МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Саровский физико-технический институт -
филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

(**СарФТИ НИЯУ МИФИ**)

ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра «Высшей математики»

Н.В. Прокофьева

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЗАЧЁТУ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«Теория вероятностей и математическая статистика»

Учебно-практическое пособие

Утверждено
Научно-методическим
Советом СарФТИ
13 марта 2022 г.

Саров
2022 г

УДК 517

Материалы для подготовки к зачёту по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»: Учебно-практическое пособие/ сост. Н.В. Прокофьева. – СарФТИ НИЯУ МИФИ.– Саров, 2022 г. - 28 стр.

Учебно-практическое пособие предназначено для организации эффективной подготовки студентов СарФТИ НИЯУ МИФИ к зачёту по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика». Оно содержит программу по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика», итоговый тренировочный тест среднего уровня сложности по теории вероятностей, вопросы и типовые задачи зачёта, образец решения некоторых задач зачёта, а также справочный материал. Рекомендовано научно-методическим Советом СарФТИ для следующих направлений подготовки бакалавриата: 09.03.02. «Информационные системы и технологии», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 15.03.03. «Прикладная механика», 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника», 15.03.05. «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», 14.05.04 «Электроника и автоматика физических установок».

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

№	Наименование раздела /темы дисциплины	Содержание
1.	**Раздел 1 «Основные понятия теории вероятностей. Аксиоматика теории вероятностей и её основные теоремы»**	
1.1.	Аксиоматика теории вероятностей	Предмет теории вероятностей. Виды случайных событий. Алгебра случайных событий. Теоретико-множественная интерпретация операций над событиями. Полная группа событий. Пространство элементарных исходов. Аксиоматическое определение вероятности. Основные свойства вероятности.
1.2.	Различные определения вероятности случайного события	Элементы комбинаторики. Классическое и статистическое определение вероятности. Геометрическое определение вероятности.
1.3.	Основные теоремы теории вероятностей	Правило сложения вероятностей несовместных событий. Противоположные события. Условные вероятности. Независимые события. Теорема умножения вероятностей. Формула сложения вероятностей для совместных событий. Формула полной вероятности и формула Байеса.
1.4.	Повторные независимые испытания	Схема испытаний Бернулли. Формула Бернулли. Наиболее вероятное число успехов. Классические предельные теоремы теории вероятностей: теоремы Муавра-Лапласа, теорема Пуассона. Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.
2.	**Раздел 2 «Случайные величины и векторы. Предельные теоремы теории вероятностей»**	
2.1.	Дискретные случайные величины и их характеристики. Основные виды распределений	Понятие случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Закон, ряд, многоугольник и функция распределения дискретной случайной величины. Операции над дискретными случайными величинами. Числовые характеристики

	дискретной случайной величины	дискретных случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, мода. Свойства математического ожидания и дисперсии. Биноминальное, геометрическое и пуассоновское распределение и их числовые характеристики.
2.2.	Непрерывные случайные величины и их законы распределения. Числовые характеристики непрерывных случайных величин	Функция распределения и плотность распределения непрерывной случайной величины, их взаимосвязь и свойства. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал. Числовые характеристики непрерывных случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, начальные и центральные моменты, мода, медиана, квантиль, коэффициенты асимметрии и эксцесса.
2.3.	Некоторые важные для практики распределения непрерывных случайных величин	Основные виды распределения непрерывных случайных величин (показательное, равномерное, нормальное) и их числовые характеристики. Нормальная кривая. Функция Лапласа. Вычисление вероятности попадания в заданный интервал нормальной случайной величины.
2.4.	Функции от одной случайной величины. Многомерные случайные величины	Функции от случайных величин. Функция распределения $Y = \varphi(X)$. Двумерные (дискретные) случайные величины. Двумерная функция распределения вероятности и ее свойства. Числовые характеристики многомерных случайных величин. Ковариация, коэффициент корреляции и его свойства.
2.5.	Предельные теоремы теории вероятностей	Закон больших чисел. Неравенство Чебышева. Теоремы Чебышева и Бернулли. Центральная предельная теорема
3	**Раздел 3 «Математическая статистика»**	
3.1.	Выборка и её характеристики	Задачи математической статистики. Генеральная и выборочная совокупности. Репрезентативная выборка. Обработка статистических результатов. Статистический и вариационный ряд. Полигон частот. Гистограмма

		частот. Построение эмпирической функции распределения. Характеристики выборки (выборочная средняя, выборочная дисперсия, мода, медиана, размах).
3.2.	Теория точечных оценок. Методы нахождения оценок	Точечные оценки параметров распределения случайных величин. Основные выборочные точечные оценки. Свойства точечных оценок. Несмещенность, состоятельность и эффективность. Методы получения точечных оценок: метод моментов и метод максимального правдоподобия.
3.2.	Интервальные оценки	Интервальное оценивание параметров распределения случайных величин. Общий подход к получению интервальных оценок и требования к ним. Интервальные оценки параметров математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения для генеральной совокупности, имеющей нормальное распределение.
3.3.	Критерий согласия Пирсона	Статистическая гипотеза. Нулевая и конкурирующая гипотезы. Ошибки первого и второго рода. Критическая область. Область принятия гипотезы. Критические точки. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. Критерий согласия Пирсона.

2. ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ТЕСТ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Из колоды карт (36 штук) случайным образом выбираются 6 карт. Тогда вероятность того, что в выбранном наборе будет только один туз, равна...

a) 0,41

b) 0,43

c) 0,56

d) 0,67

2. В пространстве даны 8 точек, причём никакие 4 из них не лежат в одной плоскости. Сколько различных плоскостей можно провести через эти точки?

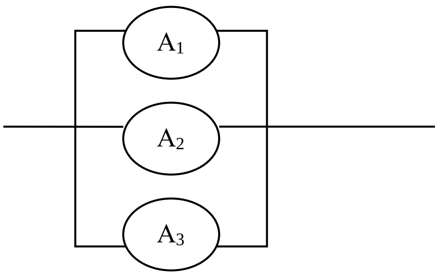
a) $\frac{8!}{4!}$

b) 8!

c) $\frac{8!}{3!}$

d) $\frac{8!}{3!5!}$

3. Различные элементы электрической цепи работают независимо друг от друга. Вероятности безотказной работы элементов за время Т следующие: $P(A_1)=0{,}6$; $P(A_2)=0{,}8$; $P(A_3)=0{,}7$.



Тогда вероятность безотказной работы системы за время Т равна…

a) 0,596

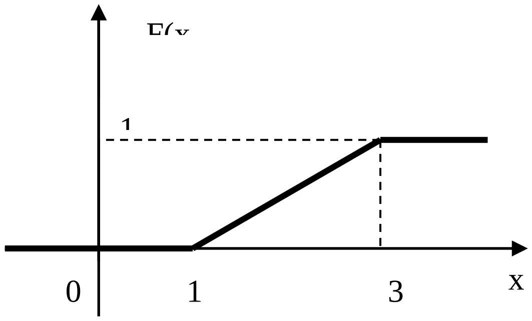
b) 0,832

c) 0,976

d) 0,744

e) 0,493

4. Если график функции распределения случайной величины X имеет вид:



Тогда M[2X-1] равно…

a) 1/2

b) 3/4

c) 1

e) 3

d) 0

5. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия р = 0,7. Произведено 10 выстрелов. Тогда мат. ожидание общего числа попаданий равно…

a) 6

c) 7

b) 14

d) 1,5

6. Игральная кость бросается 1 раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет не более трёх очков, равна…

a) 1/6

c) 1/2

b) 1/3

d) 2/3

7. Вероятность появления события А в 20 независимых испытаниях, проводимых по схеме Бернулли, равна 0,9. Тогда дисперсия числа появлений этого события равна…

a) 1,8

c) 0,16

b) 0,018

d) 18

8. В первой урне 3 белых и 7 чёрных шаров. Во второй урне 5 белых и 15 чёрных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар. Тогда вероятность того, что этот шар окажется чёрным, равна…

a) 11/20

c) 13/40

b) 29/40

d) 4/15

9. Если случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{18}}$, то D[2X+1] равно…

a) 1

d) 18

b) 36

e) 0

c) 9

10. Дана функция распределения случайной величины $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 2\cos 2x, & 0\le x\le \pi/4,\\ 1, & x>\pi/4.\end{cases}$

Тогда математическое ожидание случайной величины X равно …

a) π /4 – 1/2

c) π – 1

b) π /2 – 1/2

d) -1

11. Математическое ожидание числа очков при одном бросании игральной кости равно…

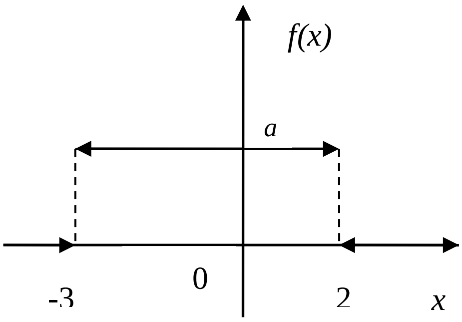
a) 1/7

c) 2/7

b) 2/9

d) 7/2

12. График плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины X, распределённой равномерно в интервале (-3; 2), имеет вид:



Тогда значение *a* равно…

a) 1/5

b) 0,4

c) 1/4

d) 1

13. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X	0	1	2
P	0,1	p_2	0,6

Тогда p_2 равна …

a) 0,2

b) 0,4

c) 0,3

d) 0,6

14. Две случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

X	- 2	0	1
P	0,2	0,3	0,5

Y	0	1	2	4
P	0,1	0,4	0,3	0,2

Тогда M[2Y+X] равно…

a) 2

b) 3,7

c) 3,8

d) 1,9

e) 3,9

15. Три стрелка одновременно стреляют в цель. Вероятность поражения цели 1-ым стрелком равна 0,9; 2-ым – 0,8; 3-им – 0,6. Тогда вероятность того, что будет зарегистрировано не менее двух попаданий в цель, равна…

a) 0,636

b) 0,008

c) 0,724

d) 0,876

16. Случайные события A и B, удовлетворяющие условиям p(A)=0,3, p(B)=0,4, p(AB)=0,2, являются…

