**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**  
**«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»**  
**Саровский физико-технический институт —**  
**филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»**  
**(СарФТИ НИЯУ МИФИ)**

**ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ   
И ЭЛЕКТРОНИКИ**

**КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ**

***В. В. Дружинин и А.В. Лебедева***

**Сборник задач**

**по теории функций   
комплексного переменного**

**Утверждено  
на заседании кафедры  
высшей математики  
\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  
Учебно-методическим Советом ФИТЭ**

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

**Учебно-методическим Советом СарФТИ**

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

**САРОВ**

**2017**

**УДК 530.1**

**В. В. Дружинин, А. В. Лебедева**

**Сборник задач по теории**

**функций комплексного переменного**

Методическое пособие составлено на основе лекций, читаемых авторами студентам Саровского физико-технического института (СарФТИ). Задачник содержит сравнительно простые задачи, в целях хорошего понимания теории функций комплексного переменного, учитывая сравнительно небольшое число лекционных часов по программе курса. В задачнике впервые описано понятие многоцентрового ряда Лорана, развитого авторами пособия, которое приводит к значительному сокращению времени решения ряда задач. В частности, фактически «отменен» широко известный и применяемый метод неопределенных коэффициентов в силу его громоздкости по сравнению с методом многоцентрового ряда Лорана.

© Дружинин Виктор Владимирович, д.ф.м.н., проф.

© Лебедева Александра Витальевна, ст. преподаватель.

СарФТИ 2017 г.

**Содержание**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| §1. | Понятие комплексного числа…………………………………………. | **5** |
| §2. | Операции над комплексными числами………………………………. | **5** |
| §3. | Тригонометрическая форма комплексного числа…………………… | **6** |
| §4. | Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа……… | **7** |
| §5. | Операции над комплексными числами в тригонометрической и показательной форме…………………………………………………... | **8** |
| §6. | Геометрическая интерпретация комплексного числа……………….. | **9** |
| §7. | Функция комплексного переменного………………………………… | **9** |
| §8. | Предел последовательности комплексных чисел. Предел функции комплексного переменного……………………………………………. | **10** |
| §9 . | Производная от функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана………………………………………................................ | **11** |
| §10. | Восстановление аналитической функции по ее действительной (мнимой) части…………………………………………………………. | **12** |
| §11. | Однолистные функции………………………………………………… | **12** |
| §12. | Интеграл от функции комплексного переменного……………….….. | **12** |
| §13. | Интегральные формулы Коши………………………………………… | **14** |
| §14. | Ряды в комплексной плоскости…………………………………….…. | **15** |
| §15. | Многоцентровый ряд Лорана…………………………………………. | **17** |
| §16. | Применение многоцентрового ряда Лорана…………………………. | **23** |
| §17. | Особые точки функций комплексного переменного………………… | **25** |
| §18. | Нахождение вычетов…………………………………………………... | **27** |
| §19. | Основная теорема о вычетах……………………………………….….. | **28** |
| §20. | Вычисление интегралов по замкнутому контуру с помощью вычетов в бесконечно удаленной точке *z = ∞*............................................... | **30** |
| §21. | Интегралы по контору от многозначных функций…………………... | **31** |
| §22. | Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов……… | **31** |
| §23. | Вычисление несобственных интегралов с использованием леммы Жордана………………………………………………………………… | **32** |
| §24. | Вычисление определенных интегралов от тригонометрических функций…………………………………………………………………. | **33** |
| §25. | Мероморфные функции и их применение……………………………. | **34** |
| §26. | Преобразования Лапласа………………………………………………. | **36** |
| §27. | Свойства преобразований Лапласа…………………………………… | **37** |
| §28. | Теорема о дифференцировании оригинала……………………….….. | **38** |
| §29. | Теорема о дифференцировании изображения………………………... | **39** |
| §30. | Теоремы об интегрировании оригинала и интегрировании изображения……………………………………………………….. | **39** |
| §31. | Теорема о запаздывании……………………………………………….. | **41** |
| §32. | Теорема смещения………………………………………………........... | **41** |
| §33. | Теорема о свертках…………………………………………………….. | **41** |
| §34. | Гамма-функции и их свойства………………………………………… | **42** |
| §35. | Линейные дифференциальные уравнения. Системы линейных дифференциальных уравнений……………………………. | **43** |
|  | Ответы…………………………………………………………………... | **46** |

**§ 1. Понятие комплексного числа**

*Re(z)* и *Im(z)* действительная и мнимая части комплексного числа.

**1.1.** Найти *Re(z)* и *Im(z)*:  
а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ;

ж) ; з) ; и) ; к).

**1.2.** Найти *Re(z)* и *Im(z)*:  
а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) ; е) .

**1.3.** Найти :  
а); б) ; в) 7;

г) ; д) ; е) ;

ж) ; з) ; и) ; к)

**1.4.** Найти :  
а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) ; е) .

**§ 2. Операции над комплексными числами**

**2.1.** Выполнить действия:  
а)  ; б) ; в) ;   
г) ; д) ;е) .  
ж) ; з) ;   
и) ; к) .

**2.2.** Выполнить действия:  
а) ; б) ; в) ;  
г) ; д) ; е) .

**2.3.** Выполнить действия:  
а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) .

**2.4.** Выполните действия.  
а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) ; е) .

**§ 3. Тригонометрическая форма комплексного числа**

В тригонометрической форме комплексное число имеет вид   
*z = r(cos φ + isin φ)* , где *r ==-* модуль комплексного числа, φ –аргумент комплексного числа. Если изображать z на плоскости комплексного переменного точкой, то угол отклонения вектора *ОZ* от оси *ОX* в радианах против часовой стрелки равен аргументу комплексного числа.

Если *x > 0*, то φ *= arctg(y/x);* если *x = 0, y > 0*, то *φ = π/2*; если *x = 0, y < 0*, то *φ = -π/2*; если *x < 0, y > 0, φ = π + arctgφ*; если *x < 0, y < 0, φ = - π + arctgφ* **.** Для *x = 0, y = 0* аргумент не существует. Значения называют главным значением аргумента.

**3.1.** Найти :  
а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) *4 + 3i;* е) *i52 + i100*.

ж) ; з) ; и); к) .

