + x - 2 = (x-3) \cdot P_3(x) + 28$ ,  $P_3(x) = x^3 + x^2 + 3x + 10$ . (2.5)

Этот способ деления многочлена на двучлен значительно более быстрый, чем способ деления уголком. С помощью этого приема можно определять, является ли число  $x=c$  корнем полинома  $P_n(x)$ . При этом надо

<sup>1</sup> Теорема Безу: Остаток от деления многочлена  $P_n(x)$  на двучлен  $(x-c)$  равен значению этого многочлена при  $x=c$ .

определить остаток  $r=P_n(x)$ . Если он равен нулю, то  $c$  – корень полинома. В примере (2.4), как видно,  $x=3$  не является корнем полинома.

**Пример 2.3.** Определить, является ли  $x=2$  корнем полинома  $x^5-3x^4+2x+12$  ?

Решение.

Составляем таблицу

$i$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$	$5$
$a_i$	$1$	$-3$	$0$	$0$	$2$	$12$
$b_{i-1} \cdot 2$		$2$	$-2$	$-4$	$-8$	$-12$
$b_i$	$1$	$-1$	$-2$	$-4$	$-6$	$0$

из которой следует, что  $P_5(2)=0$ , т.е.  $x=2$  – корень полинома.

Таким образом, можно записать

$$x^5-3x^4+2x+12=(x-2)(x^4-x^3-2x^2-4x-6). \quad (2.6)$$

Тут, как видно, используются все коэффициенты Горнера.

Схема Горнера также позволяет делить многочлен на квадратный трехчлен  $P_2(x)=x^2+px+q$ . Без доказательства приведем конечную формулу

$$\begin{aligned} & a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-1}x+a_n = \\ & = (x^2+px+q) \cdot (\tilde{b}_0x^{n-2}+\tilde{b}_1x^{n-3}+\dots+\tilde{b}_{n-3}x+\tilde{b}_{n-2})+\tilde{b}_{n-1}x+\tilde{b}_n \end{aligned} \quad (2.7)$$

Формулу (2.7) можно записать в более компактном виде:

$$\frac{P_n(x)}{x^2+px+q} = \left\{ \sum_{k=0}^{n-2} \tilde{b}_k \cdot x^{n-2-k} \right\} + (\tilde{b}_{n-1} \cdot x + \tilde{b}_n) \quad (2.8)$$

В формуле (2.8) коэффициенты вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_0 &= a_0, \\ \tilde{b}_1 &= a_1 - p\tilde{b}_0, \\ \tilde{b}_2 &= a_2 - p\tilde{b}_1 - q\tilde{b}_0, \\ \tilde{b}_3 &= a_3 - p\tilde{b}_2 - q\tilde{b}_1, \\ &\vdots \\ \tilde{b}_{n-2} &= a_{n-2} - p\tilde{b}_{n-3} - q\tilde{b}_{n-4}, \\ \tilde{b}_{n-1} &= a_{n-1} - p\tilde{b}_{n-2} - q\tilde{b}_{n-3}, \\ \tilde{b}_n &= a_n - q\tilde{b}_{n-2}. \end{aligned}$$

**Пример 2.4.** Разделить  $P_4(x)=x^4-3$  на  $P_2(x)=x^2-x-1$ .

Решение.

Тут  $a_0=1, a_1=a_2=a_3=0, a_4=-3, p=q=-1. \tilde{b}_0=1, \tilde{b}_1=1, \tilde{b}_2=2, \tilde{b}_3=3, \tilde{b}_4=-1.$

Итак,

$$x^4 - 3 = (x^2 - x - 1) \cdot (x^2 + x + 2) + (3x - 1) \quad (2.9)$$

Рассмотрим в конце параграфа метод отделения области действительных корней полинома  $P_n(x)$  с использованием схемы Горнера. Пусть надо решить уравнение  $P_n(x) = 0$ , которое имеет  $n$  корней (действительных и комплексных). Обозначим действительные корни буквами  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ , где  $k \leq n$ . Пусть при  $x = \alpha$  все коэффициенты Горнера полинома  $P_n(x)$  неотрицательны, т.е.  $b_2 \geq 0, b_3 \geq 0, \dots, b_n \geq 0$ , а первый больше нуля –  $b_1 > 0$ . Тогда можно доказать, что все действительные корни не превышают  $\alpha$ , т.е.  $\xi_i \leq \alpha, i = 1, 2, \dots, k$ .

Действительно, представим  $P_n(x)$  в виде

$$P_n(x) = (x - \alpha)(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-1}) + b_n \quad (2.10)$$

согласно формулам (2.3) и (2.4). Поскольку при  $x > \alpha$  все множители и слагаемые в (2.10) неотрицательны, то  $P_n(x) > 0$ , т.е. в этой области нет корней. Корни могут быть при  $x \leq \alpha$ . Это верхняя граница корней полинома. Чтобы найти нижнюю границу этой области, рассмотрим полином

$$\begin{aligned} \tilde{P}_n(x) &= (-1)^n P_n(-x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k x^{n-k} = \\ &= a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \dots + (-1)^n a_n = \\ &= \tilde{a}_0 x^n + \tilde{a}_1 x^{n-1} + \tilde{a}_2 x^{n-2} + \dots + \tilde{a}_{n-1} x + \tilde{a}_{n-2}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где  $\tilde{a}_k = (-1)^k a_k$ . Корнями полинома  $P_n(x)$  являются значения  $x = -\xi_1, -\xi_2, \dots, -\xi_k$ , как это следует из (2.11). Пусть существует такое число  $\beta$ , что для него все коэффициенты Горнера  $\tilde{b}_k$  полинома  $\tilde{P}_k$  неотрицательны, а  $\tilde{b}_0 > 0$ .

( $\tilde{b}_0 = \tilde{a}_0 = a_0, \tilde{b}_1 = \tilde{b}_0 \beta + \tilde{a}_1 = a_0 \beta + a_1$  и т.д.) В этом случае при  $x > \beta$   $P_n(x) > 0$ , как это было и для  $P_n(x)$  при  $x > \alpha$ . Следовательно, корни полинома  $\tilde{P}_n(x)$  находятся при значениях  $x < \beta$ , т.е.  $-\xi_1 \leq \beta, -\xi_2 \leq \beta, \dots, -\xi_k \leq \beta$ . Меняя знак в этих неравенствах и объединяя их с ранее доказанной верхней границей области, находим

$$-\beta \leq \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k. \quad (2.12)$$

**Пример 2.5.** Рассмотрим  $P_2(x) = x^2 - 5x + 6$ . Коэффициенты Горнера при  $\alpha = 5$  равны:  $b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = 6$ , т.е., а  $b_0 > 0$ . Следовательно,  $\xi_1, \xi_2 \leq 5$ . Вторым полином  $\tilde{P}_2(x) = x^2 - 5x + 6$ . При  $\beta = 1$  его коэффициенты Горнера равны:  $\tilde{b}_0 = 1, \tilde{b}_1 = 6, \tilde{b}_2 = 12$ , т.е. также неотрицательны, а  $\tilde{b}_0 > 1$ . Следовательно  $\xi_1, \xi_2 \geq -1$ . Таким образом, корни находятся в интервале  $-1 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 5$ . Это соответствует действительности, т.к. корни уравнения  $x^2 - 5x + 6 = 0$   $\xi_1 = 2, \xi_2 = 3$ .

### §3. Вычисление значений различных функций

Рассмотренная в предыдущем параграфе схема Горнера при вычислении полинома таких функций как  $y=e^x$ ,  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \ln x$ ,  $y = \arctg x$  и любых других функций, которые являются аналитическими, т.е. в окрестности некоторой точки  $x_0$  раскладываются в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k \end{aligned} \quad (3.1)$$

Особенно простой вид это разложение имеет при  $x_0=0$  (ряд Маклорена)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f(0) \cdot x^k \quad (3.2)$$

Оба выражения (3.1) и (3.2) – степенные ряды, что и позволяет применять схему Горнера для расчета различных функций  $f(x)$ .

При этом, конечно, необходимо ограничиться некоторым конечным числом  $n$  слагаемых, откинув оставшийся бесконечный сходящийся ряд, т.е. погрешность расчета

$$\begin{aligned} R_n(x) &= f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k = \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k \end{aligned} \quad (3.3)$$

Остаточный член в форме Лагранжа имеет вид

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[x_0 - \theta(x - x_0)]}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad (3.4)$$

где  $0 < \theta < 1$ . Из (3.4) легко получается значение  $R_n(x)$  в случае ряда Маклорена.

Показательная функция вычисляется по формуле

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x) \quad (3.5)$$

Т.к.  $(n+1)$  – производная  $(e^x)^{(n+1)} = e^x$ , то взяв  $\theta=1$  находим, что

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{x^{n+1} \cdot e^x}{(n+1)!}$$

**Пример 3.1.** Вычислить  $e^{0.5}$ , взяв три слагаемых в (3.5).

Решение.

Получаем  $e^{0.5} = 1 + 0.5 + 0.125 = 1.625$ . Погрешность  $R_3 < \frac{3 \cdot 0.5^3}{6} = 0.0625$ .

Таким образом,  $1.6250 < e^{0.5} < 1.6875$ . Точное значение  $e^{0.5} = 1.6487$ .

При учете четырех слагаемых в (3.5)  $e^{0.5} = 1.6458$ ,  $R_4 < 0.0078$ ,  $1.6458 < e^{0.5} < 1.6536$ , т.е. интервал определения  $e^{0.5}$  уменьшился.

Если заранее задана точность  $\Delta$  определения  $e^x$ , то в начале вычисляется  $n$  из условия  $\left| \frac{x^n}{n!} \right| < \Delta$ , при этом также  $|R_n(x)| < \Delta$ .

**Пример 3.2.** Вычислить  $\exp(1/3)$  с точностью  $\Delta = 10^{-4}$ .

Решение.

Возьмем условие прекращения суммирования в виде (для  $x = 1/3$ )

$$\frac{1}{3^n \cdot n!} < 5 \cdot 10^{-5}.$$

Это неравенство выполняется при  $n=5$ , т.к.  $1/3^5 \cdot 5! = 3.4 \cdot 10^{-5}$ .

В результате имеем

$$\sqrt[3]{e} = 1 + 0.333333 + 0.055555 + 0.006173 + 0.00051 + 0.00003 = 1.395605.$$

Округляя этот результат до четырех десятичных знаков, получаем

$$\sqrt[3]{e} = 1.3956.$$

Значение логарифмической функции вычисляется по формуле

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}. \quad (3.6)$$

Ряд сходится при  $x \in (-1; 1]$ .

Тригонометрические функции вычисляются по формулам:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}; \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}; \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.7)$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2 \cdot x^5}{15} + \frac{17 \cdot x^7}{315} + \frac{62 \cdot x^9}{2835} + \dots; \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}; \quad \operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad x \in \mathbb{R}.$$

В этих формулах  $x$  берется в радианах.

#### §4. Интерполирование и экстраполирование функций

В различных инженерно-физических задачах часто бывает необходимо вычислять значения функции  $y=f(x)$  в точках  $x$ , отличных от значений аргументов, фиксированных в таблице. Такая необходимость возникает также тогда, когда выражение функции является настолько сложным, что вычисление каждой дополнительной точки сопряжено с большими затратами времени. Оказывается, что более приемлемым является

вычисление лишь некоторых значений функции, а промежуточные точки получать с помощью других, более простых формул. Такие задачи решаются с помощью интерполяционных формул. Фактически интерполяция осуществляет переход от табличного задания функции к аналитическому.

Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана функция  $y=f(x)$  своими  $(n+1)$  значениями:  $y_0=f(x_0)$ ;  $y_1=f(x_1)$ ;  $y_2=f(x_2)$ ; ...  $y_n=f(x_n)$  в точках  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ , которые называются узлами интерполяции. Требуется найти аналитическое выражение  $P(x)$  табулированной функции (это и есть главная задача интерполяции), совпадающей в узлах интерполяции со значениями заданной функции, т.е.

$$y_0=f(x_0)=L(x_0); \quad y_1=f(x_1)=L(x_1); \quad y_2=f(x_2)=L(x_2); \quad \dots \quad y_n=f(x_n)=L(x_n).$$

При этом, если аргумент  $x$ , для которого определяется приближенное значение функции, принадлежит отрезку  $[x_0, x_n]$ , то задача вычисления приближенного значения функции называется интерполированием. Если аргумент  $x$  находится за пределами отрезка интерполирования  $[x_0, x_n]$ , то задача определения значения функции в точке  $x$  называется экстраполированием.

Геометрически задача интерполирования для функции одной переменной  $y=f(x)$  означает построение кривой, проходящей через точки плоскости с координатами  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . (См. рисунок 4.1)

Но через данные точки можно провести бесчисленное множество различных кривых. Таким образом, задача отыскания функции  $P(x)$  по конечному числу её значений слишком неопределенна.

Если выбрать некоторую аппроксимирующую (приближающую) функцию  $P(x)$ , которая будет совпадать в узлах интерполяции с данной функцией  $f(x)$ , то задача станет более определенной.

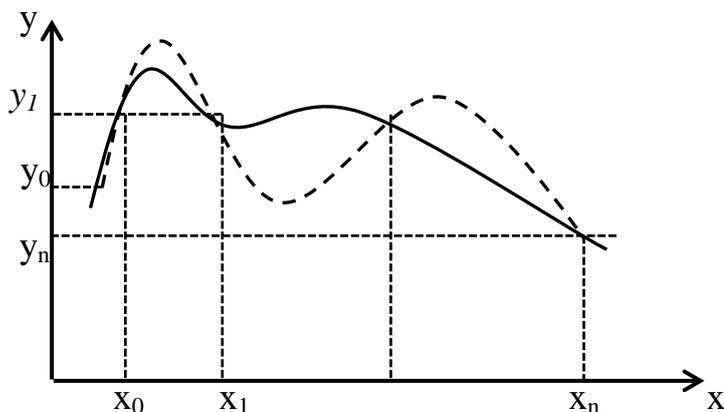


Рис.4.1

Какую функцию выбрать в качестве аппроксимирующей? Это вопрос

далеко не однозначный. Подбор удачного вида аппроксимирующей зависимости - своего рода искусство. В теории интерполирования рассматриваются различные вида функций - это могут тригонометрические, рациональные, иррациональные, степенные, показательные и т.п. функции.

Чаще всего в качестве аппроксимирующей функции выбирается многочлен  $n$ -го порядка

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad (4.1)$$

значения которого в точках  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$  совпадают со значениями заданной на отрезке  $[x_0, x_n]$  непрерывной функции  $f(x)$ , т.е.  $P(x_k) = f(x_k) = y_k$ .

Многочлен (полином)  $P_n(x)$ , удовлетворяющий этим требованиям, называется интерполяционным многочленом. Этот способ приближения основывается на том, что на небольших отрезках функция  $f(x)$  может быть достаточно хорошо аппроксимирована квадратичной, кубической и т.д., параболой, т.е. полиномом второго, третьего и высших порядков.<sup>2</sup>

В случае  $n = 2$  интерполяция называется параболической.

Кроме того, многочлены являются функциями простой природы, их легко складывать, вычитать, дифференцировать и интегрировать.

Это немаловажно для решения большинства задач на ЭВМ.

Основной идеей задачи интерполирования следует считать не только нахождение промежуточных значений табличной функции (чтение между строк таблицы), а главным образом нахождение приближающей, аппроксимирующей зависимости, по которой и будут находиться промежуточные значения данной функции.

При интерполировании возникает ряд задач:

- 1) выбор наиболее удобного способа построения аппроксимирующей функции для каждого конкретного случая;
- 2) оценка погрешности при замене  $f(x)$  аппроксимирующей функцией  $P(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , поскольку эти функции совпадают только в узлах интерполяции;
- 3) оптимальный выбор узлов интерполирования для получения минимальной погрешности.

## **§5. Интерполяционный многочлен Лагранжа**

Для получения аналитического выражения интерполяционной формулы

---

<sup>2</sup> Теорема Вейерштрасса - Если  $f(x)$  непрерывная на конечном замкнутом промежутке  $[a, b]$  функция, то для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такой многочлен  $P(x)$ , что  $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$  при всех  $x \in [a, b]$ .

Лагранжа, которая является наиболее общей в теории параболического интерполирования, рассмотрим функцию  $f(x)$ , заданную своими  $(n + 1)$  значениями

$$y_0=f(x_0); y_1=f(x_1); y_2=f(x_2); \dots y_n=f(x_n). \quad (5.1)$$

При этом узлы интерполяции  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$  могут произвольно отстоять друг от друга и шаг интерполяции  $h_i=x_{i+1}-x_i \neq const$  меняется от узла к узлу. Требуется построить многочлен  $P(x)$  так, чтобы в узлах интерполяции его значения совпадали со значениями заданной функции, т.е.

$$P(x_0)=y_0, P(x_1)=y_1, \dots, P(x_n)=y_n. \quad (5.2)$$

Задача имеет решение, если степень многочлена  $P(x)$ , которым мы заменяем неизвестную функцию  $f(x)$ , не выше  $n$ .

Для того, чтобы подучить в окончательном виде формулу Лагранжа, введем такой многочлен  $Q_i(x)$ , который бы в точки  $x_i$  был равен единице, а в остальных узловых точках - нулю, т.е. выражался через  $\delta$ -символ Кронекера  $Q_i(x_j) = \delta_{ij}$ ,

$$Q_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \quad (5.3)$$

Такой многочлен должен иметь вид

$$Q_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)},$$

так как он только в  $i$ -той точке равен 1, а в остальных он равен нулю.

Например, пусть  $x_0=1, x_1=2, x_2=5, x_3=7$ . Тогда

$$Q_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-7)}{(5-1)(5-2)(5-7)}.$$

При  $x=x_0=1$   $Q_2(1)=0$  из-за первого множителя в числителе. При  $x=x_2=5$   $Q_2(5)=1$ , т.к. числитель равен знаменателю. Теперь легко построить интерполяционную формулу Лагранжа:

$$P_n(x)=y_0 \cdot Q_0(x)+y_1 \cdot Q_1(x)+\dots+y_n \cdot Q_n(x) \quad (5.4)$$

Эта формула в узлах интерполяции дает точное совпадение интерполяционной функции  $P_n(x)$  с данной функцией  $f(x)$  согласно свойствам  $Q_i(x_j)$ .

В развернутом виде формула Лагранжа запишется так:

$$P_n(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} + \dots + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}. \quad (5.5)$$

Формулу Лагранжа или интерполяционный многочлен Лагранжа можно

записать в сокращенном виде:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}.$$

В простейшем случае, когда  $n=1$ , т.е. имеется два узла, получаем формулу линейной интерполяции Лагранжа

$$P_1(x) = y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0}.$$

**Пример 5.1.** Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции, заданной таблично:

$x$	1	3	5
$y$	1	12	88

Решение.

Степень полинома Лагранжа должна быть не выше второй, так как функция задана 3-мя значениями. Подставляя табличные значения в формулу (5.5) получаем:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 1 \cdot \frac{(x-3)(x-5)}{(1-3)(1-5)} + 12 \frac{(x-1)(x-5)}{(3-1)(3-5)} + 88 \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(5-1)(5-3)} = \\ &= 8.125x^2 - 27x + 19.875, \end{aligned}$$

т.е. через три точки провели параболу, совпадающую в узлах интерполяции с заданной функцией. Зная теперь вид аппроксимирующей зависимости, можем получить значение функции в любой точке отрезка  $[1;5]$ . Например, при  $x=4$   $P_2(4)=41.375$ .

**Пример 5.2** Функция задана таблично. Найти значение функции в точке  $x=2.5$

$x$	-2	-1	2	3
$y$	-12	-8	3	5

Решение.

Функция задана 4-мя точками, поэтому строим полином Лагранжа третьей степени для  $x=2.5$

$$\begin{aligned} P_3(2.5) &= -12 \cdot \frac{(2.5+1)(2.5-2)(2.5-3)}{(-2+1)(-2-2)(-2-3)} - 8 \cdot \frac{(2.5+2)(2.5-2)(2.5-3)}{(-1+2)(-1-2)(-1-3)} + \\ &+ 3 \cdot \frac{(2.5+2)(2.5+1)(2.5-3)}{(2+2)(2+1)(2-3)} + 5 \frac{(2.5+2)(2.5+1)(2.5-2)}{(3+2)(3+1)(3-2)} = 4.1625. \end{aligned}$$

Если бы табличная функция была задана пятью точками, то для описания всей кривой одним полиномом и нахождения значения функции в точке, например,  $x=2.5$ , пришлось бы заново строить полином Лагранжа 4-ой степени (так как добавляется новый узел). Это обстоятельство является недостатком интерполирование по Лагранжу.

Вообще говоря, в случае любой интерполяции бывает неразумным строить полином  $n$ -ой степени, если  $n > 4$ . В этих случаях проводят интерполяцию по 2, 3, 4 узлам близлежащим к интерполируемой точке.

**Пример 5.3.** Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции  $f(x) = e^{-x}$ .

Решение.

Найдем значения функции в узлах интерполяции  $x=1, x=2, x=3$ .