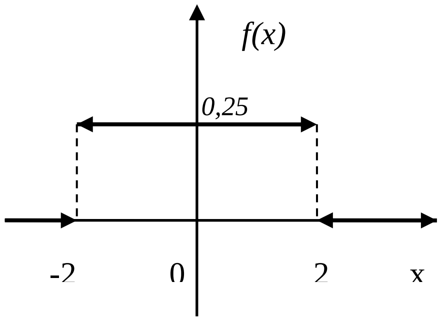
a) совместными и зависимыми;

b) несовместными и зависимыми;

c) совместными и независимыми;

d) несовместными и независимыми.

17. Если график плотности распределения вероятностей случайной величины X имеет вид:



Тогда *D[2X+3]=...*

a) 1,5

b) 0

c) 16/3

d) 1/3

e) 5

18. Среди 350 механизмов 160 первого сорта, 110 – второго сорта и 80 – третьего сорта. Вероятность брака среди механизмов первого сорта 0,01, среди второго сорта 0,02, среди третьего сорта 0,04. Берётся один механизм. Вероятность того, что этот механизм исправный, равна…

a) 0,54

b) 0,86

c) 0,91

d) 0,98

19. Производится четыре независимых испытания. Вероятность появления события A при каждом испытании 0,5. Тогда вероятность того, что событие A появится не менее 2-ух раз, равна…

a) 0,5562

b) 0,9325

c) 0,6875

d) 0,4325

20. Математическое ожидание случайной величины X, распределённой равномерно в интервале [2; 8], равно…

a) 2

b) 1

c) 0

d) 5

e) 2,5

21. Вероятность того, что наудачу выбранная в квадрате точка окажется на одной из диагоналей квадрата равна…

a) 0,41

c) 0,56

d) 0,67

b) 0

22. Среднее квадратичное отклонение показательного распределения, заданного плотностью вероятности $f(x)=\begin{cases}5e^{-5x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$, равно…

a) 0,1

c) 0,5

b) 1,5

d) 0,2

23. Непрерывная случайная величина распределена равномерно на отрезке [-11; 20]. Тогда вероятность P(X $\le$0) равна …

a) 10/31

c) 11/31

b) 11/32

d) 5/16

24. Вероятность наступления некоторого события не может быть равна…

a) 0

c) 1/2

b) 1

d) 2

Ключ к тесту							
№ задания	**ответ**	**№ задания**	**ответ**	**№ задания**	**ответ**	**№ задания**	**ответ**
1	a	7	a	13	c	19	b
2	d	8	b	14	b	20	c
3	c	9	b	15	d	21	b
4	e	10	d	16	b	22	d
5	c	11	d	17	c	23	c
6	c	12	a	18	b	24	a

3. ВОПРОСЫ К ЗАЧЁТУ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

1. Что изучает теория вероятностей?

2. Что называется элементарным событием (элементарным исходом)?

3. Что такое пространство элементарных событий?

4. Какое событие называется достоверным?

5. Какое событие называется невозможным?

6. Что называется суммой двух событий?

7. Что называется произведением двух событий?

8. Может ли сумма двух событий совпадать с их произведением?

9. Какие события называются несовместными?

10. Какие события называются совместными?

11. Какое событие называется противоположным для данного события?

12. Какими способами можно задать вероятность события?

13. Какие значения может принимать вероятность события?

14. Чему равна вероятность невозможного события?

15. Чему равна вероятность достоверного события?

16. Какое событие называется практически достоверным?

17. Какое событие называется практически невозможным?

18. Какие события образуют полную группу?

19. Какие события называются равновозможными?

20. В каком случае вероятность события вычисляется по формуле классической вероятности?

21. Как найти вероятность суммы двух несовместных событий?

22. Как найти вероятность суммы двух совместных событий?

23. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?

24. Как определяется условная вероятность события?

25. Какие события называются независимыми?

26. Как найти вероятность произведения двух событий?

27. Чему равна вероятность произведения двух независимых событий?

28. Чему равна сумма вероятностей гипотез в формуле полной вероятности?

29. Как пересчитать вероятности гипотез после опыта с учётом наблюденного результата?

30. В каком случае опыты называются независимыми?

31. Какая вероятность вычисляется по формуле Бернулли?

32. Как найти наиболее вероятное число появлений события в данной серии опытов?