**3.2.** Найти :  
а) ; б) ; в) ; г) .

**3.3.** Найти аргумент комплексного числа:  
а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) .

**3.4.** Найти аргумент комплексного числа:  
а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) .

**§ 4. Формула Эйлера .  
Показательная форма комплексного числа**

**4.1.** Выполнить действия:  
а) ; б) ; в) ; г) ;  
д) ;е) ;ж) ;з) .

**4.2.** Выполнить действия:  
 а) ; б) ;   
в) ; г)  ; д) ; е) .

**§5. Операции над комплексными числами   
в тригонометрической и показательной форме**

Корень из комплексного числа z =  степени *n*, находится по формуле , где n ∈ N, k∈Z.

Формула Муавра имеет вид .

**5.1.** Возвести в степень:  
а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) ; е) .

ж) ; з) ;

**5.2.** Извлечь корень из комплексного числа:  
а) ; б) ; в) ; г) ; д) ;

**5.3.** Применяя формулу Муавра, найти:  
а) ; б) ; в) ; г) .

Доказать формулы

д) ;

е) .

Использовать бином Ньютона.

**5.4.** Применяя формулу Муавра, найти:  
а) ; б) ; в) ; г) .

Доказать формулы.  
 д) ;

е) .

Использовать бином Ньютона.

**§ 6. Геометрическая интерпретация комплексного числа**

**6.1.** Определить линии на плоскости комплексного переменного:  
а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) ; е) .

**6.2.** Определить линии на плоскости комплексного переменного:  
а) ; б) ; в) ;  
г) ; д) ; е) .

**6.3.** Определить область на плоскости комплексного переменного:  
а) ; б) ; в) ;   
 г) ; д) ; е) .

**6.4.** Определить область на плоскости комплексного переменного:  
а) * ≥ 3*; б) R, R→∞; в) ;   
г) ; д) ; е) .

**§ 7. Функция комплексного переменного**

**7.1.** Выделить действительную u(x,y) = *Re z* и мнимую *Im z* части функции комплексного переменного:  
а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) ; е) .

**7.2.** Выделить действительную (*Re z*) и мнимую (*Im z*) части функции комплексного переменного:  
а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) .

**7.3.** Найти .

**7.4.** Найти .

**7.5** Вычислить значения функции в указанных точках

а) ; б) ; в) ; г) ; д) ;

е) ; ж) ; з)

**7.6** Найти все значения степеней

а) б) в) г) ; д)

**§ 8. Предел последовательности комплексных чисел.   
Предел функции комплексного переменного**

**8.1.** Найти пределы последовательностей и функций:  
а) ; б) ; в) ;

г) ; д) ;е) .

**8.2.** Найти пределы последовательностей и функций:  
а) ; б) ; в) ;  
г) ; д) .

**§ 9. Производная от функции комплексного переменного.   
Условия Коши-Римана**

Условия Коши-Римана имеют вид 

**9.1.** Проверить условия Коши – Римана для функций:  
а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) ; е) .

**9.2.** Проверить условия Коши – Римана для функций:  
а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) ; е) .

**9.3.** Сравнивая заданную функцию с элементарной функцией, определить выполнение условий Коши – Римана для функций:  
а) ; б) ; в) ;  
г) ; д) ; е) .

**9.4.** Сравнивая заданную функцию с элементарной функцией, определить выполнение условий Коши – Римана для функций:  
а) ; б) ; в);   
г) ; д) .

**9.5.** Дифференцируемы ли функции комплексного переменного:  
а) ; б) ; в) ;  
г) ; д) ; е) ?

**9.6.** Дифференцируемы ли функции комплексного переменного:  
а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) ; е) ?

**§ 10. Восстановление аналитической функции   
по ее действительной (мнимой) части**

**10.1.** По известной  ,   
найти  :  
а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) ; е) .

**10.2.** По известной  ,   
найти  :  
а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) ; е) .

**§ 11. Однолистные функции**

Если при *z1≠z2 ,* то функция комплексного переменного   
однолистна.

**11.1.** Однолистны ли отображения:  
а) ; б) ; в) ?

**11.2.** Однолистны ли отображения:  
а) ; б) ; в) ?

**§ 12. Интеграл от функции комплексного переменного**

**12.1.** Вычислить интегралы:  
а) , где *АВ* - линия ;

б) , где *АВ* - линия ;

в) , где *АВ* - линия ;

г) , где *АВ* - линия ;   
д) , где *АВ* - линия ;

е) , где *АВ* - линия .

**12.2.** Вычислить интегралы:  
а) , где *АВ* - линия ;

б) , где *АВ* - линия ;

в) , где *АВ* - линия ;

г) , где *АВ* - линия ;   
д) , где *АВ* - линия

**12.3.** Справедлива ли первая теорема Коши: если f(z) регулярна в области D, то по любой замкнутой кривой из этой области:  
а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) ; е) ?

**12.4.** Справедлива ли первая теорема Коши:  
а) ; б) ; в) ;  
г) ; д) ; е) ?

**§ 13. Интегральные формулы Коши**

Если f(z) регулярна в области D, то для любой замкнутой кривой из этой области и для любого z, лежащей внутри γ, справедлива формула Коши  Формула Коши обобщается на случай производной функции комплексного переменного:

**13.1.** Вычислить интегралы:  
а) ; б) ; в) ;   
 г) ; д) ; е) .

**13.2.** Вычислить интегралы:  
а) ; б) ; в) ;

г) ; д) ; е) .

**13.3.** Вычислить интегралы:  
а) ; б) ; в) ;;   
г) ; д) ; е) .

**13.4.** Вычислить интегралы:  
а) ; б) ; в) ;  
г) ; д) ; е) .

**§ 14. Ряды в комплексной плоскости**

**14.1** Определить сходимость рядов:  
а) ; б) ; в) ;  
г) ; д) ; е) .

**14.2.** Определить сходимость рядов:  
а) ; б) ; в) ;  
г) ; д) ; е) .

**14.3.** Разложить функции комплексного переменного в ряд Тейлора около точки *z0*:  
а) ; б) ; в) ;

г) ; д) ; е) .

**14.4.** Разложить функции комплексного переменного в ряд Тейлора около точки *z0*:  
а) ; б) ; в) ;  
г) ; д) ; е) .

**14.5.** Разложить функции комплексного переменного в ряд Маклорена около точки *z0 =0*:  
а) ; б) ; в) ;  
г) ; д) ; е).