$x$	1	2	3
$y$	0.3679	0.1353	0.0498

После этого при  $x=2.5$   $e^{-2.5} = P_2(2.5)$ , где

$$P_2(x) = 0.3679 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 0.1353 \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 0.0498 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = 0.0735x^2 - 0.453x + 0.7476.$$

Таким образом, мы получили аналитическое выражение для данной табличной зависимости, откуда находим значение функции  $f(x) = e^{-x}$  в точке  $x=2.5$   $P(2.5) \approx 0.074475$ .

Точное значение  $e^{-2.5} = 0.082085$ , т.е. ошибка интерполяции Лагранжа в данном случае  $\Delta = |e^{-2.5} - P_2(2.5)| = 0.00761$ .

Рассмотрим более подробно погрешность, возникшую при интерполяции Лагранжа. Интерполяционный многочлен Лагранжа построен таким образом, что в узлах  $x_0, x_1, \dots, x_n$  он совпадает со значениями заданной функции. Какую погрешность будет давать приближение Лагранжа в точках, отличных от узлов интерполяции? Сделаем дополнительные предположения о поведении интерполяционной функции  $f(x)$ . Пусть  $f(x)$  непрерывна и  $(n+1)$  раз дифференцируема на отрезке  $[a, b]$ . Представим погрешность в виде функции

$$\Delta_n(x) = f(x) - P_n(x) \quad (5.6)$$

и введем вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = \Delta_n(x) - k \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad (5.7)$$

где  $\prod_{i=0}^n (x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$  многочлен,

обращающийся в нуль в узлах интерполяции. Функция  $\varphi(x)$  имеет  $(n+1)$  корней, т.е.  $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = \dots = \varphi(x_n) = 0$ , т.к. в узлах интерполяции  $\Delta_n(x_i) = 0$ , и один из сомножителей функции  $\prod (x)$  также равен нулю.

Подберем коэффициент  $k$  таким образом, чтобы функция  $\varphi(x)$  имела один корень в любой фиксированной точке  $x^*$  на отрезке  $[a, b]$  ( $x^*$  отлично от узлов интерполяции). При этом  $\prod (x^*) \neq 0$ . Таким образом, можно записать

$$\varphi(x^*)=0, \quad \Delta_n(x^*) - k \prod_{i=0}^n (x^* - x_i) = 0. \quad (5.8)$$

Из (5.8) получаем выражение для

$$k = \frac{\Delta_n(x^*)}{\prod_{i=0}^n (x^* - x_i)} = \frac{f(x^*) - P_n(x^*)}{(x^* - x_0)(x^* - x_1) \cdots (x^* - x_n)}. \quad (5.9)$$

Для определения численного значения  $k$  продифференцируем  $\varphi(x)$   $n+1$  раз. Так как  $\varphi(x)$  обращается в нуль на  $[a, b]$  в  $n+2$  точках  $x^*, x_0, x_1, \dots, x_n$ , то на основании теоремы Ролля<sup>3</sup> производная от  $\varphi(x)$  обращается в нуль по крайней мере  $n+1$  раз. Применим теорему Ролля к функции  $\varphi'(x)$ . Вторая производная  $\varphi''(x)$  будет обращаться в нуль не менее  $n$  раз на интервале  $[a, b]$ . Продолжая этот процесс, можно сделать вывод, что производная  $(n+1)$  порядка функции  $\varphi(x)$  имеет хотя бы один корень, т.е

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0. \quad (5.10)$$

Кроме того, из соотношения (5.6) и (5.7) вытекает, что

$$\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - P_n^{(n+1)}(x) - k \left[ \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right]^{(n+1)}. \quad (5.11)$$

Вычислим  $(n+1)$ -ю производную для каждого слагаемого функции  $\varphi(x)$ . При этом

$$\left[ \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right]^{(n+1)} = (n+1)!, \quad (5.12)$$

так как  $(n+1)$ -я производная от многочлена степени  $(n+1)$ , старший коэффициент которого равен единице, равна  $(n+1)!$ . Для  $(n+1)$ -ой производной от многочлена Лагранжа  $n$ -ой степени получаем  $P_n(x)^{(n+1)} = 0$ , так как наибольшая степень в нем равна  $n$ .

Тогда  $(n+1)$  производную от вспомогательной функции  $\varphi(x)$  в точке  $\xi$  запишем как

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)! = 0, \quad (5.13)$$

<sup>3</sup> Теорема Ролля: если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и  $f(a) = f(b)$ , то на интервале  $(a, b)$  существует по крайней мере одна точка  $x=c$ , в которой  $f'(c) = 0$ .

откуда находим

$$k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \quad (5.14)$$

Из формул (5.9) и (5.14) получаем:

$$\frac{f(x^*) - P(x^*)}{\prod_{i=0}^n (x^* - x_i)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Точки  $\xi$  и  $x^*$  принадлежат отрезку  $[a, b]$ , причем  $x^*$  выбрана произвольно, а  $\xi$  - точка, в которой  $f^{(n+1)}(\xi) = 0$ . Поэтому можно записать:

$$\Delta_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

Обозначив  $M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(\xi)|$ ,  $x \in [a, b]$ , получим оценку погрешности интерполяционного многочлена Лагранжа

$$|\Delta_n| = |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)|. \quad (5.15)$$

**Пример 5.4.** Определить, с какой погрешностью было вычислено значение функции в точке  $x=2.5$  с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа в примере 3.

Решение.

Так как в примере 3 даны три узла интерполяции, то соответственно формуле (5.15) будем находить производные до 3-го порядка включительно.

$$y' = (e^{-x})' = -e^{-x}, \quad y'' = e^{-x}, \quad y''' = -e^{-x}.$$

Тогда  $M_3 = \max |y'''| = | -e^{-1} | = 0.368$ , и на основании формулы для погрешности имеем

$$\Delta_2 \leq \frac{0.368}{3!} |(2.5 - 1)(2.5 - 2)(2.5 - 3)| = 0.0229.$$

Точное значение погрешности в примере 3  $\Delta_2 = 0.00761$  удовлетворяет этому неравенству.

## §6. Конечные разности

Очень часто приходится работать с табличными функциями, аргументы которых (узлы интерполяции) являются равноотстоящими. В этом случае построение интерполяционных формул упрощается.

Рассмотрим функцию  $f(x)$ , заданную таблично в узловых точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$   $y_0=f(x_0), y_1=f(x_1), \dots, y_n=f(x_n)$ .

В случае равноудаленных узлов  $x_n=x_0+nk$ , где  $k$ -шаг изменения аргумента. Выражение вида  $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = f(x_i + h) - f(x_i)$  называется конечной разностью первого порядка.

Запишем конечные разности  $\Delta y_i$ :

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0; \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1; \quad \Delta y_2 = y_3 - y_2; \dots, \quad \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

По конечным разностям первого порядка можно образовать конечные разности второго порядка по общей формуле  $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ , т.е.

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_0 &= \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0; \\ \Delta^2 y_1 &= \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1; \\ &\vdots \\ \Delta^2 y_{n-2} &= \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} = y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}. \end{aligned}$$

По разностям второго порядка можно составить конечные разности третьего порядка и т.д, общий принцип построения которых следующий:

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i.$$

Составим таблицу:

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$x_0$	$y_0$	$\Delta y_0$	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
$x_1$	$y_1$				
$x_2$	$y_2$	$\Delta y_1$	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
$x_3$	$y_3$				
$x_4$	$y_4$	$\Delta y_2$	$\Delta^2 y_2$		
		$\Delta y_3$			

Принято все табличные разности записывать целыми числами в единицах последнего знака без нулей впереди. Например, пусть  $y_0 = 5.4739$ ,  $y_1 = 5.5290$ , конечная разность  $\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 5.5290 - 5.4739 = 0.0551$ . В таблице же это число записывают в виде 551.

В качестве примера приведем таблицу конечных разностей, которая, например, будет иметь вид:

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$
1	0.33	12	4
2	0.45		
3	0.53	8	

Заметим, что реальные значения  $\Delta y_0 = 0.12$ ,  $\Delta y_1 = 0.08$ ,  $\Delta^2 y = 0.04$ .

Найдем выражение, позволяющее вычислять конечные разности  $k$ -того порядка через значения функции:

$$\begin{aligned} \Delta y_0 &= y_1 - y_0, & \Delta^2 y_0 &= \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0; \\ \Delta^3 y_0 &= \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Продолжая этот процесс можно получить, что разность  $k$ -того порядка будет вычисляться по формуле, по своему виду близкому к биному Ньютона:

$$\begin{aligned} \Delta^k y_0 &= y_k - ky_{k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{k-2} + \dots + (-1)^{k-1} ky_1 + (-1)^k y_0 = \\ &= \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!(k-n)!} (-1)^n y_{k-n}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Аналогичным образом можно получить выражение, позволяющее вычислять значения функции через конечные разности. Из равенств (6.1) следует:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \Delta y_0, \\ y_2 &= y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0, \\ y_3 &= y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0, \\ &\vdots \\ y_k &= y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{k!}{l!(k-l)!} \Delta^l y_0 + \dots + \Delta^k y_0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Т.е.  $y_k = \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!(k-n)!} \Delta^n y_0$ , где  $\Delta^0 y_0 \equiv y_0$ .

Составим таблицу конечных разностей для функции  $y = 2x^2 - x + 1$  (полином 2-ой степени), если аргумент  $x$  меняется от нуля с шагом 1.

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	1	1	4	0	0
1	2				
2	7	5	4	0	
3	16	9	4		
4	29	13	4		

Из таблицы видно, что конечные разности для полинома 2-ой степени ведут себя следующим образом: разности второго порядка постоянны, а 3-го порядка равны нулю. Без доказательства приведем важное свойство конечных разностей:

Конечные разности  $n$ -го порядка от многочлена степени  $n$  постоянны, а конечные разности  $(n+1)$ -го порядка равны нулю. Таким образом, если  $y(x)$ -полином  $n$ -ой степени  $y(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ , то  $\Delta^n y_i = n! \cdot a_0 h^n$ .

Справедливо и обратное утверждение: если  $k$ -ые разности ( $k < n$ ), образованные для равностоящих значений аргумента при любом шаге  $h$  постоянны, то функция представляет собой полином (многочлен)  $k$ -ой степени.

По конечным разностям можно приблизительно охарактеризовать степень полинома, который будет аппроксимировать данную табличную зависимость. Следует отметить, что  $k$ -ые разности постоянны только в том случае, если значения полинома заданы точно, а сами разности вычислялись без ошибок округления. В реальных задачах значения функции  $f(x)$  вычисляются с некоторой ошибкой и в конечных разностях присутствуют ошибки округления.

Оценим абсолютные погрешности конечных разностей.

Пусть значения  $y = f(x)$  заданы с некоторой абсолютной погрешностью (обозначим погрешность  $\Delta y \equiv \varepsilon y$ )  $\varepsilon y < 0.5 \cdot 10^{-t}$ , где  $t$  – число значащих цифр после запятой в значении функции  $f(x)$ . Тогда

$$\Delta y_i \approx |y_{i+1} + \varepsilon y| - |y_i + \varepsilon y| \quad (6.4)$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
\varepsilon \Delta y &\leq \varepsilon y / + \varepsilon y / = 10^{-t}, \\
\varepsilon \Delta^2 y &\leq \varepsilon y / + 2 \varepsilon y / + \varepsilon y / = 2 \cdot 10^{-t}, \\
&\vdots \\
\varepsilon \Delta^k y &\leq 2^{k-1} \cdot 10^{-t}.
\end{aligned}
\tag{6.5}$$

Таким образом, можно сделать вывод, что из-за неизбежных ошибок округления не следует пользоваться разностями высоких порядков, т.к. их погрешность возрастает с порядком как показательная функция, т.е. очень быстро.

В приближенных методах вычислений, когда бывает неизвестен аналитический вид функции, или он очень сложный, конечная разность используется для определения производной функции.

Из определения производной вытекает, что

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{h},$$

т.е. при малых  $h$  имеем  $y' \approx \frac{\Delta y}{h}$ .

Аналогичное приближение распространяется и на производные более высоких порядков, т.е.

$$y'' \approx \frac{\Delta^2 y}{h^2}; \quad y''' \approx \frac{\Delta^3 y}{h^3}; \quad \dots \quad y^{(n)} \approx \frac{\Delta^n y}{h^n}.$$
(6.6)

Однако точность такого приближения невелика, особенно для производных второго и высших порядков, поэтому чаще используют другие, более точные формулы.

### **§7. Интерполяционный многочлен Ньютона для функций с равностоящими узлами**

Используя понятие конечных разностей, рассмотрим интерполяционные формулы Ньютона.

Пусть дана функция  $y=f(x)$ , причем значения аргумента  $x$  меняются с постоянным шагом  $h$ , т.е.  $x_1=x_0+h$ ,  $x_2=x_1+h$ , ...,  $x_n=x_{n-1}+h=x_0+nh$ .

Требуется найти такую функцию  $P_n(x)$ , которая бы удовлетворяла следующим условиям:  $P(x_0) = y_0$ ,  $P(x_1) = y_1$ , ...,  $P(x_n) = y_n$ .

В качестве интерполирующей функции  $P(x)$  возьмем наиболее простую – полиномиальную зависимость, в виде многочлена степени  $n$ .

$$\begin{aligned}
P_n(x) = & a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\
& \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})
\end{aligned}
\tag{7.1}$$



Анализируя формулу Ньютона, можно сказать, что она более удобна, чем интерполяционная формула Лагранжа в том смысле, что добавление нового узла в многочлен не требует пересчета по всей формуле, как это имеет место для формулы Лагранжа, а просто добавляется новое слагаемое в многочлене. Кроме того, в формулу Ньютона в качестве слагаемых входят многочлены повышающихся степеней, причем коэффициентами у них являются конечные разности, деленные на факториалы, которые довольно быстро уменьшаются по величине. Поэтому можно быстро оценить порядок малости слагаемого и все последующие отбросить.

В частном случае, когда имеем лишь два узла интерполяции, т.е.  $n=1$ , получаем формулу линейного интерполирования

$$P_1(x) = y_0 + t\Delta y_0. \quad (7.6)$$

Для интерполирования в конце таблицы обычно применяют вторую интерполяционную формулу Ньютона в виде:

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x-x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \dots \\ \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_n)(x-x_{n-1}) \dots (x-x_1) \quad (7.7)$$

Можно преобразовать эту формулу, введя обозначение  $\frac{x-x_n}{t} = h$ , где  $t$  – число шагов (оно может быть и дробным числом),  $h$ -шаг изменения аргумента. Тогда вторая интерполяционная формула приобретает вид, часто используемый на практике

$$P_n(x+th) = y_n + \frac{t\Delta y_{n-1}}{1!} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (7.8)$$

Первая интерполяционная формула Ньютона используется для интерполирования в начале таблицы или иначе для интерполирования вперед и экстраполирования назад. При интерполировании по первой формуле Ньютона  $t = \frac{x-x_0}{h} > 0$ . При экстраполировании назад по этой формуле  $t = \frac{x-x_0}{h} < 0$ .

При интерполировании в конце таблицы используют вторую интерполяционную формулу Ньютона, где  $t = \frac{x-x_n}{h} < 0$ . В этом случае мы имеем интерполяцию назад и экстраполяцию вперед.

Оценка погрешностей первой и второй интерполяционных формул Ньютона производится по следующим неравенствам соответственно:

$$|\Delta_n^{(1)}(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} / t(t-1)(t-2)\dots(t-n), \quad (7.9)$$

$$|\Delta_n^{(2)}(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} / t(t+1)(t+2)\dots(t+n), \quad (7.10)$$

где  $M_{n+1}$  максимальное значение  $(n+1)$  производной функции  $f(x)$ .

**Пример 7.1.** Дана табличная зависимость (См. таблиц 1 7.1)

Вычислить значения функции с помощью интерполяционных многочленов Ньютона в точках:  $x=0.151$ ;  $x=0.57$ ;  $x=0.65$ .

Таблица 7.1

$x$	$y$
0.15	0.8607
0.20	0.8187
0.25	0.7788
0.30	0.7408
0.35	0.7047
0.40	0.6703
0.45	0.6376
0.50	0.6065
0.55	0.5760
0.60	0.5488

Решение.

Для удобства вычислений составим таблицу конечных разностей:

$n$	$x_i$	$y_i$	$\Delta y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	0.15	0.8606	-0.0420	-0.0020	-0.0001
1	0.20	0.8187			
2	0.25	0.7788	-0.0399	-0.0019	0.0000
3	0.30	0.7408	-0.0380	-0.0019	
4	0.35	0.7047	-0.0361	-0.0017	-0.0002
5	0.40	0.6703	-0.0344	-0.0017	0.0000
6	0.45	0.6376	-0.0327	-0.0017	-0.0001
7	0.50	0.6065	-0.0311	-0.0016	-0.0001
			-0.0296	-0.0015	0.0000

8	0.55	0.5760		
			-0.0281	-0.0015
9	0.60	0.5488		

При вычислении разностей можно было бы ограничиться разностями 2-го порядка, т.к. они практически постоянны. Разности 3-го порядка практически равны нулю. Из свойств конечных разностей можно сделать вывод, что данную табличную зависимость можно аппроксимировать полиномом второй степени, т.е.

$$f(x) \approx P_2(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)\Delta^2 y_0}{2}.$$

При  $x=0.151$  воспользуемся первой интерполяционной формулой Ньютона  $f(x) \approx P_2(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)\Delta^2 y_0}{2}$ , где  $t = \frac{x-x_0}{h}$ , т.е. для  $x=0.151$   $t=0.02$ . Это дает

$$f(0.151) \approx 0.8607 - 0.0420 \cdot 0.02 - 0.002 \cdot \frac{0.02 \cdot (-0.98)}{2} = \\ = 0.8607 - 0.00084 + 0.0000196 = 0.8599.$$

Для точки  $x=0.57$ , близкой к концу таблицы, воспользуемся второй интерполяционной формулой Ньютона

$$f(x) \approx y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)\Delta^2 y_{n-2}}{2!}, \text{ где } t = \frac{x-x_n}{h}. \text{ Для } x=0.57 \text{ } t=-0.6 \text{ и}$$

$$f(0.57) \approx 0.5488 + (-0.6) \cdot (-0.0281) + \frac{(-0.6) \cdot (0.4)}{2} \cdot (-0.0015) \\ 0.5488 + 0.01686 + 0.00018 = 0.5658.$$

Для точки  $x=0.65$ , которая выходит за пределы таблицы, будем экстраполировать функцию с помощью второй интерполяционной формулы

Ньютона (экстраполяция вперед). При этом  $t = \frac{x-x_n}{h} = \frac{0.05}{0.05} = 1$  и

$$f(0.65) \approx 0.5488 + 1 \cdot (-0.0281) + \frac{1 \cdot 2}{2!} \cdot (-0.0015) = 0.5192.$$

### **§8. Интерполяционный многочлен Ньютона для функций с неравноотстоящими узлами**

Формулы Ньютона, выведенные с помощью конечных разностей в предыдущем параграфе, удобны для интерполирования, но применять их можно только для функций с равностоящими значениями аргументов. Введя

понятие разделенных разностей, можно вывести формулу Ньютона для интерполяции функций с неравноотстоящими значениями аргументов.

Пусть  $y = f(x)$  задана  $(n+1)$  значениями:  $y_0 = f(x_0)$ ,  $y_1 = f(x_1)$ ,  $\dots$ ,  $y_n = f(x_n)$  в неравноотстоящих узлах интерполяции  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Тогда разделенные разности 1-го порядка вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \delta y_0 &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \\ \delta y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \\ &\vdots \\ \delta y_k &= \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Разделенные разности 2-го порядка определяются через  $\delta y_k$ :

$$\begin{aligned} \delta^2 y_0 &= \frac{\delta y_1 - \delta y_0}{x_2 - x_0}, \\ \delta^2 y_1 &= \frac{\delta y_2 - \delta y_1}{x_2 - x_1}, \\ &\vdots \\ \delta^2 y_k &= \frac{\delta y_{k+1} - \delta y_k}{x_{k+2} - x_k}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

В общем случае разделенные разности  $(k+1)$  порядка

$$\delta^{k+1} y_i = \frac{\delta^k y_{i+1} - \delta^k y_i}{x_{i+k+1} - x_i}. \quad (8.3)$$

Отметим, что разделенные разности при равноотстоящих узлах интерполяции выражаются через конечные разности  $\Delta^k y_i$ :

$$\Delta y_i = \delta y_i h, \quad \Delta^2 y_i = \delta^2 y_i \cdot 2h^2, \dots, \quad \Delta^n y_i = \delta^n y_i \cdot n! h^n. \quad (8.4)$$

Теперь построим интерполирующий полином Ньютона, используя разделенные разности. Введем функцию

$$\varphi_1(x) = P(x) - P(x_0). \quad (8.5)$$

Её корнем является  $x=x_0$ , т.е.  $\varphi_1(x)$  можно представить в виде

$$\varphi_1(x) = (x - x_0) \cdot c_1(x), \quad (8.6)$$

где  $c_1(x)$  – неизвестный пока полином  $(k-1)$  порядка. Сопоставляя (8.5) и (8.6), находим, что

$$c_1(x) = \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0} \equiv \delta y, \quad (8.7)$$

т.е.  $c_1(x)$  – есть разделенная разность 1-го порядка.