33. Что такое случайная величина?
34. Какие случайные величины являются дискретными, непрерывными?
35. Что такое закон распределения случайной величины?
36. Что такое ряд распределения случайной величины?
37. Что такое (интегральная) функция распределения случайной величины?
38. Какими свойствами обладает (интегральная) функция распределения случайной величины?
39.Что такое плотность распределения случайной величины?
40. Какими свойствами обладает плотность распределения случайной величины?
41. Что называется кривой распределения случайной величины?
42. Какими способами может быть задан закон распределения для дискретной случайной величины?
43. Как связаны функция распределения и плотность распределения непрерывной случайной величины?
44. Что такое математическое ожидание случайной величины?
45. Какой вероятностный смысл имеет математическое ожидание случайной величины?
46. Как определяется математическое ожидание дискретной случайной величины?
47. Как определяется математическое ожидание непрерывной случайной величины?
48. Что такое мода случайной величины?
49. Как определяется мода дискретной случайной величины?
50. Как определяется мода непрерывной случайной величины?
51. Что такое медиана непрерывной случайной величины?
52. Что такое дисперсия случайной величины?
53. Какой вероятностный смысл имеет дисперсия?
54. Что такое среднее квадратическое отклонение?
55. Как определяется дисперсия дискретной и непрерывной случайной величины?
56. Что такое начальные и центральные моменты?
57. Как центральные моменты выражаются через начальные моменты?
58. Что является начальным моментом первого порядка?
59. Что является центральным моментом второго порядка?
60. Какие числовые характеристики являются характеристиками расположения?
61. Какие числовые характеристики являются характеристиками рассеивания?
62. Что такое нормальный закон распределения?
63. Какие параметры имеет нормальный закон распределения?

64. Как определяется функция распределения стандартизованного нормального закона распределения?
65. Как связаны функция стандартизованного нормального закона распределения и функция Лапласа?
66. В чем состоит правило трёх сигм для нормального закона распределения?
67. Какие теоремы называются законом больших чисел?
68. Какие теоремы называются центральной предельной теоремой?
69. Что такое выборка, объем выборки?
70. Что такое генеральная совокупность?
71. Какие наблюдения называются непрерывными?
72. Какие наблюдения называются дискретными?
73. Что такое вариационный ряд?
74. Что такое статистический ряд для: непрерывных наблюдений; дискретных наблюдений?
75. Как определяется объем выборки по сгруппированному ряду?
76. Как определяется число классов для интервального ряда?
77. Как представляется графически интервальный ряд?
78. Как представляется графически сгруппированный ряд?
79. Как определяется эмпирическая функция распределения?
80. В каком интервале может принимать значения эмпирическая функция распределения?
81. Чему равна площадь гистограммы, построенной в координатах (x, m), где m – частота.
82. Чему равна площадь гистограммы, построенная в координатах (x, m/n), где m/n – частость?
83. Как определяется среднее арифметическое выборки?
84. Как определяется среднее арифметическое сгруппированного ряда, интервального ряда?
85. Как определяется выборочная дисперсия: для выборки, для сгруппированного ряда, для интервального ряда?
86. Как определяется выборочное среднее квадратическое отклонение?
87. С помощью каких числовых характеристик можно установить симметричность распределения?
88. Как определяется мода, медиана, квантили?
89. Какие типы оценок используются в математической статистике?
90. Что является точечной оценкой для математического ожидания?
91. Что является точечной оценкой для дисперсии?

92. Что такое доверительный интервал?

93. Что такое уровень значимости?

94. Что такое доверительная вероятность?

95. Как доверительная вероятность связана с уровнем значимости?

96. Как задается уровень значимости?

97. Какие условия влияют на выбор формулы для определения доверительной оценки для математического ожидания?

98. Какой вид имеют формулы для интервального оценивания математического ожидания нормального распределения?

4. ОБРАЗЕЦ ЗАЧЁТНОЙ КАРТОЧКИ

1. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных (такой закон называют гипергеометрическим). Определить функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию данной дискретной случайной величины.

2. Случайная величина X задана следующей функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le -1/2\\ c(4x^2+4x+1), & \text{если } -1/2<x\le 1/2,\\ 1, & \text{если } x>1/2.\end{cases}$$

Требуется найти:

1) постоянный параметр c;

2) плотность распределения вероятностей случайной величины X;

3) математическое ожидание и дисперсию случайной величины X;

4) вероятность попадания случайной величины X в интервал [– ¼; ¼].

3. Изучается случайная величина X — число выпавших очков при бросании игральной кости. Кость подбросили 60 раз. Получены следующие результаты:

3, 2, 5, 6, 6, 1, 4, 6, 4, 6, 3, 6, 4, 2, 1, 5, 3, 1, 6, 4, 5, 4, 2, 2, 4, 2, 6, 3, 1, 5,
6, 1, 6, 6, 4, 2, 5, 4, 3, 6, 4, 1, 5, 6, 3, 2, 4, 4, 5, 2, 5, 6, 2, 3, 5, 4, 1, 2, 5, 3.

1) Что в данном опыте-наблюдении представляет генеральную совокупность?

2) Перечислите элементы этой совокупности. 3) Что представляет собой выборка?

4) Приведите 1-2 реализации выборки. 5) Оформите ее в виде: а) вариационного ряда;

б) статистического ряда.