**14.6.** Разложить функции комплексного переменного в ряд Маклорена около точки *z0 = 0*:  
а) ; б) ; в) ;   
 г) ; д) ; е) .

**14.7.** Разложить функции комплексного переменного в ряд Маклорена около особой точки:  
а) ; б) ; в) .

**14.8.** Разложить функции комплексного переменного в ряд Маклорена около особой точки:  
а) ; б) ; в) .

**14.9.** Определить порядок нуля регулярной функции:  
а) ; б) ; в) ; г) ;  
д) ; е) ; ж) ;  
з) ; и) .

**14.10.** Определить порядок нуля регулярной функции:  
а) ; б) ; в) ;  
г) ; д) ; е) ;  
ж) ; з) ; и) .

**14.11.** Разложить функцию комплексного переменного в ряд Лорана около точки :  
а) ; б) ; в) ;

**14.12.** Разложить функцию комплексного переменного в ряд Лорана около точки *z0  = 0*:  
а) ; б) ; в) ;

г) ; д) ; е) .

**14.13.** Разложить функции комплексного переменного в ряд Лорана в области *0<z<∞*:  
а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) ; е) .

**§ 15. Многоцентровый ряд Лорана**

Для функции комплексного переменного *f(z),* имеющей   
n особых точек, в современных учебниках предлагается следующий способ разложения *f(z)* в ряд Лорана. Берется первая особая точка *z*1, определяется кольцо сходимости относительно этой точки, и в этой области записывается ряд Лорана относительно *z*1. Потом берется вторая особая точка z2 и относительно нее производится такая же процедура. Таким образом, проходятся все особые точки, и в результате имеем n рядов Лорана, каждый в своей области.

Например, в задачнике Л. И. Волковысский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович «Сборник задач по теории функций комплексного переменного», М., 1970 г. в задаче № 545 требуется разложить f(z) = 1/z(1 - z) в ряд Лорана. Имеем две особые точки: z1 = 0 и z2 = 1, обе - простые полюса. Выделяются три области: открытый круг радиуса R = 1, содержащий z1 = 0; , второй открытый круг, содержащий z2 = 1, и - внешняя область круга радиуса R =1, содержащая бесконечно удаленную особую точку. В этих областях разложение f(z) = 1/z(1 - z) имеет вид

, ;

, ; (1)

, .

Автором данного сборника задач Дружининым В. В. предлагается другой (альтернативный) метод разложения f(z) = 1/z(z - 1) в многоцентровый ряд Лорана (термин введен впервые)

. (2)

- плоскость комплексного переменного. Это значит, что разложение (2) справедливо во всей плоскости комплексного переменного за исключением двух точек z1=0 и z2=1.

Сравнение (1) и (2) показывает, что второе разложение более компактно, требует для его получения значительно меньше усилий и более прозрачно, так как сразу выделены особые точки и виден их порядок.

Может быть в нашем разложении (2) что-то упущено? Обсудим этот вопрос. Для чего вообще нужен ряд Лорана? Рассматривая современные учебники и сборники задач, можно выделить решение трех вопросов с помощью ряда Лорана: приближенный расчет *f(z*), характер особой точки *z*i и вычисление вычета *res f(zi)* в этой точке. По определению *res f(zi)* равен коэффициенту ряда Лорана с-1 при *1/ (z-zi*) в разложении около особой точки *zi*.

Приближенный расчет значения f(z) по формуле (2) более точен, чем по формуле (1), так как по (1) надо обрывать соответствующий ряд на каком-то слагаемом, тем самым внося ошибку за счет отброшенной части бесконечной суммы. Кроме этого (1) не позволяет рассчитать *f(z),* например, в точке *z = (1+i)/21/2*, так как эта точка лежит на окружности , которая вырезана в разложении (1).

Характер особых точек в (2) тот же самый, что и в разложении (1).

Вычеты по (2) также равняются коэффициенту перед 1/(z-zi), то есть *res f(0) = 1, res f(1) = - 1* – тот же самый результат, что и по разложению (1).

Таким образом, по нашему мнению, при разложении f(z) в ряд Лорана можно пользоваться обоими подходами, исходя из минимума затрат времени.

Разложение рациональной функции (2) на элементарные дроби производится обычно методом неопределенных коэффициентов. Этот метод описан даже в школьных учебниках и широко применяется в математике, в частности, при вычислении интегралов, нахождении решений дифференциальных уравнений операционным методом (преобразование Лапласа), резонансных задачах, переходных процессах и т.д.

Одним из авторов этого задачника (Дружининым В.В.) показано, что метод неопределенных коэффициентов можно заменить на более быстрый и эффективный метод: расчет коэффициентов многоцентрового ряда Лорана.

Напомним, в чем состоит метод неопределенных коэффициентов на конкретном примере. Пусть надо разложить функцию



на элементарные дроби, т.е. найти значения коэффициентов *A, B и C*. Для этого приводим правую часть выражения к общему знаменателю и, сравнивая числители левой и правой частей, получаем уравнение



.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях, получаем систему линейных уравнений



решая которую, находим . .

Если исходный полином знаменателя рациональной функции содержит n корней, каждый из которых имеет кратность *sk*, то надо найти *N =* коэффициентов при элементарных дробях, т.е. решить систему из *N* уравнений. Даже при *N = 10* такая задача решается практически только на компьютере. С помощью многоцентрового ряда Лорана такой расчет при простых полюсах можно сделать без калькулятора всего за одну минуту.

Покажем, как это делается. Автором данного задачника   
Дружининым В.В. доказана следующая   
**Теорема**. Если рациональная функция *f(z) = 1/PN(z)* имеет 1, 2, …,k,…, n полюсов zk порядка sk, т.е. , то она раскладывается в многоцентровый ряд Лорана



, (3)

где коэффициенты рассчитываются по формуле () .

(4).



***.***

Проведем **доказательство** на примере двух полюсов первого и второго порядков, т.е. возьмем f(z) = 1/(z - a)(z - b)2. Нам надо представить f(z) в виде

 . (5)

Вначале разложим функцию около простого полюса z1 = a. Умножим (5) на  и перейдем к пределу .В результате получим

Это значение получается из (4) при . Чтобы найти , умножим (5) на  и перейдем к пределу . В результате получим Этот результат также соответствует (4) при .Для того, чтобы найти возьмем производную по z от , что дает

.

В последнем выражении переход к пределу  дает



.