Далее, введем функцию

$$\varphi_2(x) = c_1(x) - c_1(x_1). \quad (8.8)$$

Она имеет корень  $x=x_1$ , т.е. ее можно представить в виде

$$\varphi_2(x) = (x - x_1) \cdot c_2(x), \quad (8.9)$$

где  $c_2(x)$  - неизвестный пока полином  $(n-2)$  порядка. Из (8.8) и (8.9) следует, что

$$c_2(x) = \frac{c_1(x) - c_1(x_1)}{x - x_1} = \frac{\delta y - \delta y_0}{x - x_1} = \delta^2 y, \quad (8.10)$$

т.е.  $c_2(x)$  разделенная разность второго порядка. Таким образом, этот процесс можно продолжать и выразить разделенные разности низшего порядка через разделенные разности высшего порядка, как, например, это следует из (8.10):

$$c_1(x) = c_1(x_1) + (x - x_1) \cdot c_2(x), \quad (8.11)$$

Или это же равенство в обозначениях (8.1) и (8.2) переписывается в виде

$$\delta y = \delta y_0 + (x - x_1) \cdot \delta^2 y. \quad (8.12)$$

На этом этапе интерполяционный многочлен Ньютона запишется в виде (равенства (8.5), (8.6), (8.12))

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x_0) + \varphi_1(x) = y_0 + (x - x_0) \cdot c_1(x) = \\ &= y_0 + (x - x_0) \cdot \delta y_0 + (x - x_0)(x - x_1) \cdot \delta y_1. \end{aligned} \quad (8.13)$$

В этой формуле неизвестно только  $\delta^2 y = c_2(x)$ . Но эту функцию можно выразить через разделенные разности третьего порядка, а те – через разделенные разности четвертого порядка и т.д. При этом получается цепочка зацепляющихся друг за друга уравнений, подстановка которых дает окончательную (третью) формулу интерполяционного многочлена Ньютона.

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0 + (x - x_0) \cdot \delta y_0 + (x - x_0)(x - x_1) \cdot \delta^2 y_0 + \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdot \delta^3 y_0 + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \cdot \delta^n y_0. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Эту формулу можно переписать в более компактном виде

$$P(x) = y_0 + \sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^{k-1} (x - x_i) \cdot \delta^k y_0. \quad (8.16)$$

Преимуществом этой формулы по сравнению с формулой Лагранжа является то, что добавление новых узлов интерполяции не приводит к перерасчету по всей формуле заново, т.к. при этом в (8.15) добавляется еще одно слагаемое. Расчет по формуле (8.15) требует предварительного расчета разделенных разностей, которые заносятся в таблицу или в память ЭВМ. После этого легко выписать явный вид интерполяционного многочлена Ньютона и провести расчет интересующей точки.

**Пример 8.1.** Дан набор точек  $x=1; 2; 5$  и им соответствующие значения функции  $y=10; 11; 9$ . Определить значения в точках  $x=3$  и  $x=4$ .

Решение.

Составим таблицу разделенных разностей.

$n$	$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$
0	1	10	$\frac{11-10}{2-1}=1$	$\frac{1-(-2/3)}{\frac{5-1}{5}} = -\frac{5}{12}$
1	2	11		
2	5	9	$\frac{9-11}{5-2} = -\frac{2}{3}$	

В результате

$$P(x) = 10 + (x-1) \cdot 1 + (x-1)(x-2) \cdot \left(-\frac{5}{12}\right). \quad (8.16)$$

Заметим, что в таблице разделенных разностей особенно важна верхняя косая диагональ значений  $\delta y_0, \delta^2 y_0, \delta^3 y_0, \dots, \delta^n y_0$ .

Подставляя в (8.16) значения  $x = 3$  находим

$$P(3)=11.16, \text{ а для } x=4 \Rightarrow P(4)=10.5.$$

**Пример 8.2.** Опишем с помощью полученной интерполяционной формулы Ньютона функцию  $y = \cos(x)$  по четырем точкам:  $x = 0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}$ .

Решение.

Таблица разделенных разностей имеет вид:

$n$	$x$	$y$	$\delta y$	$\delta^2 y$	$\delta^3 y$
0	0	1	-0.255872	-0.423210	0.120239
1	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$			
2	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	-0.699057		
3	$\frac{\pi}{2}$	0	-0.954929	-0.244339	

Интерполяционный многочлен Ньютона запишется в виде формулы

$$P(x) = 1 - 0.255872 \cdot x - 0.423210 \cdot x \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 0.120239 \cdot x \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \left(x - \frac{\pi}{3}\right). \quad (8.17)$$

В точке  $x = \frac{\pi}{4}$   $P\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.705547$ . Точное значение

$$y = \cos \frac{\pi}{4} = 0.707106, \text{ т.е. погрешность } \Delta = \left| P\left(\frac{\pi}{4}\right) - y\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| = 0.00155.$$

Рассмотрим погрешность многочлена Ньютона. Под погрешностью будем понимать величину

$$\Delta_n = |y(x) - P_n(x)| \quad (8.18)$$

Представим разность  $y(x) - P_n(x)$  в виде

$$y(x) - P_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \cdot r(x) \quad (8.19)$$

Это возможно, т.к. в узлах интерполяции  $y(x_i) = P_n(x_i)$ .

Удобно обозначить

$$(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \equiv \prod_{k=0}^n (x - x_k) = w_n(x).$$

Тогда  $y(x) - P_n(x) = w_n(x) \cdot r(x)$ .

Рассмотрим далее новую функцию

$$q(\xi) = y(\xi) - P_n(\xi) - w_n(\xi) \cdot r(x) \quad (8.20)$$

Она имеет  $(n+2)$  корней:  $(n+1)$  – корень  $x_0, x_1, \dots, x_n$  и ещё один дополнительный корень  $\xi_{n+2} = x$ . Легко убедиться прямой подстановкой, что при этих значениях  $\xi$   $q(\xi) = 0$ . Производная  $\frac{dq}{d\xi}$  имеет  $(n+1)$ -корень

(см. §5), производная  $\frac{d^2q}{d\xi^2}$  имеет  $n$  корней. В общем случае  $\frac{d^k q}{d\xi^k}$  имеет  $(n+2-k)$  корней. Отсюда следует, что  $q^{(n+1)}(\xi)$  имеет всего один корень, который обозначим  $\xi^*$ . Итак, можно написать, что

$$\frac{d^{(n+1)}q}{d\xi^{(n+1)}} = \frac{d^{(n+1)}y}{d\xi^{(n+1)}} - \frac{d^{(n+1)}P_n(\xi)}{d\xi^{(n+1)}} - r(x) \frac{d^{(n+1)}w_n(\xi)}{d\xi^{(n+1)}}. \quad (8.21)$$

В равенстве (8.21)  $\frac{d^{(n+1)}P_n(\xi)}{d\xi^{(n+1)}}$  тождественно равно нулю, т.к.  $P(\xi)$

есть полином  $n$ -го порядка;  $\frac{d^{(n+1)}w_n(\xi)}{d\xi^{(n+1)}} = (n+1)!$ . Если ещё в (8.21)

подставим значение  $\xi = \xi^*$ , то левая часть его равна нулю ( $q^{(n+1)}(\xi^*) = 0$ ). В результате (8.21) преобразуется к виду:

$$y^{(n+1)}(\xi^*) = (n+1)! r(x). \quad (8.22)$$

Отсюда находим

$$r(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi^*)}{(n+1)!}. \quad (8.23)$$

После этого можно оценить погрешность по формуле (8.18), заменив в (8.23)  $y^{(n+1)}(\xi^*)$  на максимальное значение  $(n+1)$  производной функции  $y(x)$  на рассматриваемом участке

$$y^{(n+1)}(\xi^*) \leq |y_{\max}^{(n+1)}| \quad (8.24)$$

Таким образом

$$\Delta_n = |y(x) - P_n(x)| = |w_n(x) \cdot r(x)| = \left| w_n(x) \cdot \frac{y^{(n+1)}(\xi^*)}{(n+1)!} \right| \leq \frac{y_{\max}^{(n+1)} |w_n(x)|}{(n+1)!}, \quad \text{или}$$

окончательно

$$\Delta_n \leq \frac{|w_n(x)| \cdot |y_{\max}^{(n+1)}|}{(n+1)!} \quad (8.25)$$

**Пример 8.3.** В случае примера 8.2 этого параграфа  $y = \cos x$  четвертая производная (четыре узла интерполяции)

$$y^{(4)} = (-\sin x)^{(3)} = (-\cos x)^{(2)} = (\sin x)' = \cos x.$$

Максимальное значение  $y^{(n)}$  равно единице, следовательно  $(n=3)$

$$\Delta_3 \leq \left| \frac{\pi}{4} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \right) \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \frac{1}{4!} \right| = \frac{\pi^4}{55296} = 0.00176.$$

Видно, что это число больше вычисленного значения погрешности в примере 8.2, величина которого составила 0.00155, т.е. неравенство выполняется.

Рассмотрим нахождение корней уравнения методом обратного интерполирования, т.е. значения  $x$  удовлетворяющих равенству  $f(x) = 0$ .

Обратным интерполированием называется задача нахождения значения  $x$  по известному значению монотонной функции  $y = f(x)$ .

Эту задачу можно решить с помощью любого интерполяционного многочлена, достаточно только за независимую переменную принять  $y$ , а  $x$  считать функцией, т.е. представить  $x = \varphi(y)$ . Тогда в случае многочлена Лагранжа

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{(y - y_0)(y - y_1) \cdots (y - y_{i-1})(y - y_{i+1}) \cdots (y - y_n)}{(y_i - y_0)(y_i - y_1) \cdots (y_i - y_{i-1})(y_i - y_{i+1}) \cdots (y_i - y_n)}. \quad (8.26)$$

Чтобы решить уравнение  $f(x) = 0$  воспользуемся способом обратного интерполирования. Известно, что если функция  $f(x)$

непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и  $f(a) - f(b) < 0$ , то она имеет по крайней мере один корень<sup>4</sup>. Поэтому по заданной таблице находим такой участок  $[x_i, x_{i+1}]$ , чтобы  $y_i - y_{i+1} < 0$ , затем методом обратного интерполирования определяем значение  $x$  соответствующего  $y=0$ .

**Пример 8.4.** Способом обратного интерполирования найти корень уравнения  $\sqrt{x+1} - \frac{1}{x} = 0$  лежащий в интервале  $0.7 \leq x \leq 0.8$ .

Решение.

Вычислим значения функции в заданных точках:

$$f(0.7) = -0.13,$$

$$f(0.8) = 0.09.$$

В случае двух узлов воспользуемся формулой линейного интерполирования Лагранжа и найдем значение  $x$ , соответствующее  $y=0$ .

$$x = x_0 \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} + x_1 \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = 0.7 \frac{0 - 0.09}{-0.13 - 0.09} + 0.08 \frac{0 + 0.13}{0.09 + 0.13} = 0.759.$$

Таким образом, приближенное значение корня уравнения  $\sqrt{x+1} - \frac{1}{x} = 0$  равно  $x \approx 0.759$ . Для более точного нахождения корня можно построить большее количество значений  $x$  в узлах интерполяции  $0.7 \leq x \leq 0.8$  путем вычисления  $\sqrt{x+1} - \frac{1}{x} = 0$ .

После этого по большему количеству точек строится интерполяционный многочлен  $P_n(y)$  (по любой из рассматриваемых выше формул) и находится значение  $\tilde{x} = P_n(0)$ , которое является приближенным корнем.

**Пример 8.5.** Решить уравнение  $x^3 + 2 = 0$ .

Решение.

Возьмем  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = -1.2$ ,  $x_2 = -1.4$ . Значения  $y = x^3 + 2$  им соответствующие:  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = 0.272$ ,  $y_2 = -0.744$ . Значение корня  $\tilde{x}$  лежит в интервале  $[-1.2, -1.4]$ . Будем использовать интерполяционный многочлен Ньютона для неравноотстоящих узлов. Таблица разделенных разностей имеет вид

---

<sup>4</sup> Теорема Больцано-Коши: если  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и  $A = f(a)$ ,  $B = f(b)$ , то для любого  $c \in [a, b]$  существует  $\xi \in [a, b]$  такое, что  $f(\xi) = c$ .

$n$	$y_n$	$x_n$	$\delta x$	$\delta^2 x$
0	1	-1	$\frac{-1+1.2}{1-0.272} = 0.274$	$\frac{0.274-0.196}{1+0.744} = -0.044$
1	0.272	-1.2		
2	-0.744	-1.4	$\frac{1.2-1.4}{-0.744-0.272} = 0.196$	

Таким образом,  $P_3(y) = -1 + 0.274(y-1) - 0.044(y-1) \cdot (y-0.272)$ . В точке  $y=0$   $P_3(0) = -1.285$ . Точное значение  $\tilde{x} = \sqrt[3]{-2} = -1.2598$ , и  $\Delta = 0.0261$ .

### **§9. Решение алгебраических и трансцендентных уравнений методом итераций.**

В практических вычислениях часто приходится решать уравнение вида

$$f(x) = 0. \quad (9.1)$$

В частном случае, когда функция  $f(x) = 0$  представляет собой полином первой, второй, третьей или четвертой степени, существует аналитическое решение уравнения. В других же случаях, когда  $f(x)$  - полином степени выше четвертой или трансцендентная функция, приходится обращаться к методам численного решения уравнения вида (9.1), которые позволяют отыскать приближенные значения корней этого уравнения. При этом приходится решать три задачи:

- 1) Исследование количества, характера и расположения корней;
- 2) Отделение корней, т.е. отыскания достаточно малых областей, в каждой из которых заключен один и только один корень уравнения;
- 3) Вычисление корней с заданной точностью.

Первая и вторая задачи часто объединяются и решаются графическими и аналитическими методами. Иногда приближенное значение корня уравнения  $f(x) = 0$  известно из физических соображений. Если же оно неизвестно, то его находят с помощью грубого анализа функции  $y = f(x)$ . При графическом методе отделения корней строят график функции  $y = f(x)$  и находят точки его пересечения с осью абсцисс.

Иногда удается заменить уравнение (9.1) эквивалентным ему уравнением  $\varphi(x) = \psi(x)$ , в котором функция  $y_1 = \varphi(x)$  и  $y_2 = \psi(x)$  имеют несложные графики. Абсциссы точек пересечения этих графиков будут корнями исходного уравнения. Графический способ отделения корней нагляден и дает неплохие приближенные значения.

Например, надо решить уравнение

$$x^5 - x + 1 = 0. \quad (9.2)$$

Представим его в виде  $x^5 = x - 1$ , что позволяет ввести две функции  $y_1 = x^5$  и  $y_2 = x - 1$ . Обе функции простые и легко строятся графически.

Из рис. 9.1 видно, что обе кривые пересекаются в точке  $A$ , т.е. уравнение (9.2) имеет один действительный корень  $x_1$ , который отрицателен и меньше  $-1$ . Остальные четыре корня комплексные.

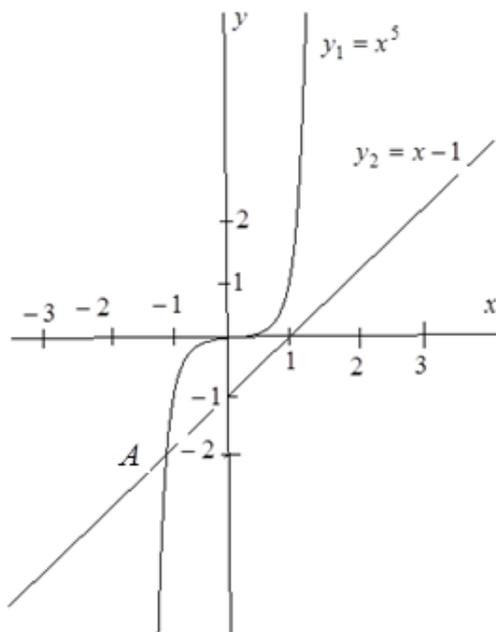


Рис. 9.1

Аналитически корни уравнения  $f(x) = 0$  можно отделить, используя следующие свойства функции:

- 1) Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то на этом отрезке всегда имеются точки, в которых она принимает наибольшее и наименьшее значение. Этим значениям функция достигает или в критических точках (когда  $f'(x) = 0$ ), или на концах отрезка;
- 2) Если на концах некоторого отрезка непрерывная функция  $f(x)$  принимает значения разных знаков, то на этом отрезке уравнение  $f(x) = 0$  имеет хотя бы один корень.

Поэтому для отделения корней можно воспользоваться следующей схемой:

- 1) Найти первую производную  $f'(x)$ ;
- 2) Составить таблицу знаков функции  $f(x)$ , полагая  $x$  равным:
  - а. критическим значениям или ближайшим к ним;

в. граничным значениям (исходя из области допустимых значений неизвестного).

3) Определить наименьшие интервалы, на которых функция принимает значения противоположных знаков. Внутри этих интервалов содержится только по одному корню.

**Пример 9.1.** Отделить корни уравнения  $3x - 4\ln x - 5 = 0$  аналитическим методом.

Решение.

Обозначим  $f(x) = 3x - 4\ln x - 5 = 0$ . Область изменения  $x$ :  $0 < x < \infty$ .

Найдем первую производную:

$$f'(x) = 3 - \frac{4}{x}, \quad (9.3)$$

и из (9.3) определяем корень производной  $x=1.33$ . Составляем таблицу знаков функции  $f(x)$ , полагая  $x$  равным критическим значениям (корням производной) или ближайшим к ним величинам, а также граничным значениям.

$x$	0	1	2	$\infty$
$\text{sign } f(x)$	-	-	-	+

Из этой таблицы видно, что уравнение имеет по крайней мере один корень, так как происходит одна перемена знака. Для уточнения корня составим таблицу с более мелким интервалом изоляции корня (в области изменения знака).

$x$	0	1	2	3	4	$\infty$
$\text{sign } f(x)$	-	-	-	-	+	+

Из этой таблицы видно, что корень уравнения заключен в промежутке (3,4).

Рассмотренные методы отделения корня применимы к любым уравнениям, как алгебраическим, так и трансцендентным. Для алгебраических уравнений, кроме того, существуют свои методы отделения корней.

Если уравнение  $f(x) = 0$  является алгебраическим уравнением  $n$ -ой степени

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad (9.4)$$

то такое уравнение имеет  $n$  корней, среди которых присутствуют действительные и комплексные корни.

Наша задача состоит в отделении действительных корней.

Если  $a_0 > 0$  и  $a_k$  – первый из отрицательных коэффициентов, тогда за верхнюю границу положительных корней уравнения (9.4) может быть принято число  $C = 1 + k \sqrt[k]{\frac{a}{a_0}}$ , где  $a$  – модуль наибольшего из отрицательных коэффициентов.

Для нахождения нижней границы положительных корней следует сделать замену  $x \Rightarrow \frac{1}{x}$ . Тогда получим новое уравнение

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0. \quad (9.5)$$

Если  $C$  – верхняя положительная граница корней уравнения (9.5), то нижняя граница корней уравнения (9.4) равна  $r = \frac{1}{C}$ .

Для определения границ отрицательных корней достаточно рассмотреть уравнение  $f(-x) = 0$ .

**Пример 9.2.** Найти нижнюю и верхнюю границы положительных и отрицательных действительных корней уравнения

$$3x^8 - 5x^7 - 6x^3 - x - 9 = 0. \quad (9.6)$$

Решение.

Верхняя граница положительных действительных корней:

$$C = 1 + \frac{9}{3} = 4, \text{ т.к. максимальный модуль } |a_i| \neq a_8 \neq 9.$$

Нижняя граница положительных корней отыскивается для вспомогательного уравнения:

$$x^8 \left( \frac{3}{x^8} - \frac{5}{x^7} - \frac{6}{x^3} - \frac{1}{x} - 9 \right) = 0, \quad (9.7)$$

которое имеет вид

$$9x^8 + x^7 + 6x^5 + 5x - 3 = 0. \quad (9.8)$$

Из него находим

$$C = 1 + \sqrt[8]{\frac{3}{9}} = 1.84,$$

т.е.  $r = \frac{1}{C} = 0.53$ . Окончательно можно утверждать, что положительные корни уравнения (9.6) заключены в пределах  $0.53 < x < 4$ .

Верхняя граница отрицательных действительных корней отыскивается для вспомогательного уравнения

$$3x^8 + 5x^7 + 6x^3 + x - 9 = 0, \quad (9.9)$$

где для него получаем  $C = 1 + \sqrt[8]{\frac{9}{3}} = 2.15$ .

Нижняя граница отрицательных действительных корней отыскивается для вспомогательного уравнения

$$9x^8 - x^7 - 6x^5 - 5x - 3 = 0, \quad (9.10)$$

которое дает  $C = 1 + \frac{6}{9} = 1.66$ , т.е.  $r = \frac{1}{c} = 0,6$ , и в результате чего отрицательные корни уравнения находятся на отрезке  $-2.15 \leq x \leq -0.6$ .

Итак, при решении уравнения (9.6) необходимо исследовать отрезки  $[-2.15, -0.6]$  и  $[0.53, 4]$ .