6) Найдите эмпирическую функцию распределения выборки $F^*(x)$ и построить ее график.

7) Найдите: а) выборочную среднюю; б) выборочную дисперсию; в) исправленную выборочную дисперсию и исправленное среднее квадратическое отклонение; г) размах вариации, моду и медиану.

4. Изучается случайная величина $X \sim N(a,\ 20)$. Над ней произведено 5 независимых наблюдений. Результаты наблюдений таковы: $x_1 = -25$, $x_2 = 34$, $x_3 = -20$, $x_4 = 10$, $x_5 = 21$. Найти точечную оценку для a = M[X], а также построить для него 95%-й доверительный интервал.

5. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ТИПОВОЙ ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «ПЕРВИЧНАЯ ОБРАБОТКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ»

Постановка задачи. Из генеральной совокупности с дискретным изменением признака *X* произведена выборка объема *n=50*, записанная в виде первоначальной таблицы:

70	80	85	95	80	85	80	95	90	80
100	90	80	70	90	75	100	85	75	95
80	70	100	85	70	85	90	75	85	75
75	95	90	80	85	80	85	85	80	100
85	90	85	95	90	95	75	85	85	85

Требуется:

1) составить вариационный ряд;

2) составить таблицу распределения частот и относительных частот (частостей);

3) построить полигон относительных частот;

4) найти эмпирическую функцию распределения *F*(x)* и построить ее график;

5) найти характеристики выборки: выборочную среднюю, выборочную дисперсию и исправленную выборочную дисперсию, стандарт, размах выборки, моду, медиану.

Решение.

Решение:

1. Составим вариационный ряд. *Вариационным рядом* называется последовательность вариантов, записанных в порядке их возрастания, причем одинаковые варианты записываются столько раз, сколько раз они встречаются в статистической совокупности.

70	70	70	70	75	75	75	75	75	75
80	80	80	80	80	80	80	80	80	85
85	85	85	85	85	85	85	85	85	85
85	85	85	85	90	90	90	90	90	90
90	95	95	95	95	95	100	100	100	100

2. Составим таблицу распределения частот и частостей.

Частотой n_i варианта называется число, показывающее, сколько раз встречается данный вариант в статистической совокупности.

Частостью (относительной частотой w_i) варианта называется отношение его частоты к объему выборки *n*.

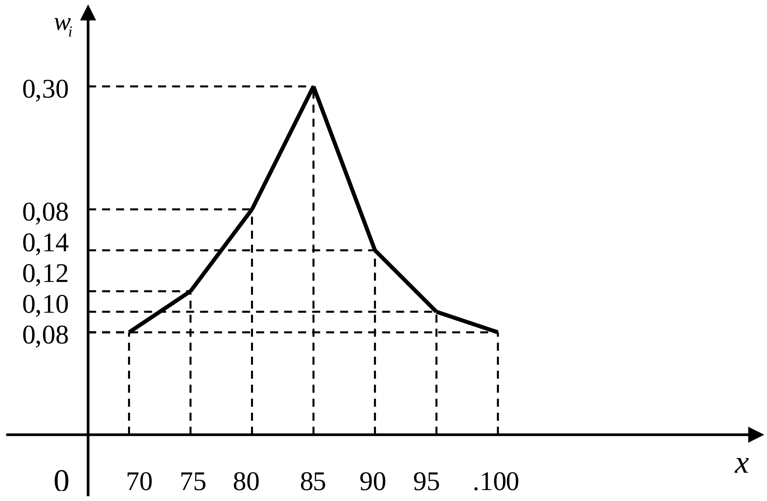
В первой строке таблицы запишем различные варианты; во второй – соответствующие им частоты.

x_i	70	75	80	85	90	95	100
n_i	4	6	9	15	7	5	4
$w_i = n_i / n$	4/50=0,08	0,12	0,18	0,30	0,14	0,10	0,08

$$\sum_{i=1}^{7} w_i = 1$$

3. Построим полигон относительных частот (частостей)

Полигоном частот (частостей) дискретного вариационного ряда называется ломаная, соединяющая последовательно точки ($x_i; n_i$) (или ($x_i; w_i$)).



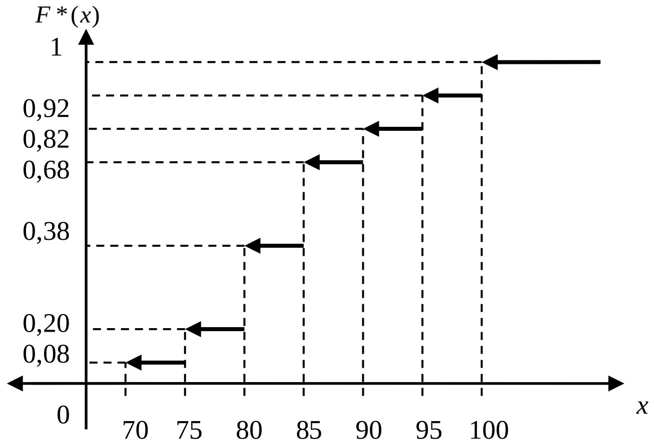
4. Запишем эмпирическую функцию распределения и построим ее график.