Этот результат получается из (4) при 

Данное доказательство легко обобщается на большее количество полюсов произвольных порядков. Теорема доказана.

Особенно просто разложение выглядит для только простых полюсов f(z), т.е. для случая, когда все sk=1.Исходная функция имеет вид  ,



для , . .(6)

Покажем на примере, как пользоваться формулой (6). Пусть

.



.

Выше мы уже провели нахождение коэффициентов *A, B и C* методом неопределенных коэффициентов. По алгоритму (6) , чтобы найти А, убираем (прикрываем) x, а в оставшуюся часть {*1/(x-1)(x+4)}*подставляем отброшенный корень *x1=0*. Это дает *А= -1/4.* Далее, прикрываем (удаляем) *(x-1),* а в оставшуюся часть раскладываемой функции {*1/x(x+4)}* подставляем удаленный корень *x2=1*. Это дает *В = 1/5*. Точно также С находится подстановкой соответствующего корня *x3= -*4 в {*1/x(x-1*)}, *С=1/20*. Именно эти числа мы получили выше методом неопределенных коэффициентов.

Разложение мероморфной функции *f(z*), т.е. функции, имеющей в каждой ограниченной области плоскости комплексного переменного конечное число полюсов, на элементарные дроби по формулам (3-4) резко сокращает вычисления. Эта методика фактически «отправляет в отставку» метод неопределенных коэффициентов, так как разложение в многоцентровый ряд Лорана проводится быстро и аналитически, т.е. без составления системы линейных уравнений и численного их решения.

В теории функций комплексного переменного, имеющей многовековую историю, этот вопрос, конечно, обсуждался. Примерно 150 лет тому назад во времена Ж. Лиувилля – французского математика – была доказана теорема о разложении мероморфной функции на элементарные дроби.

В учебнике Ю. В. Сидорова, М. В. Федорюка,. М И. Шабунина «Лекции по ТФПК», 1982 г. на стр. 142 доказана теорема: Мероморфная функция f(z) с конечным m (или бесконечным) числом простых полюсов ak ≠ 0 записывается в виде

 , (7)

где Ak – вычет в полюсе ak. Эта формула отличается от (3-4) наличием двух слагаемых: . Наш анализ показывает, что эти слагаемые друг друга уничтожают, т.е. они вообще не нужны в (7). Докажем это на простом примере. Пусть f(z) имеет два простых полюса z1= a и z2 = b, причем оба не равны нулю.  
Тогда





Случай трех и более простых полюсов не равных нулю дает методом математической индукции тот же результат.

По-видимому, наличие двух ненужных взаимно уничтожающихся слагаемых в (7) и в связи с этим громоздкостью расчетов не сделали этот метод многоцентрового разложения более удобным и быстрым по сравнению с методом неопределенных коэффициентов и формула (7) практически не используется . Наш подход избавлен от этих недостатков и, более того, позволяет работать с полюсами произвольных порядков.

**15.1.** Разложить функции комплексного переменного в многоцентровый ряд Лорана:  
а) ; б) ;  
в) ; г) ;

д) ; е) .

**15.2.** Разложить функции комплексного переменного в многоцентровый ряд Лорана с помощью полученной авторами данного сборника задач формулы



:

а) ; б) ; в) ; г) ; д) ;   
 е) .

**15.3 .** Разложить функцию и комплексного переменного в многоцентровый ряд Лорана:  
а) ; б) ; в) ;  
г) ; д) ;  
е) Получить общую формулу разложения на элементарные дроби функции .

**§ 16. Применение многоцентрового ряда Лорана**

**16.1.** Разложить функции в многоцентровый ряд Лорана, используя подстановку :  
а) ; б) ;  
в) ; г) ;  
д) ; е) .

**16.2.** Вычислить интегралы с помощью многоцентрового ряда Лорана:  
а) ; б) ;   
в) ; г) ;  
д) ; е) .

**16.3.** Вычислить неопределенные интегралы с помощью многоцентрового ряда Лорана:  
а) ; б) ;   
в) ; г) ;  
д) ; е) .

**16.4.** Вывести общую формулу разложения .

**16.5.** По формуле из задачи **16.4** разложить на элементарные дроби:

а) ; б) .

**16.6.** По формуле из задачи **16.4** вывести общую формулу для .

**16.7.** По формуле из задачи **16.4** вычислить неопределенный интеграл .

**16.8.** Вычислить интегралы с помощью многоцентрового ряда Лорана:  
а) ; б) ;  
в) ; г) ;  
д) ; е).

**16.9.** Найти с помощью многоцентрового ряда Лорана общие решения дифференциальных уравнений:  
а) ; б) ;   
 в) ; г) ; д) ; е) .

**§ 17. Особые точки функций комплексного переменного**

**17.1.** Определить вид особой изолированной точки функции комплексного переменного:  
а) ; б) ; в) ;   
 г) ; д) ; е) .

**17.2.** Определить вид особой изолированной точки функции комплексного переменного:  
а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) ; е) .

**17.3.** Определить характер бесконечно удаленной особой точки функции комплексного переменного:  
а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) ; е) .

**17.4.** Определить характер бесконечно удаленной особой точки функции комплексного переменного:  
а) ; б) ; в) ;  
г) ; д) ; е) .

**§ 18. Нахождение вычетов**

**18.1.** Найти вычеты в особых точках функции комплексного переменного:  
а) ; б) ; ) ;  
г) ; д) ; е) .

**18.2.** Найти вычеты в особых точках функции комплексного переменного:  
а) ; б) ; в) ;   
 г) ; д) ; е) .

**18.3.** Найти вычеты в особых точках функции комплексного переменного:  
а) ; б) ; в) ;

г) ; д) ;  
е) .

**18.4.** Найти вычеты в простых полюсах функции комплексного переменного: .

**18.5.** Найти вычеты по следующей формуле: если ,,,, то :  
а) ; б) ;  
в) ;   
г) ;  
д) ;   
 е) .

**18.6.** Разложить на элементарные дроби методом многоцентрового ряда Лорана:   
а) ; б) ;  
в) ; г) ;  
д) ; е) .

**§ 19. Основная теорема о вычетах**

Если *f(z)* регулярна в односвязной области *D*, за исключением конечного числа *n* особых точек {*zi*}, то интеграл по простой замкнутой кривой γ, границе *D* .