Для решения третьей задачи, т.е. вычисления корней уравнения с заданной точностью, существует много разных численных методов. Рассмотрим один из них, предполагая при этом, что отрезок  $a \leq x \leq b$ , внутри которого существует один и только один корень, уравнения, известен.

### 9.1 Метод итераций

Уравнение (9.1) представим в виде

$$x = \varphi(x). \quad (9.11)$$

Сделать это можно многими способами. Покажем два из них.

- 1) Выделить из уравнения (9.11)  $x$ , а остаток перенести в правую часть (это и будет  $\varphi(x)$ ).
- 2) Заменить уравнение (9.11) равносильным ему уравнением

$$x = x - g(x) \cdot f(x), \quad (9.12)$$

где произвольная функция  $g(x) \neq 0$  и непрерывна на отрезке  $[a, b]$ .

Выберем на отрезке  $[a, b]$  произвольную точку  $x_0$  – нулевое приближение, и примем в качестве первого приближения

$$x_1 = \varphi(x_0). \quad (9.13)$$

В качестве второго приближения положим

$$x_2 = \varphi(x_1), \quad (9.14)$$

и т.д. Для  $n$ -го приближения получим

$$x_n = \varphi(x_{n-1}). \quad (9.15)$$

Этот метод последовательного вычисления чисел  $x_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) по формуле (9.15) называется методом итераций.

**Теорема.** Последовательность  $x_n = \varphi(x_{n-1})$  сходится к корню  $x^*$  уравнения  $x = \varphi(x)$ , если для любых  $x'$  и  $x''$  принадлежащих  $[x^* - \delta, x^* + \delta]$  выполняется условие Липшица

$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq \alpha |x' - x''|$ ,  $|\alpha| < 1$ , а  $x_0 \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$ . Число  $x^*$  при этом является единственным корнем уравнения на указанном отрезке.

Рассмотрим разность  $|x_{n+1} - x^*| = |\varphi(x_n) - \varphi(x^*)|$ . По условию теоремы  $|\varphi(x_n) - \varphi(x^*)| < |x_n - x^*|$ , т.е.

$$|x_{n+1} - x^*| < |x_n - x^*| < \dots < |x_0 - x^*|. \quad (9.16)$$

Отсюда следует, что  $|x_n - x^*| \leq \alpha^n |x_0 - x^*| \leq \alpha^n \cdot \delta$ , т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x^*| = 0, \text{ или } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

Аналогичным условием сходимости итерационного процесса является неравенство

$$|\varphi'(x)| \leq q, \quad q \in [0, 1) \text{ для } \forall x \in [x^* - \delta, x^* + \delta]. \quad (9.17)$$

**Пример 9.3.** Решить уравнение  $x^2 - 10 = 0$ .

Решение.

Корни уравнения находятся в окрестности  $U(\pm 3, 0.2)$ . Если искать решение в виде  $x = \frac{10}{x}$ , т.е.  $\varphi(x) = \frac{10}{x}$ , то итерационный процесс не сходится, т.к.  $|\varphi'(x)| = \frac{10}{x^2} > 1$  в окрестностях  $\pm 3$ . Это можно показать и методом прямой подстановки.

$$x_0 = 3, \quad x_1 = 3.333, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 3.333, \quad x_4 = 3, \quad \dots$$

Видно, что эта последовательность не сходится.

Если уравнение  $x^2 - 10 = 0$  запишем в виде

$$x = x - \frac{x^2 - 10}{10}, \quad (9.18)$$

то легко показать, что (9.18) эквивалентно  $x^2 - 10 = 0$ .

В (9.18)  $\varphi(x) = x - \frac{x^2 - 10}{10}$ ,  $\varphi'(x) = 1 - \frac{x}{5}$ . При  $x = 3$   $|\varphi'(x)| = 0.4$ , при  $x \in (0, 10)$   $|\varphi'(x)| < 1$  и процесс должен сходиться. Действительно, прямой расчет дает:

$$x_0 = 3, \quad x_1 = 3.1000, \quad x_2 = 3.13900, \quad x_3 = 3.15366, \quad x_4 = 3.159105.$$

Точное значение  $x = \sqrt{10} = 3.16227$ .

Обсудим точность метода и найдем количество необходимых шагов итераций.

Пусть мы ограничиваемся  $n$ -ым шагом итерации, т.е.  $x_n = \varphi(x_{n-1})$ . При этом требуемая точность, или предельная абсолютная погрешность

$\Delta = |x_n - \tilde{x}|$ , где  $\tilde{x}$  - точное значение корня, который мы не знаем, задана. Например,  $\Delta = 10^{-4}$ . Считая, что  $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ , можно написать цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} |x_1 - x_0| &\leq \Delta x_0; & |x_2 - x_1| &\leq \Delta x_0 \cdot q; & |x_3 - x_2| &\leq \Delta x_0 \cdot q^2; \dots \\ \dots; & & |x_n - x_{n-1}| &\leq \Delta x_0 \cdot q^{n-1} \end{aligned} \quad (9.19)$$

Напишем очевидное равенство

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= (x_{n+p} - x_{n+p-1}) + (x_{n+p-1} - x_{n+p-2}) + \\ &+ (x_{n+p-2} - x_{n+p-3}) + \dots + (x_{n-1} - x_n). \end{aligned} \quad (9.20)$$

Переходя в (9.20) к модулям и учитывая (9.19), получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &\leq (x_{n+p} - x_{n+p-1}) + (x_{n+p-1} - x_{n+p-2}) + \\ &+ (x_{n+p-2} - x_{n+p-3}) + \dots + (x_{n-1} - x_n) \leq \Delta x_0 \cdot (q^{n+p-1} + q^{n+p-2} + \\ &\dots + q^n) = \Delta x_0 q^n (1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{p-1}). \end{aligned} \quad (9.21)$$

Перейдем в (9.21) к пределу  $p \rightarrow \infty$ . При этом

$$\lim_{p \rightarrow \infty} |x_{n+p} - x_n| = |\tilde{x} - x_n| = \Delta x_0 \cdot q^n \cdot \frac{1}{1-q}. \quad (9.22)$$

Тут мы использовали формулу для суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии. Из (9.22) следует

$$\Delta x_0 \cdot q^{n-1} = \frac{|\tilde{x} - x_n| \cdot (1-q)}{q} \leq \Delta \cdot \frac{(1-q)}{q}. \quad (9.23)$$

Подставляя (9.23) в последнее неравенство (9.19), получаем

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1-q}{q} \Delta. \quad (9.24)$$

Обсудим роль производной функции  $q(x)$ . Она вводится исключительно для того, чтобы производная  $|\varphi(x)|$  в области поиска корня была меньше единицы. Если известны нижняя и верхняя границы производной  $f'(x)$  в исследуемом интервале

$$0 < m \leq f'(x) \leq M,$$

то в качестве  $q(x)$  можно взять величину  $q(x) = \frac{2 \cdot f(x)}{m + M}$  и исходное уравнение  $f(x) = 0$  сведется к виду

$$x = x - \frac{2 \cdot f(x)}{m + M} \quad (9.25)$$

Видно, что производная правой части равна

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{2 \cdot f'(x)}{m + M} \geq 1 - \frac{2 \cdot M}{m + M} = \frac{m - M}{m + M} \quad (9.26)$$

Но  $\left| \frac{m-M}{m+M} \right| < 1$ , следовательно  $|\varphi'(x)| < 1$ .

**Пример 9.4.** Найти корни уравнения  $x = \cos 2x$ .

Решение.

Вначале графически определяем область корней, рисуя на графике кривые  $y_1 = x$  и  $y_2 = \cos 2x$ .

Из рис. 9.2 видно, что имеется один корень  $0 < \tilde{x} < \frac{\pi}{4}$ . Если взять

$\varphi(x) = \cos 2x$ , то  $|\varphi'(x)| = 2/|\sin 2x|$ , что при  $x = \frac{\pi}{4}$  больше единицы.

Возьмем  $\varphi(x)$  в виде  $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{3} = x - \frac{x - \cos 2x}{3}$ . Это дает

$\varphi'(x) = 1 - \frac{1 + 2 \sin 2x}{3}$ , т.е. на концах интервала поиска  $|\varphi'(0)| = \frac{2}{3}$ ,

$$\left| \varphi'\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| = 0.$$

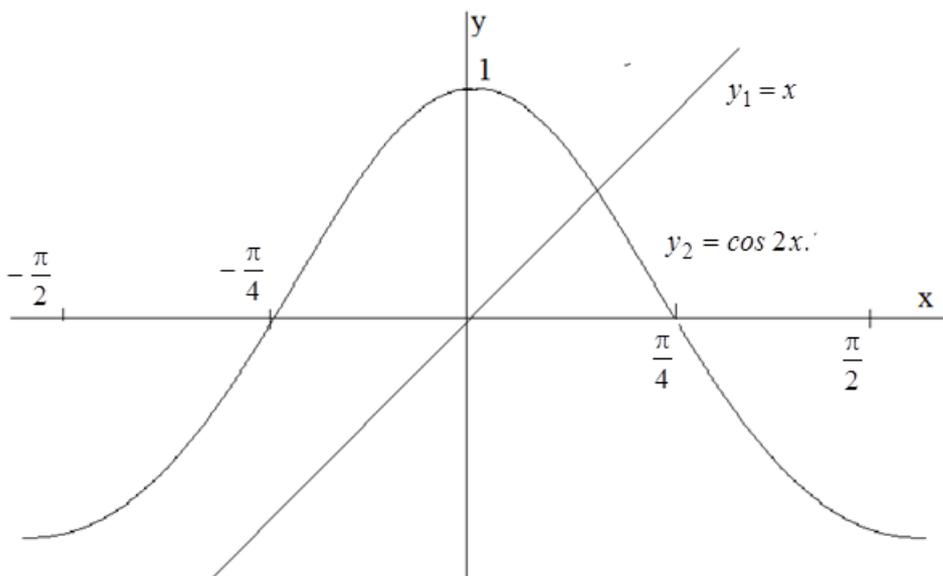


Рис. 9.2

Пусть точность определения корня  $\Delta = 10^{-3}$ , тогда, исходя из условия

$$(9.24) \quad \left(q = \frac{2}{3}\right), \quad |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 2} \cdot 10^{-3} = 0.0005 = 5 \cdot 10^{-4}.$$

Решаем уравнение  $x = x - \frac{x - \cos 2x}{3}$ , взяв  $x_0 = \frac{\pi}{4} = 0.78539$ .

Результаты последовательных шагов итерации следующие:

$$x_1 = 0.523598, \quad \Delta x_0 = |x_1 - x_0| = 0.262; \quad x_2 = 0.515732, \quad \Delta x_1 = |x_2 - x_1| = 0.007866;$$

$$x_3 = 0.515009, \quad \Delta x_2 = |x_3 - x_2| = 0.000724 = 7.2 \cdot 10^{-4}; \quad x_4 = 0.514940, \quad \Delta x_3 = |x_4 - x_3| =$$

$=0.000069=6.9 \cdot 10^{-5}$ . Видно, что на этом шаге процесс поиска корня можно прекратить, т.к.

$$|x_4 - x_3| = 6.9 \cdot 10^{-5} < \frac{1-q}{q} \Delta = 5 \cdot 10^{-4}.$$

Итак, корень уравнения  $x = \cos 2x$  с точностью  $\Delta = 10^{-3}$ , равен  $\tilde{x} = 0.5149$ .

### **§10. Решение уравнений с одним неизвестным методом Ньютона (методом касательных)**

Пусть уравнение  $f(x) = 0$  имеет один корень на отрезке  $[a, b]$ , причем  $f'(x)$  и  $f''(x)$  определены, непрерывны и сохраняют постоянные знаки на отрезке  $[a, b]$ . Возьмем некоторую точку  $x_0$  отрезка  $[a, b]$  и проведем в точке  $P_0(x_0, f(x_0))$  графика функции касательную к кривой  $y=f(x)$  до пересечения с осью  $Ox$  (рис. 10.1)

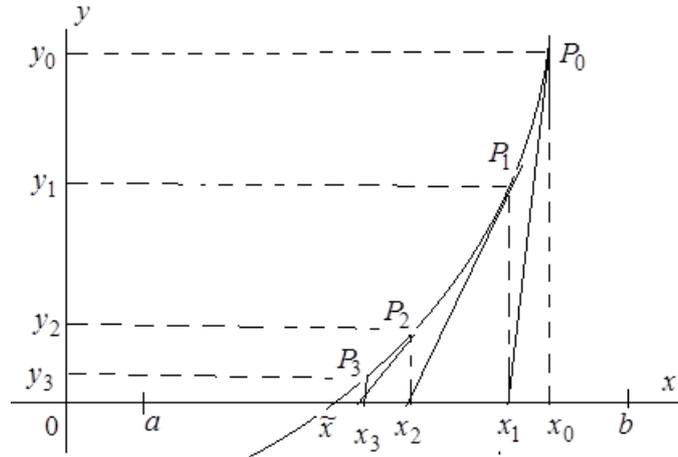


Рис. 10.1

Абсциссу  $x_1$  точки пресечения можно взять в качестве приближенного значения корня. Проведем касательную через точку  $P_1(x_1, f(x_1))$  и, находя точку пересечения новой касательной с осью  $Ox$ , получим второе приближение корня  $x_2$ . Аналогично определяются последующие приближения корня.

Выведем формулу для последовательных приближений к корню этим способом. Уравнение касательной, проходящей через точку  $P_0$  имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (10.1)$$

Полагая  $y=0$  находим абсциссу  $x_1$  точки пересечения касательной с осью  $Ox$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \quad (10.2)$$

Следующее приближение находим соответственно по формулам

$$\begin{aligned}
 x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \\
 &\dots\dots\dots, \\
 x_n &= x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}
 \end{aligned}
 \tag{10.3}$$

Процесс вычислений прекращается при выполнении условия

$$|x_n - x_{n-1}| < \sqrt{\frac{2 \cdot m_1 \cdot \Delta}{M_2}}, \tag{10.4}$$

где  $m_1$  – наименьшее значение  $|f'(x)|$  на отрезке  $[a, b]$ ,  $M_2$  – наибольшее значение  $|f''(x)|$  на отрезке  $[a, b]$ . При этом условии будет выполнено неравенство

$$|\tilde{x} - x_n| \leq \Delta, \tag{10.5}$$

где  $\Delta$  - заданная предельная абсолютная погрешность корня  $\tilde{x}$ .

Заметим, что если  $\frac{2m_1}{M_2} \geq 10^{-2}$ , то неравенство (10.4) выполняется,

если  $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-1} \cdot \sqrt{\Delta}$ . Например, при  $\Delta=10^{-6}$  вместо (10.4) можно пользоваться более простым соотношением  $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ .

Начальное приближение корня  $x_0$  целесообразно выбирать так, чтобы выполнялось условие

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0. \tag{10.6}$$

В другом случае сходимость метода Ньютона не гарантируется. Чаще всего выбирают  $x_0=a$ , или  $x_0=b$ , в зависимости от того, для какой из этих точек выполняется условие (10.6).

Метод Ньютона эффективен для решения таких уравнений  $f(x) = 0$ , для которых значения модуля производной  $|f'(x)|$  близ корня достаточно велико, т.е. график функции в окрестности данного корня имеет большую крутизну.

**Пример 10.1.** Решить уравнение  $tg(0.5x + 0.2) = x^2$  с точностью  $\Delta=10^{-3}$ . Корни отделить графически.

Решение.

1. Отделим корни. Для этого построим графики двух функций (см. рис. 10.2)

$x$	$y_1 = x^2$	$y_2 = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{5}\right)$
0	0	0.203
0.4	0.16	0.423
0.6	0.36	0.546
0.8	0.64	0.684
1.0	1.0	0.842

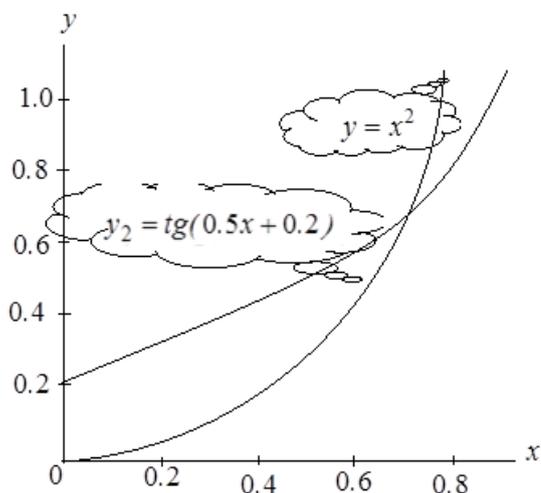


Рис. 10.2

Уравнение имеет корень, лежащий на отрезке  $[0.7; 0.9]$ .

2. Чтобы выбрать точку начального приближения, уточним знаки функции на концах отрезка  $[0.7; 0.9]$ , вычислим значение 2-ой производной:

$$f(0.7) = \operatorname{tg}(0.55) - 0.49 = 0.123,$$

$$f(0.9) = \operatorname{tg}(0.65) - 0.81 = -0.05,$$

$$f'(x) = \frac{0.5}{\cos^2(0.5x + 0.2)} - 2x,$$

$$f''(x) = -\frac{0.5 \sin(0.5x + 0.2)}{\cos^3(0.5x + 0.2)} - 2.$$

На отрезке  $[0.7; 0.9]$   $f''(x) < 0$ , и условие  $f(x_0) \cdot f'(x) > 0$  выполняется в точке  $x_0 = 0.9$ . Вычисления будем проводить по формуле  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ .

$n$	$x_n$	$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{5}\right)$	$x_n^2$	$f(x_n)$	$\cos^2\left(\frac{x_n}{2} + \frac{1}{5}\right)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	0.9	0.7602	0.81	-0.0498	0.6337	-1.012	0.0496
2	0.8507	0.7219	0.7237	-0.0079	0.6573	-1.044	0.00756
3	0.8431	0.7163	0.7108	0.0055	0.6608	-0.9227	-0.0059
4	0.8491	0.7207	0.7298	-0.0001	0.6581	-0.9383	0.0001
5	0.8490						

Ответ:  $x \approx 0.849$ .

**Пример 10.2.** Решить уравнение  $2 \lg x - \frac{x}{2} + 1 = 0$  методом Ньютона с

точностью  $\Delta = 10^{-3}$ . Корни отделить аналитическим методом.

Решение.

1. Отделим корни. Для этого найдем корень производной.

$$f'(x) = \frac{2}{x \ln 10} - \frac{1}{2} = \frac{0.868}{x} - \frac{1}{2}, \text{ который равен } x = 1.736$$

Составим таблицу знаков функции, учитывая, что область изменения  $x$  есть  $0 < x < \infty$ .

$x$	1	2	3	4	5	$+\infty$
$\text{sign } f(x)$	+	+	+	+	-	-

Из этой таблицы следует, что уравнение имеет единственный корень на отрезке [4; 5].

2. Для того, чтобы выбрать начальную точку приближения, определяем знаки функции на концах отрезка [4; 5] и знак второй производной:

$$f(4) = 2 \lg 4 - 2 + 1 = 0.2 > 0,$$

$$f(5) = 2 \lg 5 - 2.5 + 1 = -0.102 < 0,$$

$$f'(x) = \frac{2}{x \lg 10} - \frac{1}{2} = \frac{0.868}{x} - \frac{1}{2},$$

$$f''(x) = \frac{-0.868}{x^2}.$$

На отрезке [4; 5]  $f''(x) < 0$ , поэтому за начальную точку  $x_0$  принимаем  $x_0 = 5$ , т.к.  $f(5) \cdot f''(5) > 0$ .

Вычисления приведены в таблице:

$n$	$x_n$	$2 \cdot \lg x_n$	$\frac{x_n}{2}$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	5	1.3979	2.5	-0.102	-0.3264	0.3125
2	4.6875	1.3419	2.3437	-0.0018	-0.3148	0.0571
3	4.6504	1.3312	2.3152	0.016	-0.3125	-0.0512
4	4.6816	1.3407	2.3408	-0.0001	-0.3146	0.0
5	4.6816					

Ответ:  $x \cong 4.6816$ .

### **§11. Метод хорд и касательных**

Метод хорд и касательных обычно дает более быструю сходимость нежели отдельно метод касательных или метод хорд. Этот метод состоит в одновременном использовании метода касательных и метода хорд.

Пусть дано уравнение  $f(x) = 0$ , корень  $\tilde{X}$  отделен и находится на отрезке  $[a, b]$ . Метод хорд и касательных можно применять, учитывая тип графика функции (см. рис. 11.1).