$F^*(x) = \frac{n_x}{n}$ (1), где n_x – число вариант, меньших x; n – объем выборки.

Функция $F^*(x)$ служит для оценки теоретической функции распределения $F(x)$ генеральной совокупности.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le 70 \\ 0{,}08, \text{ при } 70 < x \le 75 \\ 0{,}20, \text{ при } 75 < x \le 80 \\ 0{,}38, \text{ при } 80 < x \le 85 \\ 0{,}68, \text{ при } 85 < x \le 90 \\ 0{,}82, \text{ при } 90 < x \le 95 \\ 0{,}92, \text{ при } 95 < x \le 100 \\ 1, \text{ при } x > 100 \end{cases}$$

График функции $F^*(x)$ имеет вид:



5. Точечные несмещенные оценки параметров признака X - генеральной совокупности.

Несмещенной оценкой генеральной средней является выборочная средняя, которая находится по формуле

$$\bar{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n}.$$

В нашем случае $\bar{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i n_i}{n} = \frac{70\cdot 4 + 75\cdot 6 + 80\cdot 9 + 85\cdot 15 + 90\cdot 7 + 95\cdot 5 + 100\cdot 4}{50} = 84{,}6.$

Несмещенной оценкой дисперсии служит исправленная выборочная дисперсия

$$S_в^2 = \frac{n}{n-1} D_в.$$

Найдем выборочную дисперсию по формуле $D_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_в)^2}{n}.$

$$D_в = \frac{(70-84,6)^2\cdot 4 + (75-84,6)^2\cdot 6 + (80-84,6)^2\cdot 9 + (85-84,6)^2\cdot 15 + (90-84,6)^2\cdot 7}{50} +$$

$$+\frac{(95-84,6)^2\cdot 5 + (100-84,6)^2\cdot 4}{50} = 65,84.$$

Тогда несмещенная оценка генеральной дисперсии

$$S_в^2 = \frac{50}{50-1}\cdot 65{,}84 = 67{,}18 \;\Rightarrow S_в = \sqrt{S_в^2} = \sqrt{67{,}18} = 8,20,$$

где $S_в$ – исправленное среднее квадратическое отклонение.

Размах (R) – разность между наибольшим и наименьшим вариантами статистической совокупности, то есть $R = x_{наиб} - x_{наим},$

где $x_{наим} = 70$; $x_{наиб} = 100$; $R = 100 - 70 = 30$.

Мода M_0 – вариант вариационного ряда с наибольшей частотой. Мода $M_0 = 85$, т.к. $n_4 = 15$ – наибольшая частота.

Медиана Me – вариант, делящий вариационный ряд на две равные части по числу вариант.

Если $n = 2k$ – четное число, то медиана находится по формуле: $Me = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

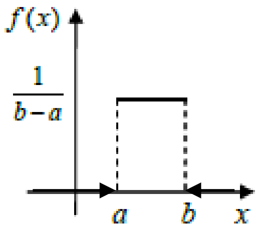
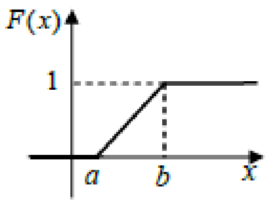
Если $n=2k+1$ – нечетное число, то медиана равна: $Me = x_{k+1}$.

В нашем случае $Me = \frac{x_{25} + x_{26}}{2} = \frac{85+85}{2} = 85$.

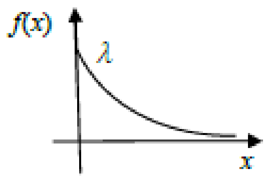
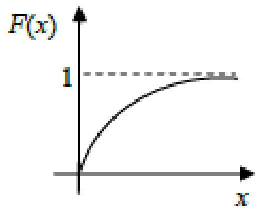
ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Важнейшие распределения непрерывных случайных величин

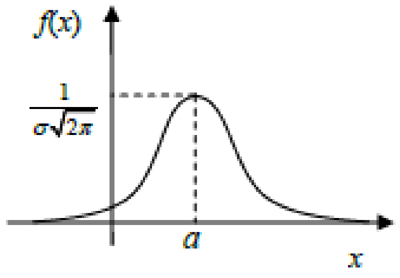
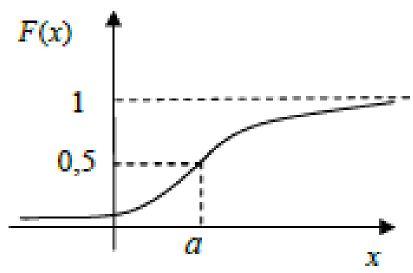
Равномерный закон распределения