**19.1.** Используя основную теорему о вычетах, вычислить интегралы:  
а) ; б) ;

в) ; г) ;  
д) ; е) .

**19.2.** Используя основную теорему о вычетах, вычислить интегралы:  
а) ; б) ; в) ;  
г) ; д) ;  
е) .

**19.3.** Используя основную теорему о вычетах, вычислить интегралы:  
а) ; б) ;

в) ; г) ;

д) ; е) .

**19.4.** Используя основную теорему о вычетах, вычислить интегралы:  
а) ; б) ;   
в) ; г) ;   
 д) ; e) .

**19.5.** Используя основную теорему о вычетах, вычислить интегралы:  
 а) ; б) ;   
 в) ; г) ;

д) ; е) .

**§ 20. Вычисление интегралов по замкнутому контуру   
с помощью вычетов в точке *z = ∞***

Если *f(z)* регулярна в односвязной области *D*, за исключением конечного числа n особых точек {*zi*}, и других особых точек, кроме *z =* ***,*** на плоскости комплексного переменного нет, то интеграл по простой замкнутой кривой γ, лежащей в области D. . Эта формула облегчает вычисление интеграла по сравнению с методикой предыдущего параграфа, так как не надо искать вычеты во всех конечных точках. Достаточно найти вычет в бесконечно удаленной точке.

**20.1.** Вычислить интегралы по замкнутому контуру с помощью вычетов в *z = ∞:*а) ; б) ;   
 в) ; г) ;   
д) ; е) .

**§ 21. Интегралы по контуру от многозначных функций**

**21.1.** Вычислить интеграл по контуру от многозначных функций:  
а) ; б) ;   
в) ; г) .

**§ 22. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов**

В этом параграфе используется следующая формула:  
, причем вычеты берутся в верхней полуплоскости (выше оси *OX*) плоскости комплексного переменного. При этом *f(z)* регулярна при *Im(z) > 0*, кроме конечного числа особых точек и стремится к нулю при по закону 

**22.1.** Вычислить интеграл:  
а) ; б) ; в) ;  
г) ; д) ; е) .

**22.2.** Вычислить интегралы:  
а) ; б) ; в) ;   
 г) ;   
д) ;

е) .

**§ 23. Вычисление несобственных интегралов   
с использованием леммы Жордана**

Лемма Жордана дает следующие формулы для вычисления несобственных интегралов   
, , где вычеты берутся в особых точках верхней полуплоскости.

**23.1.** Вычислить интегралы:  
а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) ; е) .

**23.2.** Вычислить интегралы:  
а) ; б) ; в) ;

г) ; д) ; е) .

**23.3.** Вычислить интегралы:  
а) ; б) ;   
в) ; г) ;   
д) ; е) .

**§ 24. Вычисление определенных интегралов   
от тригонометрических рациональных функций**

В этом случае интеграл сводится интегралу по замкнутому контуру с помощью подстановок 

**24.1**. Вычислить определенные интегралы от тригонометрических рациональных функций:  
а) ; б) ; в) ;   
г) ; д)  ,вычислить с помощью подстановки ; е) .

**24.2**. Получить общую формулу для вычисления интеграла вида .

**24.3**. Вычислить определенные интегралы от тригонометрических рациональных функций:  
а) ; б) ; в) ;

г) ; д) ;   
е) .

**24.4**. Вычислить интегралы:  
а) ; б) ; в) ;  
г) ; д) ; е) .

**§ 25. Мероморфные функции и их применение**

**25.1.** Мероморфны ли функции:  
а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) ; е) ?

**25.2.** Мероморфны ли функции:  
а) ; б) ; в) ;   
 г) ; д) ; е) ?

**25.3.** Разложить на сумму элементарных дробей по формуле  где  функции:

а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) ; е) .

**25.4.** Разложить на сумму элементарных дробей по формуле  где функции:

а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) ; е) .

**25.5.** Вычислить интегралы*:*а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) ; е) .

**25.6.** Вычислить интеграл:  
а) ; б) ;  
в) ; г) ;

д) ; е) .

**25.7.** Разложить функции на сумму элементарных дробей:  
а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) ; е) .

**25.8.** Используя разложения тригонометрических функций в ряды Лорана (см. 24.7), найти суммы рядов:  
а) ; б) ; в) .

**§ 26. Преобразования Лапласа**

Преобразованием Лапласа функции *f(t)* (которая, вообще говоря, может принимать и комплексные значения), называется функция комплексной переменной *p*, определяемая следующим равенством:

*F(p)* = 

Если функция *f(t)* удовлетворяет следующим условиям:

1. *f(t)=0* при
2. существуют такие постоянные , что

(величина ;

1. на любом конечном промежутке функция *f(t)* имеет не более чем конечное число точек разрыва первого рода,

то функция *f(t)* называется оригиналом, а функция *F(p)-* изображением функции *f(t).* Соответствие *f(t) и F(p)* обозначают

**26.1.** Можно ли использовать  в качестве оригинала, если  непрерывна, кроме конечного числа точек разрыва:  
а) ; б) ; в) ;

г) ; д) ; е) ?

**26.2.** Можно ли использовать  в качестве оригинала, если  непрерывна, кроме конечного числа точек разрыва:  
а) ; б) ; в) ;

г) ; д) ; е) 

**§ 27. Свойства преобразования Лапласа**

Если , то имеют место следующие свойства:

a) свойство линейности ;

b) теорема подобия

c) - изображение функции Хевисайда.  
d) теорема смещения

**27.1.** Найти изображение оригиналов:  
а) ; б) ; в) ;  
г) ; д) ; е) .

**27.2.** Найти изображение оригиналов:  
а) ; б) ; в) ;  
г) ; д) ; е) .

**27.3.** Найти изображение оригиналов по теореме подобия:  
а) ; б) ; в) ;  
г) ; д) ;  
е) .

**27.4.** Найти оригиналы по изображению:  
а) ; б) ; в) ;  
г) ; д) ;   
е) .

**27.5.** Найти оригиналы по изображению:  
а) ; б) ;   
в) ; г) ;   
 д) ; е) .

**§ 28. Теорема о дифференцировании оригинала**

Если являются оригиналами, то для любого *k=1,2,…,n*

В частности,

**28.1.** Найти изображение от производной оригинала:  
а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) .

**28.2.** Найти изображение от производной оригинала:  
а) ; б) ; в) ;  
г) ; д) ; е) .

**§ 29. Теорема о дифференцировании изображения**

**29.1.** Найти оригиналы, используя теорему о дифференцировании изображения:  
а) ; б) ; в) ;  
г) ; д) ; е) .

**29.2**. Найти оригинал, используя теорему о дифференцировании изображения  
а) ; б) ;   
в) ; г) ;   
 д) ; е) .

**§ 30. Теорема об интегрировании оригинала.**

**Теорема об интегрировании изображения**

**30.1**. Используя теорему об интегрировании оригинала, найти изображения

а) ; б) ; в) ;   
 г) ; д) ; е) .