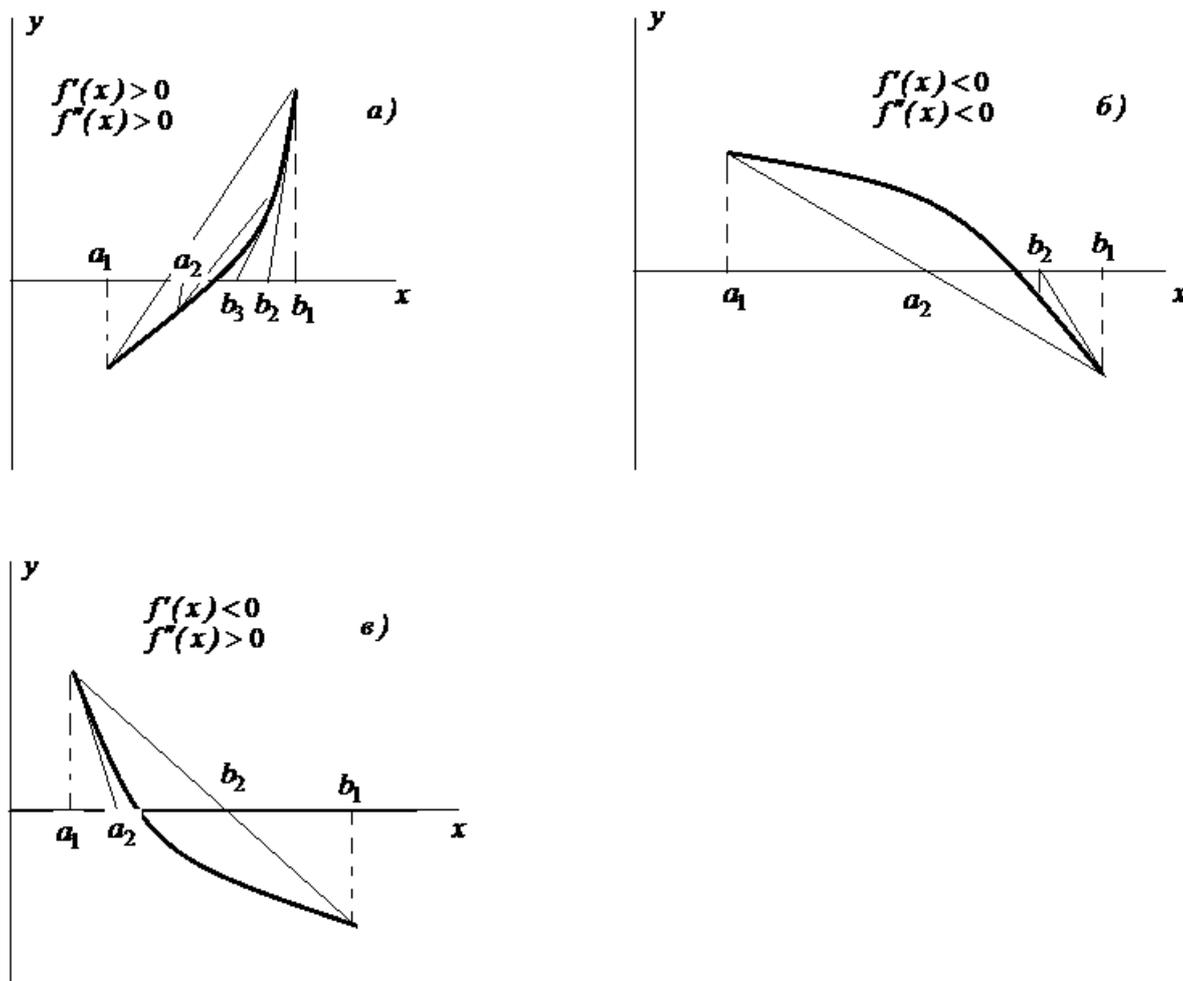


Рис. 11.1

Рассмотрим подробнее случай а) и б), когда  $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ . В этом случае метод хорд дает приближение корня с недостатком или приближение корня слева, а метод касательных с избытком или приближение корня справа.

Проведем через точки  $(a_1, f(a_1))$  и  $(b_1, f(b_1))$  прямую. Её уравнение

будет:  $\frac{y - f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)} = \frac{x - a_1}{b_1 - a_1}$ . Найдём значение  $x = a_2$ , для которого

$$y = 0: a_2 = a_1 - \frac{b_1 - a_1}{f(b_1) - f(a_1)} \cdot f(a_1).$$

Эта формула носит название формулы хорд. Теперь корень  $\tilde{X}$  находится внутри отрезка  $[a_2, b_1]$ .

Проведем через точку  $(b_1, f(b_1))$  касательную к кривой  $y = f(x)$ . Её уравнение имеет вид  $y - f(b_1) = f'(b_1) \cdot (x - b_1)$ .

Найдем уточненную правую границу интервала изоляции корня (абсцисса точки пересечения касательной с осью  $Ox$ ).

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)}.$$

Таким образом, интервал изоляции корня будет:  $x \in [a_2, b_2]$ .

Снова проводим через точки  $(a_2, f(a_2))$  и  $(b_2, f(b_2))$  прямую

$$\frac{y - f(a_2)}{f(b_2) - f(a_2)} = \frac{x - a_2}{b_2 - a_2}, \text{ а через точку } (b_2, f(b_2)) \text{ - касательную}$$

$$y - f(b_2) = f'(b_2) \cdot (x - b_2).$$

Точки пересечения прямой и касательной с осью  $Ox$  дадут новые уточненные границы интервала изоляции корня  $[a_3, b_3]$  и вообще:

$$b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)}; \quad a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}.$$

Сужение интервала изоляции следует производить до тех пор, пока  $b_n - a_n < \Delta$ . За значение следует взять среднее арифметическое полученных

границ интервала изоляции корня  $\tilde{X} = \frac{b_n + a_n}{2}$ . В случае, когда

$f'(x) \cdot f''(x) < 0$  (рис. 11.1 в) приближения корней выполняются по

формулам: слева – по методу касательных  $a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$ , справа – по

методу хорд:  $b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$ .

**Пример 11.1.** Решить уравнение  $\operatorname{tg}(0.5x + 0.2) = x^2$  методом хорд и касательных с точностью  $\Delta = 10^{-3}$ .

Решение.

Интервал отделения корня определен и равен  $0.7 < x < 0.9$ . Значения функции на концах отрезка и знаки первой и второй производных равны:

$$f(0.7) = 0.123, \quad f(0.9) = -0.05,$$

$$f'(x) = \frac{0.5}{\cos^2(0.5x - 0.2)} - 2x; \quad f'(x) > 0;$$

$$f''(x) = -\frac{0.5 \sin(0.5x + 0.2)}{\cos^3(0.5x + 0.2)} - 2; \quad f''(x) < 0.$$

Т.к.  $f'(x) \cdot f''(x) < 0$ , то для расчетов применяем формулы:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} = a_n - h_{a_n}, \quad b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)} = b_n - h_{b_n}.$$

Вычисления приведены в таблице:

n	$a_n$	$b_n$	$b_n - a_n$	$F(a_n)$	$F(b_n)$	$F'(a_n)$	$h_{a_n}$	$h_{b_n}$
1	0.7	0.9	0.2	0.123	-0.05	-0.71	-0.175	0.0057
2	0.373	0.8943	0.0213	-0.023	-0.044	-0.972	0.02367	0.0446
3	0.8494	0.8496	0.0002					

Ответ:  $\tilde{X} \cong \frac{(a_n + b_n)}{2} = 0.8496$ , т.е. понадобилось всего две итерации,

чтобы получить значение корня с заданной точностью, тогда как методом Ньютона к заданной степени точности потребовало четыре итерации.

### **§12. Метод половинного деления (дихтомии)**

Дано уравнение

$$f(x) = 0, \quad (12.1)$$

где функция  $f(x) = 0$ , непрерывна на  $[a, b]$  и  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Если вид функции  $f(x)$  достаточно сложный, то вычисление функций  $f'(x)$  в методе Ньютона и  $f''(x)$ , необходимой для оценки сходимости в методе итераций, затруднительно. Для решения таких уравнений можно использовать метод половинного деления, который хотя и требует значительного объема вычислительной работы, но всегда приводит к искомому результату.

Для нахождения корня уравнения (12.1), принадлежащего отрезку  $[a, b]$  делим отрезок пополам, т.е. выбираем начальное приближение  $x_0 = \frac{a+b}{2}$ .

Если  $f(x_0) = 0$ , то  $x_0$  является корнем уравнения. Если  $f(x) \neq 0$ , то выбираем отрезок  $[a, x_0]$  или  $[x_0, b]$  на концах которого функция  $f(x)$  имеет противоположные знаки. Полученный отрезок снова делим пополам и проводим то же рассмотрение. Процесс деления отрезка пополам продолжается до тех пор, пока длина отрезка, на концах которого функция имеет противоположные знаки, не будет меньше наперед заданного числа  $\Delta$ , которое является погрешностью данного метода.

**Пример 12.1.** Решить уравнение  $2^x - 5x + 4 = 0$  методом дихтомии с точностью  $\Delta = 10^{-2}$ , предварительно отделив корни аналитическим методом.

Решение.

Отделяем корни, для чего находим корень производной:



Методы решения систем линейных уравнений можно разделить на точные (конечные) и итерационные (бесконечные). Точные или прямые методы дают точное решение (с точностью до ошибок округления) с помощью конечного числа арифметических операций. В итерационных методах для получения точного решения необходимо произвести бесконечное число арифметических операций. Так как это невозможно, то в итерационных методах всегда присутствует ошибка ограничения.

Система вида (13.1) называется системой  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными, где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называются неизвестными системы, а  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$  - коэффициенты при неизвестных системы,  $b_1, b_2, \dots, b_n$  - свободные члены системы.

Кратко система (13.1) может быть записана в виде:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (13.2)$$

или, если пользоваться матричными обозначениями:

$$A \cdot X = B, \quad (13.3)$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (13.4)$$

При рассмотрении произвольной системы линейных уравнений (13.1) нельзя заранее сказать, будет ли такая система иметь единственное решение, бесконечное множество решений или совсем не иметь решения.

Пусть дана система линейных уравнений. Для простоты рассмотрим систему третьего порядка.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (13.5)$$

Введем следующие обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Здесь  $\Delta$  - определитель системы, а  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  - определители, получающиеся в результате замены столбцов коэффициентов при соответствующем неизвестном столбцом свободных членов.

Чтобы система (13.5) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы не был равен нулю ( $\Delta \neq 0$ ).

Система в этом случае называется линейно независимой или определенной (или еще называют невырожденной) и решается с помощью методов линейной алгебры. Например, решение системы по формулам Крамера для случая (13.5) имеет вид:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \quad (13.6)$$

Определитель системы (13.1) равен сумме всех произведений элементов какой-либо строки или столбца на соответствующее алгебраическое дополнение

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in},$$

если раскрыть определитель по  $i$ -той строке, или  $\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$ , если раскрыть определитель по  $j$ -тому столбцу.

Алгебраическое дополнение можно вычислить через минор  $M_{ij}$ , если ему присвоить знак «+» или «-» в зависимости от суммы номеров строк и столбцов, на пересечении которых находится соответствующий этому номеру элемент, т.е.  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ . Минором в данном случае будет служить определитель, получающийся вычеркиванием  $i$ -той строки и  $j$ -того столбца.

Но вычисление определителей очень трудоемкий процесс, и чтобы решить систему, например, 10-го порядка, необходимо вычислить 11 определителей 10-го порядка. Для этого надо произвести  $11 \times 10 \times 9$  операций умножения и столько же операций сложения. Поэтому для решения систем линейных уравнений больших порядков необходимо иметь соответствующий ресурс времени для вычислений, зависящий от производительности вычислительного устройства. Поэтому ясно, что для решения больших систем линейных уравнений использование метода Крамера является неэффективным по времени.

### Пример 13.1

Решить систему линейных уравнений по методу Крамера.

$$\begin{cases} 1.2x_1 - 0.2x_2 + 0.3x_3 = -0.6 \\ -0.2x_1 + 1.6x_2 - 0.1x_3 = 0.3 \\ -0.3x_1 + 0.1x_2 - 1.5x_3 = 0.4 \end{cases}$$

### Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1.2 & -0.2 & 0.3 \\ -0.2 & 1.6 & -0.1 \\ -0.3 & 0.1 & -1.5 \end{vmatrix} = 1.2(-1.6 \cdot 1.5 + 0.01) + 0.2(0.3 - 0.03) + 0.3(-0.2 + 0.48) = -2.676,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -0.6 & -0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 1.6 & -0.1 \\ 0.4 & 0.1 & -1.5 \end{vmatrix} = -0.6(-2.39) + 0.2(-0.41) + 0.3(-0.61) = 1.169,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1.2 & -0.6 & 0.3 \\ -0.2 & 0.3 & -0.1 \\ -0.3 & 0.4 & -1.5 \end{vmatrix} = 1.2(-0.41) + 0.6(0.27) + 0.3(0.01) = -0.329,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1.2 & -0.2 & -0.6 \\ -0.2 & 1.6 & 0.3 \\ -0.3 & 0.1 & 0.4 \end{vmatrix} = 1.2(0.61) + 0.2(0.01) - 0.6(0.46) = 0.458.$$

Откуда получаем:  $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1.169}{2.676} = -0.4368,$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0.329}{2.676} = 0.1229,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{0.458}{2.676} = -0.1711.$$

### **13.1 Метод Гаусса.**

Решение задачи методом Гаусса состоит в сведении линейных систем уравнений к «треугольному» виду. При этом одно из уравнений, как правило последнее в системе, содержит только одно неизвестное, а в каждом следующем добавляется еще по одному неизвестному. Это достигается последовательным исключением неизвестных путем сложения и вычитания уравнений, умноженных на соответствующий постоянный множитель.

Рассмотрим этот метод на примере системы из трех линейно-независимых уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (13.7)$$

Предположим, что  $a_{11} \neq 0$ . Если это не так, то переставим уравнения в системе таким образом, чтобы в первом уравнении коэффициент при  $x_1$  не был равен нулю.

Преобразования эти делаются на основании правил элементарных преобразований системы, к которым относятся следующие типы преобразований систем линейных уравнений:

1) перестановка двух уравнений системы;

- 2) умножение обеих частей уравнения системы на любое число, отличное от нуля;
- 3) прибавление (вычитание) к обеим частям одного уравнения системы соответствующих частей другого уравнения, умноженного на любое, не равное нулю, число.

Эти элементарные преобразования переводят данную систему линейных уравнений в эквивалентную. Введем множитель для второго уравнения:

$$c_2 = \frac{a_{21}}{a_{11}}. \quad (13.8)$$

Умножая первое уравнение на  $c_2$  и вычитая его из второго получаем:

$$(a_{21} - c_2 a_{11}) \cdot x_1 + (a_{22} - c_2 a_{12}) \cdot x_2 + (a_{23} - c_2 a_{13}) \cdot x_3 = b_2 - b_1 c_2.$$

Коэффициент при  $x_1$  равен нулю. Произведем замену переменных:

$$a_{22}^{(1)} = a_{22} - c_2 a_{12}; \quad a_{23}^{(1)} = a_{23} - c_2 a_{13}; \quad b_2^{(1)} = b_2 - b_1 c_2. \quad (13.9)$$

Тогда второе уравнение нашей системы в новых переменных будет иметь вид:

$$a_{22}^{(1)} \cdot x_2 + a_{23}^{(1)} \cdot x_3 = b_2^{(1)}.$$

Введем второй коэффициент  $c_3 = \frac{a_{31}}{a_{11}}$ .

Опять умножим первой уравнение системы на множитель  $c_3$  и вычтем из третьего уравнения системы. Это дает

$$(a_{31} - c_3 a_{11}) \cdot x_1 + (a_{32} - c_3 a_{12}) \cdot x_2 + (a_{33} - c_3 a_{13}) \cdot x_3 = b_3 - b_1 c_3,$$

где коэффициент при  $x_1$  опять равен нулю. Сделав аналогичную замену переменных, получаем:

$$a_{32}^{(1)} \cdot x_2 + a_{33}^{(1)} \cdot x_3 = b_3^{(1)},$$

где

$$a_{32}^{(1)} = a_{32} - c_3 a_{12}; \quad a_{33}^{(1)} = a_{33} - c_3 a_{13}; \quad b_3^{(1)} = b_3 - b_1 c_3. \quad (13.10)$$

В результате проведенных элементарных преобразований получили эквивалентную систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1 \\ a_{22}^{(1)} \cdot x_2 + a_{23}^{(1)} \cdot x_3 = b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} \cdot x_2 + a_{33}^{(1)} \cdot x_3 = b_3^{(1)}, \end{cases} \quad (13.11)$$

Второе и третье уравнения последней системы представляет собой систему из двух уравнений с двумя неизвестными. Её можно решить, исключив из третьего уравнения  $x_2$ . Для этого умножим второе уравнение на

$$c_2^{(1)} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \text{ и вычтем из третьего:}$$

$$\left( a_{32}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{22}^{(1)} \right) \cdot x_2 + \left( a_{33}^{(1)} - c_2^{(1)} a_{23}^{(1)} \right) \cdot x_3 = b_3^{(1)} - b_2^{(1)} \cdot c_2^{(1)}.$$

Это дает

$$a_{33}^{(2)} \cdot x_3 = b_3^{(2)}, \quad (13.12)$$

где  $a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - c_2^{(1)} \cdot a_{23}^{(1)}$ ,  $b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - c_2^{(1)} \cdot b_2^{(1)}$ .

Таким образом, исходная система в результате элементарных преобразований приобретает вид:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1 \\ a_{22}^{(1)} \cdot x_2 + a_{23}^{(1)} \cdot x_3 = b_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)} \cdot x_3 = b_3^{(2)}. \end{cases} \quad (13.13)$$

Коэффициенты такой системы образуют треугольную матрицу. Решить её не сложно. Из третьего уравнения системы мы находим  $x_3$ :

$$x_3 = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}. \quad (13.14)$$

Подставляя  $x_3$  во второе уравнение, находим

$$x_2 = \frac{b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)} \cdot x_3}{a_{22}^{(1)}}. \quad (13.15)$$

И, наконец, подставляя найденные  $x_3$  и  $x_2$  в первое уравнение, находим

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12} \cdot x_2 - a_{13} \cdot x_3}{a_{11}}. \quad (13.16)$$

Этот процесс нахождения  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  обычно называется обратным ходом, а получение же треугольной матрицы или вычисление коэффициентов  $a_{33}^{(2)}$ ,  $a_{23}^{(1)}$ ,  $a_{22}^{(1)}$ ,  $b_3^{(2)}$ ,  $b_2^{(1)}$  называется прямым ходом. Коэффициенты  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$  называются ведущими коэффициентами метода Гаусса или схемы Гаусса. Метод Гаусса применим только в том случае, когда все ведущие коэффициенты не равны нулю.

Найденные выражения можно распространить на систему из  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными.

Предположим, что  $a_{11} \neq 0$ . Если это не так, то поменяем местами уравнения в системе, чтобы требуемое условие выполнялось.

Введем  $n-1$  множителей

$$c_i = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (13.17)$$

Вычтем из каждого  $i$ -того уравнение первое, умноженное на  $c_i$ , обозначив

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(1)} &= a_{ij} - c_i \cdot a_{1j}, \quad i = 2, 3, \dots, n, \\ b_j^{(1)} &= b_j - c_j \cdot b_1, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (13.18)$$

При этом для всех уравнений, начиная со второго  $a_{i1}^{(1)} = 0$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ .

Перепишем систему (13.1) в преобразованном виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \vdots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}. \end{cases} \quad (13.19)$$

Такой процесс последовательного исключения неизвестного нужно произвести всего  $(n-1)$  раз. На некотором  $k$ -том этапе исключение  $x_k$  производится с помощью множителя

$$c_i^{(k-1)} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad i = k+1, k+2, \dots, n. \quad (13.20)$$

При этом предполагается, что  $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ . Коэффициенты при последовательном исключении вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - c_i^{(k-1)} \cdot a_{kj}^{(k-1)}, \quad i = k+1, k+2, \dots, n, \\ b_i^{(k)} &= b_i^{(k-1)} - c_i^{(k-1)} \cdot b_k^{(k-1)}, \quad j = k, k+1, \dots, n. \end{aligned} \quad (13.21)$$

Вычисления по схеме Гаусса, если они проводятся вручную, удобно проводить по так называемой схеме единственного деления (см. табл.13.1).

Схема единственного деления (схема Гаусса) составляется следующим образом.

В раздел 1 схемы записываются коэффициенты при неизвестных, свободные члены и контрольные суммы (в таблице приведена схема единственного деления для системы из трех уравнений). Контрольная сумма представляет собой сумму всех коэффициентов строки, включая свободный член.

В разделе 2 схемы записываются преобразованные коэффициенты, получающиеся при исключении первого неизвестного. Для контроля вычислений подсчитываются контрольные суммы. Если вычисления производились правильно, то  $\Sigma=S$ . При этом под суммой  $\Sigma$  понимается сумма всех элементов строки, а под  $S$ -преобразованная сумма.

В раздел 3 записываются коэффициенты после исключения второго неизвестного.

Раздел 4 представляет собой обратный ход схемы Гаусса.