Понятие	Определение
Закон распределения описывает поведение плотности вероятности $f(x)$	Обозначение: $X \sim R\ [a,\ b]$. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{при } x\in[a,b];\\ 0 & \text{при } x\notin[a,b],\end{cases}$ a и b – параметры распределения 
Функция распределения $F(x)$	$F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b;\\ 1, & b<x<+\infty\end{cases}$ 
Числовые характеристики	$MX=\dfrac{a+b}{2};\ DX=\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Вероятность попадания в интервал (α,β)	$P(\alpha<X<\beta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\dfrac{1}{b-a}dx=\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$

Показательный закон распределения

Понятие	Определение
Закон распределения $f(x)$	$f(x)=\begin{cases}0, x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, x\ge 0,\end{cases}$ $\lambda>0$ – параметр распределения 
Функция распределения $F(x)$	$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}$ 
Функция надежности $R(t)$	Вероятность отказа элемента за период времени t: $F(t)=P(T<t)=1-e^{-\lambda t}\quad(\lambda>0)$. Вероятность безотказной работы элемента за период времени t: $R(t)=e^{-\lambda t}$
Числовые характеристики	$MX=\dfrac{1}{\lambda};\ DX=\dfrac{1}{\lambda^2}$
Вероятность попадания в интервал (α,β)	$P(\alpha<X<\beta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}$

Нормальный закон распределения

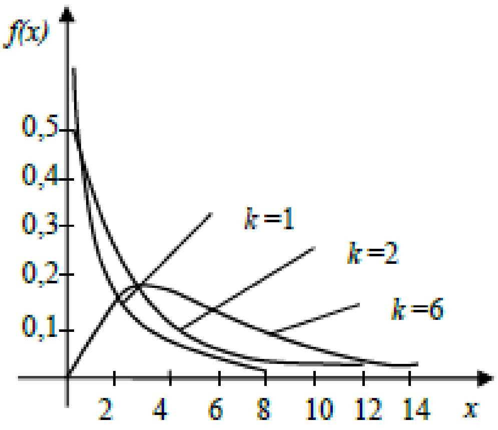
Понятие	Определение
Закон распределения $f(x)$	Обозначение: $X \sim N(a,\ \sigma)$. $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty < x < +\infty$; a, σ – параметры закона распределения 
Стандартный (нормированный) закон распределения	$X \sim N(0,1)$; $f_{0,1}(x)=\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функция Гаусса, значения которой табулированы (прил. 1), $\varphi(-x)=\varphi(x)$. Формула перехода: $f(x)=\dfrac{1}{\sigma}\varphi\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$
Функция распределения $F(x)$	$F(x)=0{,}5+\Phi\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$; $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – функция Лапласа, значения которой табулированы (прил. 2), $\Phi(-x)=-\Phi(x)$; $\Phi(x)=0{,}5$ при $x>5$ 
Числовые характеристики	$MX=a$; $DX=\sigma^2$, коэффициент асимметрии $A=0$, эксцесс $E=0$, мода $M_0=a$, медиана $M_e=a$
Вероятность попадания в интервал (α,β)	$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\dfrac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{\alpha-a}{\sigma}\right)$. Вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа δ: $P(\lvert X-a\rvert<\delta)=2\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)$. Правило трех сигм: $P(\lvert X-a\rvert<3\sigma)\approx 0{,}997$

Замечание. Нормальный закон распределения является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при часто встречающихся аналогичных условиях. Нормальный закон наиболее часто встречается на практике. Ему подчиняются ошибки измерений, величины износа деталей машин и механизмов, отклонение изготовляемой детали от стандарта, колебания напряжения в электросети, рост человека и т.д.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

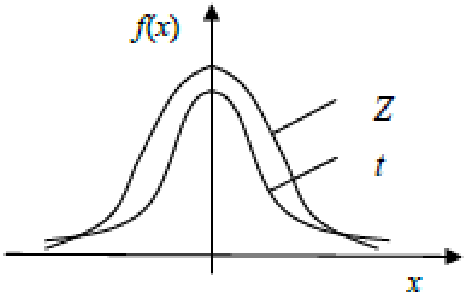
Некоторые законы распределения, связанные с нормальным распределением

χ^2-распределение (распределение К. Пирсона)

Понятие	Определение
Распределение χ^2 (хи-квадрат) с k степенями свободы	Распределение суммы квадратов k независимых случайных величин Z_i, распределенных по стандартному нормальному закону: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2$, где $Z_i \sim N(0,1)$
Закон распределения $f(x)$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{k/2} \cdot \Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ где $\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{y-1} dt$ – гамма-функция Эйлера ($\Gamma(y) = (y-1)!$ для целых положительных значений y) 
Числовые характеристики	$M(\chi^2) = k$; $D(\chi^2) = 2k$

Распределение Стьюдента

Понятие	Определение
1	2
Распределение Стьюдента (t-распределение)	Распределение случайной величины $t = \frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{k}\chi^2}}$, где $Z \sim N(0,1)$; χ^2 – независимая от Z случайная величина, имеющая χ^2-распределение с k степенями свободы