**30.2**. Используя теорему об интегрировании оригинала, найти изображения:  
а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) ; е) .

**30.3**. Используя теорему об интегрировании оригинала, найти изображения

а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) ; е) .

**30.4**. Используя теорему об интегрировании оригинала, найти интегралы оригинала:  
а) ; б) ; в) ;   
 г) ; д) ; е) .

**§ 31. Теорема о запаздывании оригинала**

**31.1.** Найти изображение, используя теорему о запаздывании:  
а) ; б) ; в) ;  
г) ; д) ; е) .

**31.2.** Найти изображение, используя теорему о запаздывании:  
а) ; б) ;   
в) ; г) ;   
д) ; е) .

**§ 32. Теорема смещении изображения**

**32.1.** Найти изображение, используя теорему смещения:  
а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) ; е) .

**32.2.** Найти изображение, используя теорему смещения:  
а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) .

**§ 33. Теорема о свертке**

Свертке оригиналов соответствует произведение изображений

**33.1**. Используя теорему о свертке, найти изображение:  
а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) ; е) .

**33.2**. Используя теорему о свертке, найти изображение:  
а) ; б) ; в) ;  
г) ; д) ; е) .

**§ 34. Гамма – функции и их свойства**

Гамма-функция имеет вид при *Reβ* > -1 Г(β + 1) = .   
При *β = {0,1,2,3,4,…} Г(β + 1) = β!.* Для произвольной *β Г(β+ 1) = βГ(β).* При этом Г(1/2) = , Г(-1/2) = -2. Поскольку гамма-функция почти совпадает с преобразованием Лапласа, то ее свойства можно использовать для нахождения изображений.

**Пример**. Пусть надо найти изображение . F(p) = .

**34.1.** Найти изображение, используя свойства гамма-функций:  
а) ; б) ; в) ;   
 г) ; д) ; е) .

**34.2.** Найти оригинал по заданному изображению, используя свойства гамма – функции:  
а) ; б) ; в) ;   
г) ; д) ; е) .

**§ 35. Линейные дифференциальные уравнения и системы линейных дифференциальных уравнений**

Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами , причем , и начальными условиями решается операционным методом следующим образом. По теореме дифференцирования оригинала (см. **§ 28)** составляется изображения левой части дифференциального уравнения *A(p)Y(p) – B(p),* где *A(p) и B(p*) являются полиномами *n-го* порядка, а *Y(p)* неизвестная пока функция. Далее, правую часть уравнения *f(t)* также заменяют изображением *F(p).* В результате мы из дифференциального уравнения получаем алгебраическое уравнение *A(p)Y(p) - B(p) = F(p),* из которого находим явный вид функции *Y(p).* После этого, используя обратное преобразование Лапласа или таблицы преобразований Лапласа, находим оригинал *y = y(t),* который является частным решением исходного дифференциального уравнения, удовлетворяющий начальным условиям.

**Таблица оригиналов и изображений**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Оригинал** | **Изображение** | **Оригинал** | **Изображение** |
| *1* | *1/p* | *eλt⋅cos ωt* | *(p-λ)/[(p - λ)2 + ω2]* |
| *tn* | *n!/pn+1* | *eλt sin ωt* | *ω/[(p - λ)2 + ω2]* |
| *eλt* | *1/(p - λ)* | *t⋅cos ωt* | *(p2 - ω2)/(p2 + ω2)2* |
| *cos ωt* | *p/(p2 + ω2)* | *t⋅sin ωt* | *2pω/(p2 + ω2)2* |
| *sin ωt* | *ω/(p2 + ω2)* | *ch ωt* | *p/(p2 - ω2)* |
| *tn eλt* | *n!/(p - λ)n+1* | *sh ωt* | *ω/(p2 - ω2)* |

**Пример.** Решить дифференциальное уравнение y/ + y = 0, y(0) =1. Совершаем преобразование Лапласа: Заменяя исходные оригиналы на изображения, получаем алгебраическое уравнение:

*Y(p)(p+1) = 1*, следовательно,  
*Y(p) = 1/(p+1).*

Согласно таблице *1/(p+1)* *e****-t***. Следовательно решением исходного дифференциального уравнения является функция *y = e****-t****.*

**35.1.** Решить дифференциальные уравнения, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

а) ; б) ;

в) ;

г) ;

д) ;

е) (0)=0 .

**35.2.** Найти общие решения дифференциальных уравнений:

а) ; б) ;

в) ; г) ;

д) .

**35.3.** Найти при нулевых начальных условиях решения дифференциальных уравнений:

а) где ;

б) , где ;

в) , где ;

**35.4.**  Если - решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

при нулевых начальных условиях, то решением дифференциального уравнения

при тех же начальных условиях является функция

.

Этот результат позволяет находить решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами при нулевых начальных условиях, не находя изображения правой части этого уравнения.

Пользуясь указанными формулами, найти решения дифференциальных уравнений:

а) ; б) ; в) .

**35.5.** Найти решение систем дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

а) ;

б) ;

в) ;

г) ;

д) .