Таблица 13.1

Раз дел	Коэффициенты при неизвестных			Свободные члены	$c_i = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$	$\Sigma$	S
	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$				
1	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$b_2$	$c_2 = \frac{a_{21}}{a_{11}}$ $c_3 = \frac{a_{31}}{a_{11}}$	$\Sigma_1 = a_{11} + a_{21} + a_{31} + b_1$	
	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$b_3$		$\Sigma_2 = a_{21} + a_{23} + a_{33} + b_2$	
						$\Sigma_3 = a_{31} + a_{32} + a_{33} + b_3$	
2		$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$b_2^{(1)}$	$c_2^{(1)} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$	$\Sigma_2' = a_{22}^{(1)} + a_{23}^{(1)} + b_2^{(1)}$	$S_2 = \Sigma_2 - \Sigma_1 \cdot c_2$
		$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$b_3^{(1)}$		$\Sigma_2' = a_{32}^{(1)} + a_{33}^{(1)} + b_3^{(1)}$	$S_3 = \Sigma_3 - \Sigma_1 \cdot c_3$
3			$a_{33}^{(2)}$	$b_3^{(2)}$		$\Sigma_3'' = a_{33}^{(2)} + b_3^{(2)}$	$S_3' = \Sigma_3' - \Sigma_2' \cdot c_3$
4	$x_3 = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$ $x_2 = \frac{(b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)} \cdot x_3)}{a_{22}^{(1)}}$ $x_1 = \frac{(b_1 - a_{12} \cdot x_2 - a_{13} \cdot x_3)}{a_{11}}$						

**Пример 13.2** Методом Гаусса решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 1.2x_1 - 0.2x_2 + 0.3x_3 = -0.6 \\ -0.2x_1 + 1.6x_2 - 0.1x_3 = 0.3 \\ -0.3x_1 + 0.1x_2 - 1.5x_3 = 0.4 \end{cases}$$

Решение.

Вычисление проводим в таблице по схеме единственного деления

Раз дел	Коэффициенты при неизвестных			Свободные члены	$c_i = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$	$\Sigma$	S
	$x_1$	$x_2$	$x_3$				
1	1.2	-0.2	0.3	-0.6	-0.1666 -0.25	0.7	
	-0.2	1.6	-0.1	0.3		1.6	
	-0.3	0.1	-1.5	0.4		-1.3	
2		1.56	-0.05	0.20	0.032	1.71	1.71
		0.05	-1.425	0.25		-1.125	-1.125
3			-1.428	0.2436		-1.1794	-1.1794
4	Обратный ход						
	$x_1 = -0.171$						
	$x_2 = 0.123$						
	$x_3 = -0.437$						

Ответ:  $x_1 = -0.171$ ;  $x_2 = 0.123$ ;  $x_3 = -0.437$ .

Можно заметить, если ведущий элемент  $a_{kk}^{(k-1)}$  мал, то  $k$ -я строка умножается на большие по абсолютной величине множители  $c_i^{(k-1)}$ , а это может привести к большим ошибкам округления при последующем вычитании. Поэтому в методе Гаусса желательно, чтобы ведущие коэффициенты  $a_{kk}^{(k-1)}$  были возможно большими по абсолютной величине. Перестановкой уравнений в системе (13.1) можно добиться того, чтобы  $|a_{kk}^{(k-1)}| \geq |a_{ik}^{(k-1)}|$ , и тогда  $|c_i^{(k-1)}| \leq 1$ .

Метод Гаусса для невырожденных систем линейных уравнений оказывается достаточно простым и удобным, и при соответствующем выборе ведущего элемента дает сравнительно небольшую ошибку округления. По сравнению с методом Крамера, в котором производится примерно  $n^4$  операций умножения и столько же операций сложения, в методе Гаусса число необходимых операций сложения, умножения и деления примерно равно  $\frac{2n^3}{3}$ .

#### **§14. Приближенное вычисление интегралов**

Из курса матанализа известно, что если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то определенный интеграл от этой функции в пределах от  $a$  до  $b$  существует и имеет вид

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (14.1)$$

где  $F(x)$  - первообразная для функции  $f(x)$ .

В этом случае мы получаем точное значение интеграла. Но для большинства практических случаев найти первообразную трудно, а в ряде случаев вообще невозможно, и кроме того, очень часто подынтегральная функция задается таблично. Во всех этих случаях приходится применять формулы приближенного или численного интегрирования. Формулы приближенного интегрирования называются квадратурными формулами.

Наиболее удобным способом получения различных формул приближенного интегрирования является применение интерполяционных формул (практически заменяем подынтегральную функцию аппроксимирующим полиномом).

Пусть  $f(x)$  есть непрерывная функция на отрезке  $[a, b]$  и требуется вычислить  $\int_a^b f(x) dx$ .

Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  равных частей точками  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  так, чтобы

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} = h, \quad (14.2)$$

и  $y_k = f(x_k)$  - значения функции  $f(x)$  в точках деления отрезка  $[a, b]$ . Воспользуемся первой интерполяционной формулой Ньютона, в котором  $x = x_0 + hq$ ,  $q = \frac{x - x_0}{h}$ . Тогда  $dx = h dq$ . Кроме того,  $x_0 = a$ ,  $b = x_0 + nh$ ,

что дает

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_0+nh} P(x_0 + qh) \cdot h \cdot dq = h \int_{q_0}^{q_n} (y_0 + q \cdot \Delta y_0 + \frac{q \cdot (q-1)}{2!} \cdot \Delta^2 y_0 + \frac{q \cdot (q-1) \cdot (q-2)}{3!} \cdot \Delta^3 y_0 + \dots) dq. \quad (14.3)$$

Так как  $q_0 = \frac{x_0 - x_0}{h} = 0$ ,  $q_n = \frac{x_0 + nh - x_0}{h} = n$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = h \int_0^n (y_0 + q \Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots) dq. \quad (14.4)$$

Разобьем интеграл суммы на сумму интегралов и в результате интегрирования получаем:

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} y dx = h \left[ n y_0 + \frac{n^2}{2} \Delta y_0 + \left( \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} \right) \frac{\Delta^2 y_0}{2!} + \left( \frac{n^4}{4} - n^3 + n^2 \right) \frac{\Delta^3 y_0}{3!} + \dots \right]. \quad (14.5)$$

Из этой формулы можно получить целый ряд формул численного интегрирования: придавая  $n$  различные значения и деля отрезок  $[a, b]$  на различное число частей, пользуемся интерполяционными многочленами различных степеней.

### 14.1 Метод трапеций

Когда в качестве интерполяционного полинома берем полином первой степени ( $n=1$ ), то в формуле (14.5) все разности выше первого порядка пропадают, поскольку мы имеем только две точки:  $x_0$  и  $x_0 + h$ .

В этом случае

$$\int_{x_0}^{x_0+h} y dx \approx h \int_0^1 (y_0 + q \Delta y_0) dy = h \left( y_0 + \frac{y_1 - y_0}{2} \right) = h \cdot \frac{y_1 + y_0}{2}, \quad (14.6)$$

т.е. интеграл заменяется площадью трапеции.

Геометрически это очевидно. При  $n=1$  мы аппроксимируем функцию  $f(x)$  прямой линией, т.е. заменяем кривую хордой. При этом интеграл равен площади обычной прямоугольной трапеции (рис. 14.1 а).

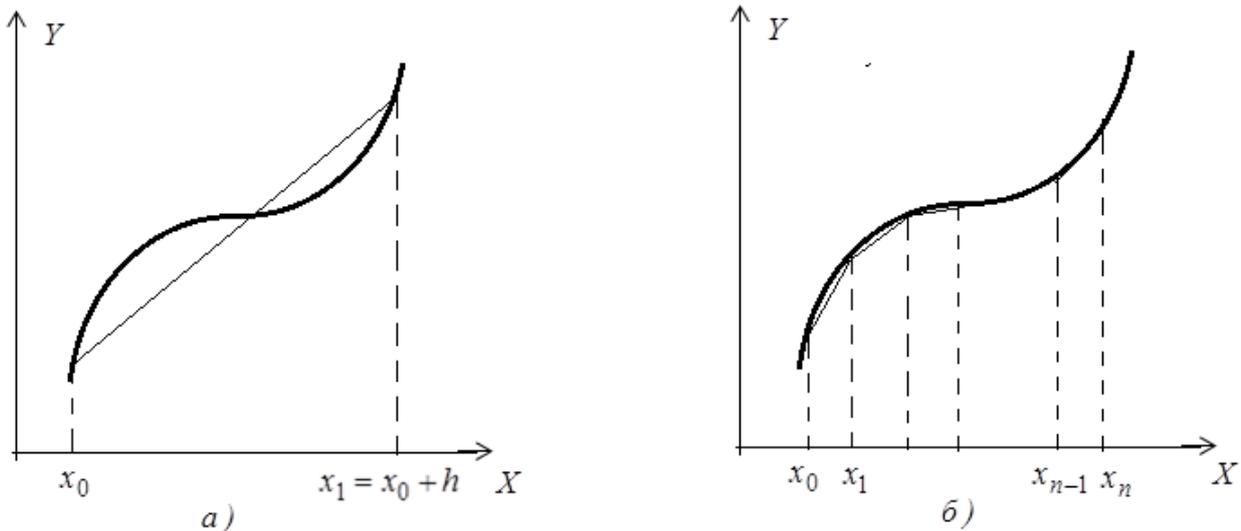


Рис. 14.1

Формула будет более точной, если отрезок  $[a, b]$  разбить на  $n$  равных частей длиной  $h = \frac{b-a}{n}$  и к каждому отрезку применить формулу трапеций.

При этом кривая заменяется ломанной линией. Определенный интеграл вычисляется по формуле (см. рис. 14.1 б).

$$\int_a^b y dx \approx h \left( \frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right). \quad (14.7)$$

Складывая члены, получаем общую формулу метода трапеций:

$$\int_a^b y dx \approx h \left( \frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right). \quad (14.8)$$

Абсолютная погрешность формулы трапеций оценивается по формуле

$$\Delta_n \leq \frac{M_2 \cdot (b-a)^3}{12n^2}, \quad (14.9)$$

где  $M_2$  – максимальное значение модуля второй производной на  $[a, b]$ .

Это соотношение получается следующим образом. Найдем погрешность метода на отрезке  $[x_{k+1}, x_k]$ . Она равна

$$\Delta = \int_{x_k}^{x_k+h} y(x) dx - \frac{1}{2} \cdot h \cdot [y(x_k+h) + y(x_k)]. \quad (14.10)$$

Определим первую и вторую производные от  $\Delta(h)$  по  $h$

$$\frac{d\Delta}{dh} = \frac{1}{2} [y(x_k+h) \cdot y(x_k)] - \frac{h}{2} \cdot y'(x_k+h), \quad (14.11)$$

$$\frac{d^2\Delta}{dh^2} = -\frac{h}{2} \cdot y''(x_k+h). \quad (14.12)$$

Из (14.10) и (14.11) следует, что  $\Delta(0)=0$ ,  $\Delta'(0)=0$ . Интегрируя (14.12), находим

$$\begin{aligned} \Delta'(h) &= \Delta'(0) + \int_{x_k}^{x_k+h} \Delta''(t) dt = -\frac{1}{2} \int_{x_k}^{x_k+h} t \cdot y''(x_k+t) dt = \\ &= -\frac{1}{2} y''(\xi) \int_{x_k}^{x_k+h} t dt = -\frac{1}{4} y''(\xi) (2x_k h + h^2). \end{aligned} \quad (14.13)$$

Тут  $\xi \in (x_k, x_k+h)$ .<sup>5</sup>

Возьмем  $x_k = 0$ , тогда  $\Delta'(h) = y''(\xi) \cdot \frac{h^2}{4}$ . Далее интегрируя (13.11),

$$\text{находим } \Delta(h) = \Delta(0) + \int_0^h \Delta'(t) dt = -\frac{1}{4} \cdot y''(\xi) \int_0^h t^2 dt = -\frac{y''(\xi) \cdot h^3}{12}.$$

Учитывая, что отрезков  $[x_{k+1}, x_k]$  всего  $n$ , и заменяя  $y''(\xi)$  на  $M_2$ , получаем

$$\Delta_n \leq \frac{M_2 h^3 n}{12} = \frac{M_2 (b-a)^3}{12n^2}, \quad (14.14)$$

т.е. формулу (14.9).

Если вторую производную оценить сложно, или мы имеем дело с табличной зависимостью, когда аналитически вычислить вторую производную невозможно, то для вычисления погрешности интегрирования по формуле трапеций можно пользоваться формулой

$$\Delta_n \leq \frac{(b-a)}{12} \cdot \Delta^2 y_{\max} /, \quad (14.15)$$

Где  $\Delta^2 y_{\max}$  - максимальное значение разности второго порядка.

---

<sup>5</sup> Теорема о среднем: если  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то  $\exists \xi \in [a, b]$  такое, что  $\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b-a)$ .

**Пример 14.1.** Вычислить определенный интеграл  $\int_{0.15}^{1.5} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 1.6}}$  с

двумя десятичными знаками после запятой.

Решение.

1. Оценим  $n$  для достижения заданной точности так, чтобы

$$0.005 > \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{12 \cdot n^2},$$

где  $a=0.15$ ;  $b=1.5$ ;  $M_2 = \max[f''(x)]$ ;  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 1.6}}$ .

Ищем максимальное значение второй производной.

$$f'(x) = -\frac{4x}{2\sqrt{(2x^2 + 1.6)^3}} = -\frac{2x}{\sqrt{(2x^2 + 1.6)^3}}, \quad (14.16)$$

$$f''(x) = -\frac{2\sqrt{(2x^2 + 1.6)^3} - 3x\sqrt{(2x^2 + 1.6)} \cdot 4x}{(2x^2 + 1.6)^3} = \frac{8x^2 - 3.2}{\sqrt{(2x^2 + 1.6)^5}},$$

$$\max_{[0.15; 1.5]} |f''(x)| < \frac{8 \cdot 0.15^2 - 3.2}{\sqrt{(2 \cdot 0.15^2 + 1.6)^5}} \approx 0.87. \quad (14.17)$$

Возьмем  $M_2=1$ . Тогда неравенство примет вид

$$0.005 > \frac{1 \cdot (1.35)^3}{12n^2}, \quad n^2 > 41, \quad n > 7.$$

Возьмем  $n=10$ . Все расчеты интеграла приводим в таблице, используя

формулу:  $I = h \left( \frac{y_0 + y_{10}}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_9 \right)$ .

При этом  $h=0.135$ ,  $x_k = 0.15 + k \cdot 0.135$ ,  $y_k = y(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2x_k^2 + 1.6}}$ .

$k$	$x_k$	$x_k^2$	$\sqrt{2x_k^2 + 1.6}$	$y_0, y_{10}$	$y_1 \div y_9$
0	0.15	0.0225	1.2826	0.7797	
1	0.285	0.08122	1.3276		0.7533
2	0.42	0.1764	1.3974		0.7156
3	0.555	0.3080	1.4886		0.6717
4	0.69	0.4761	1.5976		0.6259
5	0.825	0.6806	1.7208		0.5811
6	0.96	0.9216	1.8556		0.5389
7	1.045	1.092	1.9453		0.5141
8	1.23	1.5129	2.1508		0.4649

9	1.365	1.8632	2.3079		0.4333
10	1.5	2.25	2.4698	0.4049	
$\Sigma$				1.1846	5.2988

Следовательно,  $I = 0.135 \cdot \left( \frac{1.1846}{2} + 5.2988 \right) = 0.72529 \approx 0.72$ .

Ответ.  $I \approx 0.72$ .

## 14.2 Метод Симпсона

Для того, чтобы получить формулу Симпсона для приближенного интегрирования по отрезку  $[a, b]$  возьмем в формуле (14.5) интерполяционный полином второй степени ( $n=2$ ), т.е. участок интегрирования разбиваем тремя точками  $x_0, x_1, x_2$  (рис. 14.2).

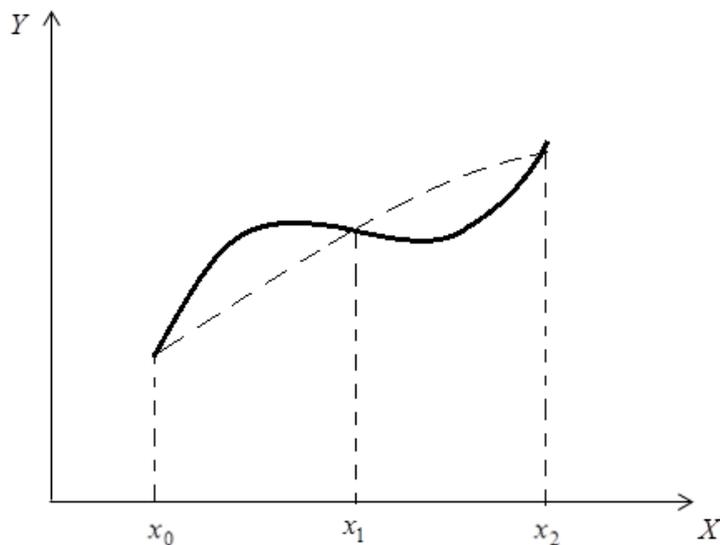


Рис.14.2

$$\begin{aligned}
 \text{Тогда } \int_{x_0}^{x_0+2h} y dx &= h \left[ 2y_0 + 2\Delta y_0 + \left( \frac{8}{3} - 2 \right) \cdot \frac{\Delta^2 y_0}{2} \right] = \\
 &= h \left[ 2y_0 + 2y_1 - 2y_0 + \frac{1}{3}(y_2 - 2y_1 + y_0) \right] = \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + y_0] \quad (14.18)
 \end{aligned}$$

Геометрический смысл интегрирования по полученной формуле из рис. 14.2 ясен – мы заменяем на отрезке  $[x_0, x_0 + 2h]$  функцию  $y = f(x)$  интерполяционным полиномом второй степени или обычной параболой, проходящей через точки кривой с абциссами  $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h$  и ординатами  $y_0, y_1, y_2$ . Из формулы (14.18), как и выше, можно получить формулу приближенного интегрирования по всему отрезку  $[a, b]$ . Для этого разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $2n$  частей и для каждой пары участков

применим формулу (14.18). При этом  $h = \frac{b-a}{2n}$ , а отдельные слагаемые имеют вид

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} y dx &\cong \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2), \\ \int_{x_2}^{x_4} y dx &\cong \frac{h}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4), \\ \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} y dx &\cong \frac{h}{3} (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}). \end{aligned} \quad (14.19)$$

Просуммировав все эти вклады, получаем общую формулу вычисления интеграла по формуле Симпсона:

$$\int_a^b y dx \cong \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}]. \quad (14.20)$$

Формула Симпсона или формула парабол получается заменой площади под кривой  $y = f(x)$  суммой  $\tilde{k} = 2n$  криволинейных трапеций, ограниченных сверху параболой. При одном и том же числе разбиений отрезка  $y = f(x)$  это обычно дает более хорошие результаты, чем формула трапеций.

Формулу трапеций можно записать также в следующем виде:

$$\int_a^b y dx \cong \frac{b-a}{6n} \left[ (y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) \right]. \quad (14.21)$$

Погрешность формулы парабол оценивается исходя из неравенства

$$\Delta_n \leq \frac{M_4 (b-a)^5}{16 \cdot 180 \cdot n^4}, \quad (14.22)$$

где  $M_4$  – максимальное значение модуля четвертой производной  $f(x)$ .

Приблизительно  $\Delta_n$  можно вычислить по формуле

$$\Delta_n \leq \frac{(b-a)}{180} \cdot \Delta^4 y_{max} /, \quad (14.23)$$

где  $\Delta^4 y_{max}$  – максимальное значение разности четвертого порядка. Зная, с какой точностью  $\Delta_n$  необходимо вычислить интеграл, число разбиений отрезка  $[a, b]$  можно определить из неравенства (14.22).

**Пример 14.2.** Вычислить определенный интеграл  $\int_{0.4}^{1.2} \frac{\cos x}{x+2} dx$  по

формуле Симпсона при  $2n=10$ , оценить погрешность результата, составив таблицу конечных разностей.

Решение.

Так как число разбиений отрезка интегрирования задано, то

$$h = \frac{b-a}{2n} = \frac{1.2-0.4}{10} = 0.08, \quad x_k = 0.4 + k \cdot 0.08.$$

Вычисление интеграла будем производить по формуле

$$I = \frac{h}{3} [(y_0 + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)].$$

Вычисленные значения функции в точках  $x_k$  приведены в таблице.

$k$	$x_k$	$\cos x_k$	$x_k + 2$	$y_0, y_{10}$	$y_k = y_{2n}$	$y_k = y_{2n-1}$
0	0.4	0.9211	2.4	0.3838		
1	0.48	0.8870	2.48			0.3576
2	0.56	0.8475	2.56		0.3309	
3	0.64	0.8021	2.64			0.3038
4	0.72	0.7518	2.72		0.2764	
5	0.8	0.6967	2.8			0.2488
6	0.88	0.6371	2.88		0.2212	
7	0.96	0.5735	2.96			0.1938
8	1.04	0.5052	3.04		0.1665	
9	1.12	0.4357	3.12			0.1396
10	1.2	0.3623	3.2	0.1132		
<b><math>\Sigma</math></b>				<b>0.4970</b>	<b>0.9948</b>	<b>1.2436</b>

Таким образом:  $I \cong \frac{0.08}{3} (0.4970 + 4 \cdot 1.2436 + 2 \cdot 0.9948) \cong 1.9896$ .