**Ответы.**

**1.1.** а)*Re(z)=-6* и *Im(z)=3*; б) *Re(z)=-2* и *Im(z)=2*; в) *Re(z)=Im(z)=0*; г)*Re(z)=0* и *Im(z)=2*; д) *Re(z)=0* и *Im(z)=1*; е) *Re(z)=-4* и *Im(z)=4; ж) Re(z)=0* и *Im(z)=0; з) Re(z)=0* и *Im(z)=0; и) Re(z)=1* и *Im(z)=1; к) Re(z)=0* и *Im(z)=n*. **1.2.** а) *Re(z)=Im(z)=-*1; б) *Re(z)=-63* и *Im(z)=17*; в)  *Re(z)=0* и *Im(z)=1*; г)  *Re(z)=16* и *Im(z)=0*; *д)Re(z)=-4* и *Im(z)=0*; е) *Re(z)=-1* и *Im(z)=2*. **1.3.** а) ; б); в)7; г) *- i*; д) ; е)*-2*; *ж) ; з) ; и) к)* . **1.4.** а) ; б) *- i*; в) ; г) ; д) *i*; е) 17. **2.1.** а) 37; б); в) ; г) 0; д) 78; е) . **2.2.** а) -10; б) ; в) 4; г) -10; д) 2*i*; е) . **2.3.** а) ; б) ; в) ; г) ; д) **; е) . **2.4.** а) ; б) 0; в) Не существует, так как в знаменателе данной дроби нуль; г) ; д) *1*; е) . **3.1.** а)1; б) ; в) ; г) Если *к* – нечетное , если *к* – четное ; д) 5; е) 2. **3.2.** а) 0; б) ; в) ; г) . **3.3.** а) ; б) 0; в) -; г) π; д) ; е) . **3.4.** а) ; б) ; в) 0; г) ; д) Не существует; е) . **4.1.** а) ; б) ; в) ; г); д) **; е); ж) -*i cthz*; з) *2cos i*: **4.2.** а) ; б) 1; в)  г) ; д) **; е) . **5.1.** а) ; б) ; в) ; г) ; д)**; е)0; ж)  з) **5.2.**  а)  б)  в) г)5;-5. **5.3** а)  б)  в)  г) . **5.4** а) б)  в)  г)  **6.1.** а)Прямая *x=1*, параллельная оси *OY*. б) Парабола .в) Окружность с центром в начале координат и радиусом *r=2*. г) Окружность с центром в точке (0;-1) и радиусом *r=1*. д) Не существует. е) Часть окружности с центром в начале координат и радиуса 3, расположенной в первом квадранте. **6.2**. а)Эллипс с центром в начале координат и полуосями *a* и *b*. б) Прямая *y=3x*. в) Гипербола . г) Биссектриса первого квадранта *y=x*. д) Спираль Архимеда. е)Часть окружности с центром в начале координат и радиуса 1, расположенной во втором квадранте. **6.3.** а) Замкнутый круг, с центром в начале координат радиуса 3. б) Кольцо – двусвязная область, замкнутая между окружностями радиусами 1 и 2. в) Верхняя полуплоскость. г) Левая полуплоскость. д) Горизонтальная полоса . е) Квадрат со стороной 2. **6.4.** а) Область плоскости за пределами круга с центром в начале координат и радиусом 3. б) Бесконечно удаленная точка, т.е. область за пределами круга сколь угодно большого радиуса. в) Ось *OX*. г) Ось *OY*. д) Парабола *x=y2*. е) Открытый круг радиуса 1 с центром в начале координат. **7.1.** а) 

**7.2.**  **7.3.** 

**7.4.** .

**7.5.** a) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ; ж) ; з) . **7.6.** a) ; б) ; в) ; г) ; д) .

**8.1.** а) б)  в)  г)  д) ** е) 1. **8.2.** а) 0; б) ; в) ; г) ** д)Не существует. **9.1.** а) Выполняются; б) Выполняются; в) Выполняются везде, кроме точки *x=y=0*; г) Не выполняются; д) Не выполняются; е) Не выполняются. **9.2.** а)Выполняются; б) Выполняются; в) Выполняются; г) Выполняются только в точке *x=y=0*; д) Выполняются; е) Выполняются только в точке *x=y=0*. **9.3.** а)Да; б) Да; в) Нет; г) Да; д) Да, кроме *z=0*; е) Да. **9.4.** а)Да; б)Да, кроме точек *z=πn*; в)Нет; г)Нет; д)Да. **9.5.** а)Нет; б)Нет; в)Дифференцируема в точке *x=y=0*; г)Дифференцируема в точке *x=y=0*; д)Дифференцируема в точке *x=y=0*; е)Дифференцируема везде. **9.6.** а)Дифференцируема вдоль линий *y=x* и *y= - x*; б)Дифференцируема везде, кроме точек *z = π(2n+1)/2*; в)Не дифференцируема; г)Дифференцируема везде; д)Дифференцируема вдоль линии *x=y, x≠0*; е)Дифференцируема вдоль линии *x=y.* **10.1.** а)** б)в)г) не существует; д); е). **10.2.** а)**; б); в) не существует; г); д) не существует; е). **11.1.** а)Да; б)Нет; в)Нет; г)Да; д)Нет; е)Нет. **12.1.** а) б) в)1; г); д)*i*; е)*i*. **12.2.** а); б) ; в); г); д); е). **12.3.** а)Да; б)Нет;в)Нет; г)Да; д)Да; е)Да. **12.4.** а)Нет; б)Да; в)Нет; г)Да; д)Да.е) Да. **13.1.** а); б); в)-2π; г)**; д)**; е)0. **13.2.** а)-2π; б)π*i*; в); г)0; д)-*sh1*; е). **13.3.** а) ; б); в); г); д); е). **13.4.** а)2π*i/e*; б)0; в); г)-π*i*/3; д)-2π; е)-4π2. **14.1** а)Расходится; б)Расходится, так как  образуют гармонический ряд; в)Сходится; г)Сходится; д) Расходится; е)Сходится условно. **14.2.** а)Расходится; б)Расходится; в)Расходится; г)Сходится; д)Сходится; е) Сходится условно.

**14.3**.;

в) ;

д).; е) Не раскладывается в ряд Тейлора, так как данная функция не дифференцируема.

**14.5.** а); б).; в); г).;д).; е).**14.6.** а).;б) ;в).; г).;

д).; е) **14.7.** а);б)**;** в)  **14.8.** а).; б).;

в) **14.9.** а)*n = 1*; б)*n = 1*;

в); г)*n = 2*; д)*n =*; е)*n = 1*; ж)*n = 7*; з) *n = 2*; и)*n = 4*. **14.10.** а)*n = 2*; б)*n = 3*; в)Нулей нет; г); д)Шестнадцать нулей первого порядка; е) *z =1 –* нули второго порядка; ж)*z = 0 –*нуль пятого порядка; з)*z = 0 –*нуль десятого порядка;и)*z = ∞ –*нуль второго порядка.

**14.11.** а)б). в) 

**14.12.** а) .; б).;

в).; г).;

д).; е).

**14.13.** *.* ; ; ; **; ; . **15.1.**

а)**;** б);

в) ; г); д) е). **15.2.** а); б);

в); г);

д); е).

**15.3.** а)**; б)**;

в)**; г)**;

д) **; е)**. **16.1**

а)**; б) **; в) **;

г) **; д)**; е)**.

**16.2.** а)0; б); в); г); д); е). **16.3.** *.*

а) **; б)**;

в)**; г); д)**;

е)**.

**16.4.** . **16.5.** а)**. б)**. **16.6.** .

**16.7.**  **. **16.8.** а)-2π; б) 0; в); г) 0;

д); е) **16.9.** а);

б); в);

г);д)**+C; е)**+С.

**17.1.** а)*z = 0,* устранимая особая точка; б)*z = 0,* устранимая особая точка; в)*z = 0,* существенно особая точка; г)*z = 1,* простой полюс; *z = 3* полюс второго порядка; д)*z = 0,* простой полюс; е)*z = 0,* полюс второго порядка. **17.2.** а)Нет конечных полюсов; б)*x = k* – полюс *k – го* порядка; в) простые полюса; г)*z = 0,* простой полюс; д) полюса второго порядка; е) полюса третьего порядка. **17.3.** а)*z = ∞,* полюс первого порядка; б)*z = ∞,* существенно особая точка; в)*z = ∞,* устранимая особая точка; г)*z = ∞,* существенно особая точка; д)*z = ∞,* существенно особая точка; е)*z = ∞,* полюс второго порядка. **17.4.** а) *z = ∞,* полюс шестого порядка; б)*z = ∞,* правильная точка, нуль третьего порядка; в)*z = ∞,* точка накопления полюсов ; г)*z = ∞,* существенно особая точка; д)*z = ∞,* существенно особая точка; е) *z = ∞,* существенно особая точка.

**18.1.** а); б); в) ; г);

д);

е) .

**18.2.** а); б);

в); г);

д); е). **.**

**18.3.** а)*;*

б);

в).

г) д)

е)

**18.4.** . **18.5.** а); б); в); г); д); е). **19.1.** а); б); в)0; г); д); е)0. **19.2.** а)-4π*i*; б)2π*i*; в); г)0; д)-10π*i*; е)2π*i*. **19.3.** а); б); в)*0*; г)*2π*; д)0; е). **19.4.** *.* а) π*i/2*; б) -π*i/2*; в); г) -; д)4π*i*; е)2π*i/an*.

**19.5.** а); б) ; в)*2π*; г)*-πi*; д)*–πi/3*; е). **20.1.** а)*0*; б)*4πi*; в)*12πi*; г)*-34πi*; д)*-2π*; е)*6π.* **21.1.**а) ;

б) *2πi/27, -2πi/27.* в) *4πi.* г)*-4πi.* **22.1.** а) π; б) π/6; в) π/60; г) π/1008; д) π/; е)π /2. **22.2.** а) 3π/8; б) 5π/16; в) 35π/128; г) ;

д); е) π/128. **23.1.** а) *π/е*;

б) π/2*е2*; в) ; г) ; д) ; е) . **23.2.** а ) *π/е2*; б);

в); г); д); е). **23.3.** а) ;

б) ; в); г) ; д);

е) . **24.1**.а); б)-; в) π; г); д); е).

**24.2**.. **24.3**.а)π; б); в); г)π/4; д);

е). **24.4**. а)π; б); в)π/4; г); д) π; е).

**25.1.** а) Да; б) Да, так как число простых полюсов ∞, но они входят в ограниченные части плоскости; в) Да; г) Нет, так как при *х*→0, возникает бесконечное число полюсов и для любой области, содержащей нуль, имеет ∞ число полюсов; д) Нет; е)Нет, так как здесь нет полюсов, а есть существенно особые точки. **25.2.** а) Да; б) Нет; в)Да; г) Нет; д) Да; е) Нет. **25.3.** а)**;** б) **;** в)  ; г) ; д) ; е) . **25.4.** а);б); в); г); д); е). **25.5.** а)**;б); в)-*π/2*; г)* ;* д)*π* *i*; е)*3πi/2.* **25.6.** а)**; б) 0 ; в) 0; г)** ; д)*0*;е) *0.*

**25.7.** а); б);

в); г). **25.8.** а); б); в). **26.1.** а) Да; б) Нет; в) Да; г) Нет; д) Да; е) Нет. **26.2.** а)Да; б)Да; в)Нет; г)Да; д)Нет; е)Нет.

**27.1.** а); б); в) ; г)  ; д) ; е) .

**27.2.** а); б);

в); г); д);

е). **27.3.** а); б); в); г) ; д) ; е) . **27.4.** а);

б) ; в) *t-sint*; г) *1-cost*; д); е) . **27.5.** а) ;

б) ; в) ; г) ;д); е)**. 28.1.** а);

б); в);

г); д).

**28.2.** а);б)-; в); г);

д); е). **29.1.** а); б); в) ; г); д); е). **29.2**.а); б);

в); г); д); е).

**30.1**.а)**; б); в); г); д); е). **30.2**.*.* а) **; б)**; в); г); д); е). **30.3**.а)**; б)**; в);

г); д); е). **30.4**.а)**; б)**; в); г);

д); е). **31.1.** а) ;б); в); г);д); е). **31.2.** а); б); в); г);

д); е). **32.1.** а); б);

в); г); д); е). **32.2.** а); б); в); г);

д); е).**33.1** а) 1/p2(p - 1); б) 2!/p3(p2 + 1);

в) 1/p3; г) 1/p2(p2 + 1); д) 1/p(p2 + ω2); е) p2/(p - a)(p + 1).

**33.2** а) p/(p2 - 1); б) 3!/p3(p2 - 1); в) 2!3!/ p7; г) 1/(p2 - 1)(p - a);

д) pω/ (p2 + ω2); е) n!/pn+1(p - a). **34.1**.а)**;

б); в) **; г)**; д)**; е) ****. 34.2**.а)t4; б )**; в) **; г)**; д)**; е)**. **35.1.** а) б) в) г); д) ; е) . **35.2.** а) б) в) г); д) **35.3.**  ; б) ; в)

**35.4.** а) ; б) в) **35.5.** а) ; б) ; в) ; г) ;

д) .