Оценим погрешность результата по формуле  $\Delta_n \leq \frac{(b-a)}{180} \cdot \Delta^4 y_{max} /$ . Для

этого составим таблицу конечных разностей

$k$	$y_k$	$\Delta y_k$	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$	$\Delta^4 y_k$
0	0.3838	-0.0262	0.0005	-0.0001	0.0000
1	0.3576	-0.0267	0.0004	-0.0001	0.0000
2	0.3309	-0.0271	0.0003	-0.0001	-0.0001
3	0.3038	-0.274	0.0002	-0.0002	0.0000
4	0.2764	-0.0276	0.0000	-0.0002	0.0003
5	0.2488	-0.0276	-0.0002	-0.0001	0.0004
6	0.2212	-0.0274	-0.0001	-0.0003	0.0002

7	0.1938	-0.0273	-0.0004	-0.0001	
8	0.1665	-0.0269	-0.0005		
9	0.1396	-0.0264			
10	0.1132				

Итак,  $\max/\Delta^4 y_k \neq 0.0004$ , а погрешность формулы Симпсона оценивается из неравенства:  $\Delta_n < \frac{(1.2-0.4)}{180} \cdot 0.0004 \cong 0.0000017 \approx 2 \cdot 10^{-6}$ .

Так как вычисления мы вели с четырьмя значащими цифрами, то погрешность на результат не влияет.

Ответ:  $I \cong 0.1990$ .

### 14.3 Формулы Ньютона-Котеса для приближенного вычисления интегралов

Если подинтегральную кривую  $y = f(x)$  заменить полиномом третьей степени, т.е. взять в (14.5)  $n=3$ , а отрезок интегрирования  $[a, b]$  разбить на три промежутка точками  $x_0, x_1, x_2, x_3$  (см. рис. 14.3), то применяя формулу приближенного интегрирования (14.5), будем иметь

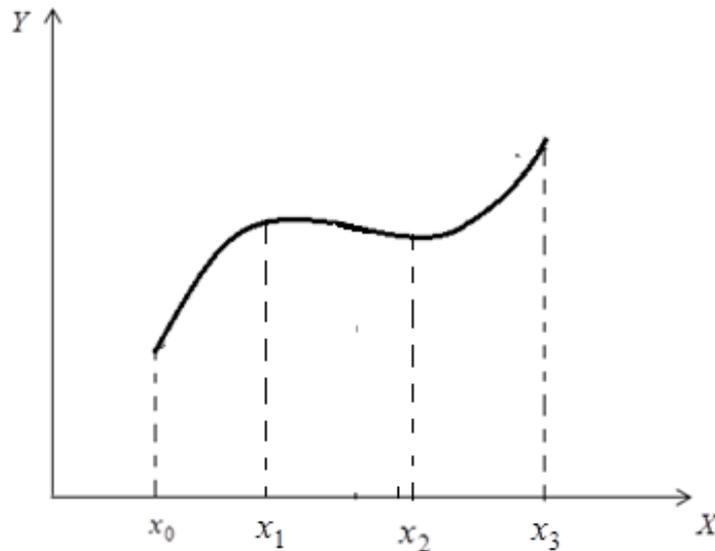


Рис. 14.3

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^{x_0+3h} y dx &\cong h \left[ 3y_0 + \frac{9}{2} \Delta y_0 + \left( 9 - \frac{9}{2} \right) \frac{\Delta^2 y_0}{2!} + \left( \frac{81}{4} - 27 + 9 \right) \frac{\Delta^3 y_0}{3!} \right] = \\
 &= h \left[ 3y_0 + \frac{9}{2} y_1 - \frac{9}{2} y_0 + \frac{9}{4} (y_2 - 2y_1 + y_0) + \frac{3}{8} (y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0) \right] = \quad (14.24) \\
 &= h [y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3] \cdot \frac{3}{8}.
 \end{aligned}$$

В результате мы получим формулу приближенного интегрирования, которая обычно называется формулой трех восьмых.

Легко заметить, что формулы (14.8), (14.18), (14.24) все выведены из формулы (14.5) и имеют одинаковую природу. Разница лишь в том, что подинтегральную кривую мы заменяем полиномами разной степени, и в результате отрезок  $[a, b]$  делится на разное число промежутков. Продолжая этот процесс, можно получить еще целый ряд формул приближенного интегрирования. Формулы такой природы носят названия формул Ньютона-Котеса и в общем случае имеют вид:

$$\int_a^b f(x) dx = c_0 h \sum_{i=0}^k w_i f_i + c_1 h^{n+1} \cdot f^{(n)}(x), \quad (14.25)$$

где  $k$ - число полос, на которое разбивается площадь подинтегральной кривой (обязательно кратно степени аппроксимирующего полинома),  $n$ - степень аппроксимирующего полинома,  $f^{(n)}(x)$  - максимальное значение  $n$ -ой производной функции  $f(x)$ ,  $h$ - шаг заданных значений функции. Коэффициенты  $c_0, c_1, w_i$  зависят от степени аппроксимирующего полинома и приведены в таблице.

Таблица коэффициентов в формулах Ньютона-Кротеса:

$n$	$c_0$	$w_0$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	$w_6$	$w_7$	$w_8$	$c_1$
1	$\frac{1}{2}$	1	1								$-\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{3}$	1	4	1							$-\frac{1}{90}$
3	$\frac{3}{8}$	1	3	3	1						$-\frac{3}{80}$
4	$\frac{21}{45}$	7	32	12	32	7					$-\frac{28}{945}$
5	$\frac{5}{288}$	19	75	50	50	25	19				$-\frac{275}{12096}$
6	$\frac{1}{140}$	41	216	27	272	27	216	41			$-\frac{9}{1400}$
7	$\frac{7}{17380}$	751	3577	1323	2989	2989	1323	3577	751		$\frac{-8183}{518400}$
8	$\frac{7}{14175}$	989	5828	-972	10946	-4540	10945	-928	5288	989	$\frac{-2368}{767875}$

В каждой строке таблицы представлен один цикл  $n$ -полос, включающих  $n+1$  узловую точку. Если для увеличения точности приближенного интегрирования мы разбиваем площадь под кривой на число полос большее  $n$ , но кратное ему, то последние коэффициенты в цикле  $w_i$  складываются. Например,  $n=2$  берем  $k=4$ , тогда следуя правилу, составляем таблицу:

	$w_0$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$
	1	4	1		
			1	4	1
сумма	1	4	2	4	1

Т.е. получаем коэффициенты в формуле Симпсона

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4).$$

Формулы Ньютона-Котеса не зависят от вида  $y = f(x)$  и являются только функциями количества узлов интерполяции. При использовании формул Ньютона-Котеса значения функции должны задаваться с постоянным шагом по оси  $X$ . Погрешность, которую дают формулы Ньютона-Котеса, выражается величиной  $\Delta \leq c_1 \cdot h^{n+1} \cdot f^{(n)}(x)$ , т.е. с уменьшением шага  $h$  погрешность убывает, но не следует забывать, что бывают функции, производные высоких порядков которых приобретают очень большие значения или, если мы заменяем производные конечными разностями, они имеют большую погрешность. Поэтому не рекомендуется пользоваться формулами Ньютона-Котеса слишком высоких порядков ( $n > 8$ ).

**Пример 14.3.** Вычислить по формуле Ньютона - Котеса  $\int_{0.4}^{1.2} \frac{\cos x}{x+2} dx$ ,

$n=3$  и взять два цикла разбиения отрезка  $[0.4; 1.2]$ , т.е.  $k=6$ .

Решение.

Согласно условию  $k=6$ ,  $h = \frac{1.2 - 0.4}{6} = 0.1333$ ,

$$x_i = 0.4 + i \cdot 0.1333, \quad i = 0, 2, \dots, 6.$$

Формула Ньютона – Котеса для этого случая будет выглядеть так:

$$I = \frac{3}{8} h (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6).$$

Все промежуточные вычисления сведем в таблицу:

$i$	$x_i$	$\cos x_i$	$x_i + 2$	$y_i$
0	0.4	0.9211	2.4	0.3838

1	0.5333	0.8611	2.5333	0.3399
2	0.6666	0.7859	2.6666	0.2947
3	0.7999	0.6967	2.7999	0.2488
4	0.9332	0.5953	2.9332	0.2029
5	1.0662	0.4832	3.0665	0.1576
6	1.1998	0.3625	3.1998	0.1133

Следовательно:

$$I = \frac{3}{8} \cdot 0.1333 \cdot (0.3838 + 1.0197 + 0.8841 + 0.4976 + 0.6087 + 0.4788 + 0.1133) = 0.19895.$$

Ответ:  $I \cong 0.1989$ .

### §15 Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Решением обыкновенного дифференциального уравнения (ДУ)  $n$ -го порядка

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (15.1)$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = x_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (15.2)$$

(задача Коши), является функция  $y = y(x)$ , подстановка которой в (15.1) дает тождество. Мы будем искать решение для  $x \in [a, b]$ , где  $a$  обычно совпадает с  $x_0$ .

В случае уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = x_0 \quad (15.3)$$

задача Коши имеет единственное решение, если  $f(x, y)$  непрерывна в области  $R = \{x - x_0 < c, |y - y_0| < d\}$  и удовлетворяет в этой области условию Липшица

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N |y_1 - y_2|, \quad (15.4)$$

где  $y_1$  и  $y_2 \in R$ ,  $x \in R$ ,  $N$  – постоянная Липшица.

Общее решение уравнения (15.1) записывается в виде

$$y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad (15.5)$$

где  $x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  – конкретные числа.

**Пример 15.1.** Сила, действующая на тело массой 0.333кг, зависит от времени по закону  $F = bt^2$ , где  $b = \frac{2H}{c^2} \left( \frac{\text{ньютон}}{\text{секунда}^2} \right)$ . В начальный момент

времени ( $t=0$ ) тело покоилось ( $v=0$ ) и находилось в точке  $x=0$ . Определить зависимость координаты и скорости тела от времени, т.е. найти функции  $x(t)$  и  $v(t)$ .

Решение.

Чтобы составить ДУ, напомним 2-ой закон Ньютона  $\vec{F} = m\vec{a}$ , где ускорение  $\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}$ . Это дает ДУ второго порядка

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = bt^2, \Rightarrow x_t'' = \tilde{c}t^2, \quad \tilde{c} = \frac{b}{m} = 6\text{м/с}^4 \quad (15.6)$$

с начальными условиями  $x(0)=0, x'(0)=0$ . Уравнение (15.6) решается аналитически (методом разделения переменных). Общее решение имеет вид

$$x(t) = \frac{t^4}{2} + c_1t + c_2. \quad (15.7)$$

Учитывая начальные условия, получаем два уравнения

$$0 = c_2; \quad v(t) = 2t^3,$$

откуда получаем частное решение ДУ

$$x(t) = \frac{t^4}{2}; \quad \text{и из которого получаем } v(t) = 2t^3. \quad (15.8)$$

Из него следует, например, что через 2с после действия силы, тело сместится на 8м и достигнет скорости 16 м/с.

ДУ  $n$ -порядка всегда можно свести к системе  $n$ -уравнений 1-го порядка. Для этого введем обозначения

$$y(x) = y_0(x) = \varphi(x); \quad y'(x) = \varphi_1(x); \quad \dots; \quad y^{(n-1)}(x) = \varphi_{n-1}(x). \quad (15.9)$$

Тогда уравнение (15.1), которое мы предварительно запишем в виде

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (15.10)$$

можно представить в виде системы ДУ

$$\begin{cases} y'(x) = \varphi_1(x), \\ y''(x) = \varphi_2(x), \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) = \varphi_{n-1}(x), \\ y^{(n)}(x) = f(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'(x) = \varphi_1(x), \\ \varphi_1'(x) = \varphi_2(x), \\ \vdots \\ \varphi_{n-2}'(x) = \varphi_{n-1}(x), \\ \varphi_{n-1}'(x) = f(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)). \end{cases} \quad (15.11)$$

Видно, что (15.11) – это система ДУ уравнений первого порядка. Поэтому в дальнейшем будем изучать ДУ первого порядка:

$$y' = f(x, y) \quad (15.12)$$

с начальными условиями  $y(x_0) = y_0$ .

Большинство ДУ, с которыми приходится сталкиваться при решении практических задач, аналитически не решаются. Например, уравнение  $y' = x^2 + y^2$  при  $y(0) = 0$  имеет решение, но найти его аналитическим способом нельзя. В этом случае прибегают к численному решению, задача которого ставится так: найти функцию  $y(x)$  в виде таблицы на отрезке  $x \in [a, b]$  при  $y(x_0) = y_0$ . При этом надо убедиться, что уравнение (15.12) вообще имеет решение.

Линейное уравнение  $y' = f(x, y)$  имеет решение в некоторой области  $x \in [a, b]$ ,  $y \in [A, B]$ , если  $f(x, y)$  непрерывна в этой области и ограничена (условие Липшица).

При решении ДУ надо особое внимание уделять устойчивости решения  $y = y(x)$  относительно изменения начального условия. В некоторых задачах незначительное изменение условия  $y(x_0) = y_0$  ведет к резкому изменению функции  $y(x)$ .

**Пример 15.2.** Решить ДУ  $y' = y - x$  с начальным условием  $y(0) = 1$ .

Решение.

Общее решение ДУ имеет вид

$$y = 1 + x + Ce^x. \quad (15.13)$$

Начальное условие дает уравнение  $1 = 1 + C$ , т.е.  $C = 0$ . Таким образом, частное решение ДУ записывается в виде

$$y = 1 + x. \quad (15.14)$$

Если  $x \in [0, 200]$ , то при  $x = 200$   $y = 201$ .

Теперь допустим, что начальное условие несколько изменено:  $y(0) = 1.000001$ , т.е. отличается от предыдущего на  $\Delta = 10^{-6}$ , что вполне может являться ошибкой, например, калькулятора. При этом начальное условие дает  $1.000001 = 1 + C$ ,  $C = 0.000001 = 10^{-6}$ , и частное решение имеет вид

$$\tilde{y} = 1 + x + 10^{-5} \cdot e^x. \quad (15.15)$$

При  $x = 200$   $\tilde{y} = 1 + 200 + 10^{-6} \cdot e^{200} = 7.2 \cdot 10^{80}$ , т.е. резко отличается от предыдущего решения  $y(200) = 201$ . Выход из этого положения связан с уменьшением интервала  $x \in [a, b]$ . В области  $x \in [0, 10]$  решение при обоих начальных условиях устойчиво:  $y(10) = 21$  и  $\tilde{y}(10) = 21.022$ .

Ниже рассмотрим один аналитический (метод Пикара) и несколько численных методов нахождения приближенного решения ДУ.

### 15.1 Метод Пикара

Пусть дано уравнение  $y' = f(x, y)$ , правая часть которого в области  $x \in [a, b]$ ,  $y \in [A, B]$  непрерывна и имеет непрерывную частную производную по  $y$   $f'_y f(x, y)$ . Начальное условие:  $x = x_0$ ,  $y(x_0) = y_0$ . Проинтегрируем обе части уравнения

$$\int_{x_0}^x y' dx = y(x) - y_0 = \int_{x_0}^x f(x, y) dx. \quad (15.16)$$

Это дает

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx. \quad (15.17)$$

Таким образом, исходное уравнение мы заменили интегральным уравнением (15.17) типа Вольтерра. Решать его будем методом последовательных приближений к  $y(x)$  (или методом итераций). Возьмем какую-нибудь начальную функцию  $y_0(x)$  и подставим ее в (15.17). Полученную функцию обозначим

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0(x)) dx.$$

Подставляя далее  $y_1(x)$  в правую часть (15.17), находим

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1(x)) dx.$$

Продолжая этот процесс далее, находим на  $n$ -шаге

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}(x)) dx. \quad (15.18)$$

Возникает вопрос, насколько хорошо найденная последовательность функций  $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  сходится к искомой зависимости  $y = y(x)$ . Без доказательства приведем критерий такой сходимости:

«Если в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ ,  $f(x, y)$  непрерывна и имеет ограниченную частную производную  $f'_y(x, y)$ , то последовательность  $\{y_k(x)\}$  сходится к функции  $y(x)$ , являющейся решением ДУ  $y' = f(x, y)$  с начальным условием  $y(x_0) = y_0$ ».

Погрешность  $n$ -го шага метода Пикара оценивается по формуле

$$|y(x) - y_n(x)| \leq N^n \cdot M \cdot \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (15.19)$$

где  $M = \max |f(x, y)|$  при  $x \in [a, b]$ ;  $N = \max |f'_y(x, y)|$ ,  $h = \min\left(c, \frac{d}{M}\right)$ ,

и где  $c \geq |x - x_0|$ ,  $d \geq |y - y_0|$  - максимальные границы области поиска решения.

В качестве начальной функции  $y_0(x)$  часто берут константу  $y_0(x) = y_0$ , т.е. значение начального условия.

**Пример.15.3.** Решить ДУ  $y' = x + y$  при  $x_0 = 0$ ,  $y(x_0) = 1$ , для  $x \in [0, 1]$ ,  $y \in [1, 4]$ .

Решение.

Берем в качестве  $y_0(x)$  функцию  $y_0(x) = 1$ . Это дает

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (x+1) dx = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \quad (15.20)$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(x+1 + x + \frac{x^2}{2}\right) dx = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6}.$$

Ограничимся вторым шагом. Оценим погрешность:  $M = \max(x + y) = 5$ ,  $N = \max |1| = 1$ ,  $c = |1 - 0| = 1$ ,  $d = |4 - 1| = 3$ ,

$h = \min\left(1, \frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$ . В результате получаем

$$\Delta_2 \leq 1^2 \cdot 5 \cdot \frac{3^3}{5^3 \cdot 6} = 0.18,$$

т.е. расхождение с истинной функцией на конце интервала  $[0, 1]$  при  $x \rightarrow 1$   $\Delta_2 = |y - y_2| \leq 0.18$ . Если мы сделаем еще одно приближение, то  $\Delta_3 \leq 0.054$ , т.е. точность увеличивается.

$$\Delta_4 \leq 0.012,$$

$$y_3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24},$$

$$y_4 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120}.$$

## 15.2 Метод Эйлера

Этот метод является одним из наиболее простых методов численного решения ДУ. В результате его применения при решении уравнения

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (15.21)$$

находится таблица чисел  $\{y_i\}$ , соответствующая заданному разбиению интервала  $[a, b]$  с шагом  $h$ :

$$x_0 = a, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h, \quad \dots, \quad x_k = x_0 + kh, \quad \dots, \quad x_n = b,$$

где  $h$  называется шагом интегрирования.

Разложим искомую функцию  $y(x)$  по формуле Тейлора около  $x_k$  по малому параметру  $h$ , ограничиваясь только первой степенью  $h$ :

$$y(x_{k+1}) = y(x_k + h) = y(x_k) + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_k} \cdot h + O(h). \quad (15.22)$$

Учитывая, что  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ , находим

$$y_{k+1} \cong y_k + f(x_k, y_k) \cdot h. \quad (15.23)$$

Формула (15.23) позволяет построить искомую таблицу  $\{y_i\}$ , т.к. начальная точка  $(x_0, y_0)$  и внешний вид  $f(x, y)$  известны. Первая подстановка в (15.23) дает  $y_1$ , вторая -  $y_2$  и т.д.

Точность метода Эйлера (или метода отрезков, как его иногда называют) определяется формулой

$$|y(x_k) - y_k| \leq \frac{hM}{2N} [(1 + hn)^n - 1], \quad (15.24)$$

где  $M = \max |f'_x(x, y)|$ ,  $N = \max |f'_y(x, y)|$ ,  $h$  - шаг интегрирования.

**Пример 15.4.** Решить ДУ  $y' = y - x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y(x_0) = 1.5$ .

Решение.

Используем формулу (при  $h=0.25$ ).

$$y_{k+1} = y_k + (y_k - x_k) \cdot h. \quad (15.25)$$

$$y_1 = 1.5 + (1.5 - 0) \cdot 0.25 = 1.875;$$

$$y_2 = 1.875 + (1.875 - 0.25) \cdot 0.25 = 1.875 + 0.4062 = 2.2812;$$

$$y_3 = 2.2812 + (2.2812 - 0.5) \cdot 0.25 = 2.7265;$$

$$y_4 = 2.7265 + (2.7265 - 0.75) \cdot 0.25 = 3.2206;$$

$$y_5 = 3.2206 + (3.2206 - 1.0) \cdot 0.25 = 3.7758;$$

$$y_6 = 3.7758 + (3.7758 - 1.25) \cdot 0.25 = 4.4072.$$

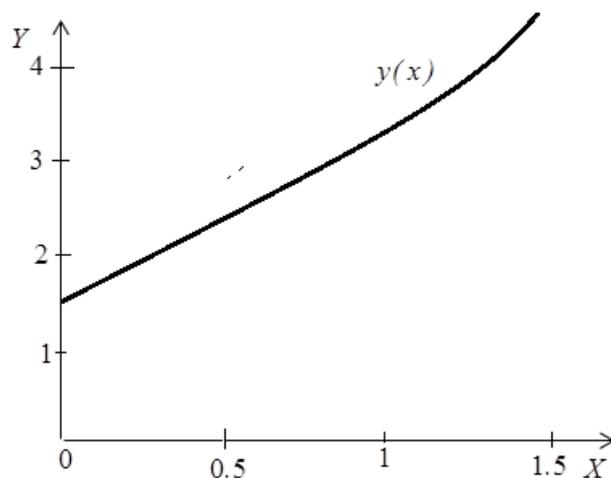


Рис. 15.1

На рис. 15.1 видно, что решение уравнения  $y' = y - x$  на отрезке  $[0; 1.5]$  имеет вид слегка вогнутой кривой.

### 15.3 Модификация метода Эйлера

Имеем точно такую же задачу: решить ДУ  $y' = f(x, y)$ ,  
 $x = x_0$ ,  $y(x_0) = y_0$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $h = \frac{b-a}{n}$ .

Сущность модифицированного метода Эйлера состоит в следующем. Сначала вычисляется вспомогательное значение искомой функции  $y(x)$  в точке  $x_{k+1/2} = x_k + h/2$  по формуле Тейлора

$$y(x_{k+1/2}) = y_{k+1/2} \cong y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k), \quad (15.26)$$

затем находят значение  $f(x, y)$  в точке  $(x_{k+1/2}, y_{k+1/2})$ , т.е.  $f(x_{k+1/2}, y_{k+1/2})$ , и после чего вычисляют

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_{k+1/2}, y_{k+1/2}). \quad (15.27)$$

Преимущество этого метода в том, что при одинаковой величине шага достигается более высокая точность по сравнению с более простым методом Эйлера.

**Пример 15.5.** Решить ДУ  $y' = y - x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y(x_0) = 1.5$ .  
 $x \in [0; 1.5]$ ,  $h = 0.25$ .

Решение.

$$x_{1/2} = 0.125; \quad y_{1/2} = 1.5 + 0.125 \cdot (1.5 - 0) = 1.6875;$$

$$y_1 = 1.5 + 0.25 \cdot (1.6875 - 0.125) = 1.8906.$$

$$x_{3/2} = 0.3750; \quad y_{3/2} = 1.8906 + 0.125 \cdot (1.8906 - 0.3750) = 2.0957.$$

$$y_2 = 1.8906 + 0.25 \cdot (2.0957 - 0.3750) = 2.320.$$

$$y_3 = 2.7892; \quad y_4 = 3.3315; \quad y_5 = 3.9558; \quad y_6 = 4.6856.$$

#### 15.4 Методы Рунге-Кутты

Разложение искомой функции  $y(x)$  по формуле Тейлора в общем случае приводит к уравнению

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \cdot \Delta(x_n, y_n, h), \quad (15.28)$$

где 
$$\Delta(x, y, h) = y'(x) + \frac{h}{2} y''(x) + \dots + \frac{h^p}{p!} y^{(p)} + O(h^p).$$

Практическое применение этих разложений ограничено лишь теми задачами, для которых вычисляются высшие производные. Примерно в начале XX века Рунге, а затем Хойн и Кутта предложили метод, основанный на построении функции  $\varphi(x, y, h)$ , которая близка к  $\Delta(x, y, h)$ , но не содержит производных от функции  $f(x, y)$ . Этот процесс «подгонки» рядов Тейлора для решения уравнения  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  основан на представлении (явный  $m$ -этапный метод Рунге-Кутты)

$$\varphi(x, y, h) = \sum_{r=1}^m c_r \cdot k_r, \quad (15.29)$$

где  $k_1 = f(x, y)$ ,  $k_r = f(x + ha_r, y + h \cdot \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} \cdot k_s)$ . Тут  $h$ -шаг интегрирования,  $c_r$ ,  $a_r$ ,  $b_{rs}$  - постоянные, подлежащие определению.

Рассмотрим двух-этапный метод Рунге-Кутты. В этом случае ( $m=2$ ) имеем неизвестные константы  $c_1, c_2, a_2, b_{21}$ . Искомая функция  $\varphi(x, y, h)$  имеет вид

$$\varphi(x, y, h) = c_1 f(x, y) + c_2 f(x + ha_2, y + b_{21} f(x, y)). \quad (15.30)$$

Раскладывая  $\varphi(x, y, h)$  по степеням  $h$ , имеем

$$\varphi(x, y, h) = (c_1 + c_2) f(x, y) + hc_2 [a_2 f'_x(x, y) + b_{21} f'_y(x, y) \cdot f(x, y)] + O(h). \quad (15.31)$$

Сравниваем это разложение с (15.28)

$$\Delta(x, y, h) = f(x, y) + \frac{h}{2} [f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot f(x, y)] + O(h).$$

Это дает

$$c_1 + c_2 = 1, \quad c_2 a_2 = \frac{1}{2}, \quad c_2 b_{21} = \frac{1}{2}. \quad (15.32)$$

Выведем свободный параметр  $\alpha$ , так чтобы

$$c_1 = 1 - \alpha, \quad c_2 = \alpha, \quad a_2 = b_{21} = \frac{1}{2} \alpha. \quad (15.33)$$

Существует неопределенность в выборе  $\alpha$ . Взяв  $\alpha = \frac{1}{2}$  находим формулу Хойна

$$y_{n+1} = y + h \left[ \frac{1}{2} f(x_n, y_n) + \frac{1}{2} f(x_n + h, y_n + h \cdot f(x_n, y_n)) \right] \quad (15.34)$$

**Пример 15.6.** Решить ДУ  $y' = y - x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y(x_0) = 1.5$ .  
 $x \in [0; 1.5]$ ,  $h = 0.25$ .

Решение.

По формуле (15.34) имеем

$$y_1 = 1.5 + 0.25 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 1.5 + \frac{1}{2} \cdot (1.875 - 0.25) \right] = 1.8906;$$

$$y_2 = 1.8906 + 0.25 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot (1.8906 - 0.25) + \frac{1}{2} \cdot (2.3007 - 0.5) \right] = 2.3207;$$

$$y_3 = 2.3207 + 0.25 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot (2.3207 - 0.5) + \frac{1}{2} \cdot (2.7759 - 0.75) \right] = 2.8015;$$

$$y_4 = 2.8015 + 0.25 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot (2.8015 - 0.75) + \frac{1}{2} \cdot (3.3143 - 1.0) \right] = 3.3472;$$

$$y_5 = 3.3472 + 0.25 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot (3.3475 - 1.0) + \frac{1}{2} \cdot (3.9340 - 1.25) \right] = 3.9761;$$

$$y_6 = 3.9761 + 0.25 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot (3.9761 - 1.25) + \frac{1}{2} \cdot (4.02873 - 1.5) \right] = 4.6329.$$

Наиболее известной является формула четырех-этапного метода Рунге-Кутты, алгоритм расчета которого следующий:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \Delta y_n, \quad (15.35)$$

$$\Delta y_n = \frac{1}{6} (\alpha_1^{(n)} + 2\alpha_2^{(n)} + 2\alpha_3^{(n)} + \alpha_4^{(n)}), \quad \text{где } \alpha_1^{(n)} = f(x_n, y_n),$$

$$\alpha_2^{(n)} = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h\alpha_1^{(n)}}{2}\right), \quad \alpha_3^{(n)} = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h\alpha_2^{(n)}}{2}\right), \quad (15.36)$$

$$\alpha_4^{(n)} = f(x_n + h, y_n + h\alpha_3^{(n)}).$$

Таким образом, выявляется следующая последовательность при решении ДУ четырех-этапным методом Рунге-Кутты

$$\{x_0, y_0\} \rightarrow \alpha_1^{(0)} \rightarrow \alpha_2^{(0)} \rightarrow \alpha_3^{(0)} \rightarrow \alpha_4^{(0)} \rightarrow \Delta y_0 \rightarrow \{x_1, y_1\} \rightarrow \\ \rightarrow \alpha_1^{(1)} \rightarrow \alpha_2^{(1)} \rightarrow \alpha_3^{(1)} \rightarrow \alpha_4^{(1)} \rightarrow \{x_2, y_2\} \rightarrow \dots \rightarrow \{x_n, y_n\}.$$

Геометрический смысл  $\alpha_1^{(n)}$  состоит в том, что они являются угловыми коэффициентами касательных (производными) к кривой  $y(x)$  на участке  $[x_n, x_{n+1}]$ .  $\alpha_1^{(0)}$  - производная в начальной точке,  $\alpha_4^{(0)}$  - на конце отрезка. По величине они не сильно различаются и примерно равны  $\frac{\Delta y_n}{h}$ .

В результате вычислений по формулам (15.35)-(15.36) находим:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1.5; \quad \alpha_1^{(0)} = 1.5, \quad \alpha_2^{(0)} = [1.6875 - 1.25] = 1.5624, \\ \alpha_3^{(0)} = [1.6953 - 0.125] = 1.5703, \quad \alpha_4^{(0)} = [1.8926 - 0.25] = 1.6426.$$

$$\text{Это дает } y_0 = 0.3920, \quad y_1 = 1.8920.$$

Результаты решения уравнения  $y' = y - x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y(x_0) = 1.5$  рассмотренными выше методами приведены в таблице 15.1.

Таблица 15.1

x	y			
	Метод Эйлера	Модифицир. Метод Эйлера	Рунге-Кутты 2-этапа	Рунге-Кутты 4-этапа
0.25	1.8750	1.8906	1.8906	1.8920
0.5	2.2812	2.3200	2.3207	2.3943
0.75	2.7205	2.7892	2.8015	2.8084
1.00	3.2206	3.3315	3.3472	3.3590
1.25	3.7758	3.9558	3.3761	3.9950
1.50	4.4072	4.6856	4.6329	4.7406

Эта таблица позволяет сопоставить результаты расчета по наиболее точному в данном случае четырех-этапному методу Рунге-Кутты и наиболее простому методу Эйлера.

## §16 Метод наименьших квадратов

В ряде случаев, когда имеется набор экспериментальных точек  $\{y_i\}$ , являющихся функцией некоторого аргумента  $x$  – набора  $\{x_i\}$  (например, зависимость давления от объема идеального газа, зависимость сопротивления от температуры и т.д.), необходимо описать зависимость  $y(x)$  какой-то простой функцией  $y^* = f(x)$ . При этом в отличие от метода интерполяции не требуется совпадения чисел  $f(x_i)$  и  $y_i$ , и количество подгоночных параметров должно быть минимально. Критерием наилучшей

выбранной функции  $y^* = f(x)$ , описывающей таблицу  $\{x_i, y_i\}$  часто служит метод наименьших квадратов.

Обозначим значения  $y^* = f(x_i)$  через  $y_i^*$ . Они не совпадают с экспериментальными значениями  $y_i$ . Введем невязку

$$\varepsilon_i = y_i - y_i^* \quad (16.1)$$

Общее количество таких невязок равно числу экспериментальных точек и желательно, чтобы они были как можно меньше. Общий принцип наибольшей близости кривой  $y^* = f(x)$  к экспериментальным точкам в методе наименьших квадратов сводится к поиску минимума функционала

$$\min \left\{ \Phi(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \right\}, \quad (16.2)$$

где  $n$ -число точек. При таком подходе наименьшее значение  $\Phi(\varepsilon_i) = 0$  достигается при  $y_i^* = y_i$ . Обычно минимум  $\Phi(\varepsilon_i)$  при конкретной выбранной аналитической зависимости  $y^* = f(x)$  не равен нулю.

Вид аппроксимирующей функции  $y^* = f(x)$  может быть разным и мы в этом параграфе рассмотрим наиболее простой ее вид:

$$y^* = ax + b \quad (16.3)$$

с двумя подгоночными параметрами. Как будет показано ниже, линейная зависимость (16.3) может быть использована в самых разнообразных аппроксимациях даже явно нелинейных зависимостей. Невязка в этом случае равна

$$\varepsilon_i = y_i - ax_i - b, \quad (16.4)$$

а

$$\Phi(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \quad (16.5)$$

Из (16.5) видно, что  $\Phi(\varepsilon_i)$  параметрически зависит от  $a$  и  $b$ . Необходимые условия минимума  $\Phi(\varepsilon_i)$  определяются равенствами

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0. \quad (16.6)$$

Выписывая производные в явном виде, получим систему из двух уравнений для определения  $a$  и  $b$ .

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i)x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} . \quad (16.7)$$

Решаем систему уравнений (16.7) методом Крамера. Это дает

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad (16.8)$$

$$b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n y_i \right) - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}. \quad (16.9)$$

Эти формулы позволяют легко рассчитать параметр  $a$  в случае аппроксимирующей функции  $y^* = ax$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (16.10)$$

**Пример 16.1.** По приведенной таблице экспериментальных данных определить аппроксимирующую функцию  $y^* = ax + b$ .

$x$	0	2	4	6	8	10	12	14
$y$	5	6.8	9.25	11	13.25	15.2	17.5	19.5

Решение.

Здесь  $n=8$ . Далее находим:

$$\sum_{i=1}^8 x_i = 56, \quad \sum_{i=1}^8 y_i = 97.5, \quad \sum_{i=1}^8 x_i y_i = 857.6, \quad \sum_{i=1}^8 x_i^2 = 560,$$

$$a = \frac{8 \cdot 857.6 - 56 \cdot 97.5}{8 \cdot 560 - 56^2} = \frac{1400.8}{1344} = 1.042,$$

$$b = \frac{560 \cdot 97.5 - 56 \cdot 857.6}{8 \cdot 560 - 56^2} = \frac{6574.4}{1344} = 4.891.$$

Таким образом,  $y^* = 1.042x + 4.891$ . Результаты расчета  $y^*$  приведены в таблице

$x$	0	2	4	6	8	10	12	14
$y$	5	6.8	9.25	11	13.25	15.2	17.5	19.5
$y^*$	4.891	6.975	9.059	11.143	13.227	15.311	17.395	19.429
$ \varepsilon_i $	0.109	0.175	0.191	0.143	0.023	0.111	0.105	0.279

Из этой таблицы видно, что  $|\varepsilon_i| < 0.28$ .

**Пример 16.2.** По приведенной таблице экспериментальных данных определить аппроксимирующую функцию  $y^* = ax$ .

Решение.

$x$	1	1.5	2.5	3	4.5	5	6
$y$	67	101	168	202	301	334	404
$y^*$	69.07	103.605	172.67	207.21	310.815	345.35	414.42

Здесь получаем  $y^* = 69.07x$ .

В том случае, если исходный набор экспериментальных данных удобно описывать не линейной двухпараметрической функцией (16.3), а одной из нелинейных функций, таких как  $y^* = a \cdot b^x$  - показательная,  $y^* = a \ln x + b$ , логарифмическая,  $y^* = a \cdot x^b$  - степенная,  $y^* = a + b/x$  - гиперболическая,  $y^* = 1/(ax + b)$ ,  $y^* = x/(ax + b)$  - дробно-рациональные, или другие функции, то с помощью замены переменных можно их свести к линейной зависимости.

Например, рассмотрим случай  $y^* = a \cdot x^b$ . Заменяем исходный набор экспериментальных данных  $\{x_i, y_i\}$  на  $\{\bar{x}_i, \bar{y}_i\}$ , где  $\bar{x}_i = \ln x_i$ ,  $\bar{y}_i = \ln y_i$ , если, конечно,  $\forall x_i$  и  $\forall y_i \in R_+$ . Тогда искомая зависимость приобретет вид  $\bar{y}^* = \bar{a} \cdot \bar{x} + \bar{b}$ , где  $y^* = e^{\bar{y}^*}$ ,  $x = e^{\bar{x}}$ ,  $b = \bar{a}$ ,  $a = e^{\bar{b}}$ .

В более общем случае, когда мы ищем  $y^*(x)$  в виде полинома  $m$ - порядка ( $m < n-1$ ), т.е.

$$y^* = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m, \quad (16.11)$$

то нашей задачей является нахождение наиболее вероятных коэффициентов  $a_0, a_1, \dots, a_m$  по результатам наблюдений. (При  $m=n$  задача сводится к интерполяции, рассмотренной в §7). В этом случае ищем минимум

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \left[ y_i - (a_0 + a_1x_i + \dots + a_mx_i^m) \right]^2 \quad (16.12)$$

Определяя необходимое условие минимума  $\Phi$  как функции от  $a_0, a_1, \dots, a_m$ , т.е. требуя чтобы

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_0} = \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = \dots = \frac{\partial \Phi}{\partial a_m} = 0, \quad (16.13)$$

приходим к системе  $m$  уравнений

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^m = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} = \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i, \\ \vdots \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^m + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^{m+2} + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{2m} = \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i^m. \end{cases} \quad (16.14)$$

Или в сжатой форме

$$X \cdot \vec{a} = \vec{b}, \quad (16.15)$$

где  $\vec{a} = \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ ,  $X_{kq} = \sum_{i=1}^n x_i^{k+q}$ ,  $\vec{b} = \left\{ \sum_{i=1}^n y_i, \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i, \dots, \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i^m \right\}$ .

В том случае, если  $m=2$ , т.е. ищем  $y^*(x)$  в виде полинома второй степени, то система уравнений (16.14) содержит три неизвестных параметра. Пусть значения  $x_i$  расположены эквидистантно, т.е.  $x_k = x_1 + kh$ , где  $k=0, 1, \dots, n-1$ ,  $h$  – постоянная. Тогда можно выбрать начало координат в центре отрезка

$[x_1, x_n]$  так, что при этом все суммы  $\sum_{i=1}^n x_i^k$ , где  $k$  – нечетное, обратятся в

ноль. Обозначим новые значения координат  $\tilde{x}_i = x_i - (x_1 + x_n)/2$ . При этом система уравнений (16.14) упрощается, так как в матрице  $\tilde{X}_{kq}$  имеется много нулевых элементов:

$$\begin{cases} na_0 + a_2 \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a_1 \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^4 = \sum_{i=1}^n y_i \cdot \tilde{x}_i^2 \end{cases} \quad (16.16)$$

Ее решение имеет вид

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^4\right) - \left(\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^2 y_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^2\right)}{n \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^4 - \left(\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^2\right)^2}, & a_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i y_i}{\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^2}, \\
a_2 &= \frac{n \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^2 y_i - \left(\sum_{i=1}^n y_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^2\right)}{n \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^4 - \left(\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^2\right)^2}. & & (16.17)
\end{aligned}$$

**Пример 16.3.** Аппроксимировать приведенные ниже в таблице экспериментальные данные полиномом 2-ой степени.

$x_i$	0	2	3.5	6.5	8	10
$y_i$	-17	-6	-0.375	4.125	3	-12

Решение.

В данном случае значения  $x_i$  расположены не эквидистантно, но симметрично относительно середины отрезка  $[0,10]$ . Поэтому формулы (16.17) можно использовать. Переходим к новой системе координат  $\tilde{x}_i = x_i - 5$ . Тогда набор точек имеет вид

$\tilde{x}_i$	-5	-3	-1.5	1.5	3	5
$y_i$	-17	-6	-0.375	4.125	3	-12

Величины параметров равны:  $a_0 = 2.5$ ,  $a_1 = 1.5x$ ,  $a_2 = -0.48$ , т.е. исходный набор данных приближенно описывается формулой

$$y^* = 2.5 + 1.5(x_i - 5) - 0.48(x_i - 5)^2.$$

## Литература

1. Калиткин Н.Н. Численные методы. Уч. пособие, БХВ-Петербург, 2011г.;
2. Д.П. Костомаров, А.П., Фаворский. Вводные лекции по численным методам, Москва, Логос, 2004г.;
3. Н.Н. Калиткин, Е.А. Альцина. Численные методы учебник в 2-х кн., Москва, Академия, 2013г. ;
4. Зализняк В.Е.. Численные методы. Основы научных вычислений, Москва, Юрайт, 2018г.;
5. Бахвалов Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях, уч. пособие для вузов, Москва, Бином, 2012г.;
6. А.В, Зенков. Численные методы. Уч. пособие, Москва, Юрайт, 2019г.;
7. Амосов А.А. Вычислительные методы для инженеров. Уч. пособие, Москва, Высш. Шк., 1994г.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Введение.	4
§1. Элементарная теория погрешностей	6
§2. Вычисление значений многочлена по схеме Горнера	10
§3. Вычисление значений различных функций	14
§4. Интерполирование и экстраполирование функций	15
§5. Интерполяционный многочлен Лагранжа	17
§6. Конечные разности	22
§7. Интерполяционный многочлен Ньютона для функций с равностоящими узлами	26
§8. Интерполяционный многочлен Ньютона для функций с неравностоящими узлами	30
§9. Решение алгебраических и трансцендентных уравнений методом итераций	37
9.1 Метод итераций	41
§10. Решение уравнений с одним неизвестным методом Ньютона (методом касательных)	45
§11. Метод хорд и касательных	48
§12. Метод половинного деления (дихтомии)	51
§13. Решение систем линейных уравнений	55
13.1 Метод Гаусса	
§14. Приближенное вычисление интегралов	60
14.1 Метод трапеций	61
14.2 Метод Симпсона	65
14.3 Формулы Ньютона-Котеса для приближенного вычисления интегралов	68
§15. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений	71
15.1 Метод Пикара	74
15.2 Метод Эйлера	76
15.3 Модификация метода Эйлера	77
15.4 Методы Рунге-Кутты	78
§16. Метод наименьших квадратов	80
Литература	86
СОДЕРЖАНИЕ	87