1	2
Закон распределения $f(x)$	$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\pi k}}\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$. При $k>30$ t-распределение можно считать приближенно нормальным 
Числовые характеристики	$M(t)=0$; $D(t)=k/(k-2)$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2}\, dz$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,000000	0,39	0,151700	0,78	0,282300	1,17	0,379000
0,01	0,004000	0,40	0,155400	0,79	0,285200	1,18	0,381000
0,02	0,008000	0,41	0,159100	0,80	0,288100	1,19	0,383000
0,03	0,012000	0,42	0,162800	0,81	0,291000	1,20	0,384900
0,04	0,016000	0,43	0,166400	0,82	0,293900	1,21	0,386900
0,05	0,019900	0,44	0,170000	0,83	0,296700	1,22	0,388300
0,06	0,023900	0,45	0,173600	0,84	0,299500	1,23	0,390700
0,07	0,027900	0,46	0,177200	0,85	0,302300	1,24	0,392500
0,08	0,031900	0,47	0,180800	0,86	0,305100	1,25	0,394400
0,09	0,035900	0,48	0,184400	0,87	0,307800	1,26	0,396200
0,10	0,039800	0,49	0,187900	0,88	0,310600	1,27	0,398000
0,11	0,043800	0,50	0,191500	0,89	0,313300	1,28	0,399700
0,12	0,047800	0,51	0,195000	0,90	0,315900	1,29	0,401500
0,13	0,051700	0,52	0,198500	0,91	0,318600	1,30	0,403200
0,14	0,055700	0,53	0,201900	0,92	0,321200	1,31	0,404900
0,15	0,059600	0,54	0,205400	0,93	0,323800	1,32	0,406600
0,16	0,063600	0,55	0,208800	0,94	0,326400	1,33	0,408200
0,17	0,067500	0,56	0,212300	0,95	0,328900	1,34	0,409900
0,18	0,071400	0,57	0,215700	0,96	0,331500	1,35	0,411500
0,19	0,075300	0,58	0,219000	0,97	0,334000	1,36	0,413100
0,20	0,079300	0,59	0,222400	0,98	0,336500	1,37	0,414700
0,21	0,083200	0,60	0,225700	0,99	0,338900	1,38	0,416200
0,22	0,087100	0,61	0,229100	1,00	0,341300	1,39	0,417700
0,23	0,091000	0,62	0,232400	1,01	0,343800	1,40	0,419200
x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,24	0,094800	0,63	0,235700	1,02	0,346100	1,41	0,420700
0,25	0,098700	0,64	0,238900	1,03	0,348500	1,42	0,422200
0,26	0,102600	0,65	0,242200	1,04	0,350800	1,43	0,423600
0,27	0,106400	0,66	0,245400	1,05	0,353100	1,44	0,425100
0,28	0,110300	0,67	0,248600	1,06	0,355400	1,45	0,426500
0,29	0,114100	0,68	0,251700	1,07	0,357700	1,46	0,427900
0,30	0,117900	0,69	0,254900	1,08	0,359900	1,47	0,429200
0,31	0,121700	0,70	0,258000	1,09	0,362100	1,48	0,430600
0,32	0,125500	0,71	0,261100	1,10	0,364300	1,49	0,431900
0,33	0,129300	0,72	0,264200	1,11	0,366500	1,50	0,433200
0,34	0,133100	0,73	0,267300	1,12	0,368600	1,51	0,434500
0,35	0,136800	0,74	0,270300	1,13	0,370800	1,52	0,435700
0,36	0,140600	0,75	0,273400	1,14	0,372900	1,53	0,437000
0,37	0,144300	0,76	0,276400	1,15	0,374900	1,54	0,438200
0,38	0,148000	0,77	0,279400	1,16	0,377000	1,55	0,439400

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
1,56	0,440600	1,82	0,465600	2,16	0,484600	2,68	0,496300
1,57	0,441800	1,83	0,466400	2,18	0,485400	2,70	0,496500
1,58	0,442900	1,84	0,467100	2,20	0,486100	2,72	0,496700
1,59	0,444100	1,85	0,467800	2,22	0,486800	2,74	0,496900
1,60	0,445200	1,86	0,468600	2,24	0,487500	2,76	0,497100
1,61	0,446300	1,87	0,469300	2,26	0,488100	2,78	0,497300
1,62	0,447400	1,88	0,469900	2,28	0,488700	2,80	0,497400
1,63	0,448400	1,89	0,470600	2,30	0,489300	2,82	0,497600
1,64	0,449500	1,90	0,471300	2,32	0,489800	2,84	0,497700
1,65	0,450500	1,91	0,471900	2,34	0,490400	2,86	0,497900
1,66	0,451500	1,92	0,472600	2,36	0,490900	2,88	0,498000
1,67	0,452500	1,93	0,473200	2,38	0,491300	2,90	0,498100
1,68	0,453500	1,94	0,473800	2,40	0,491800	2,92	0,498200
1,69	0,454500	1,95	0,474400	2,42	0,492200	2,94	0,498400
1,70	0,455400	1,96	0,475000	2,44	0,492700	2,96	0,498500
1,71	0,456400	1,97	0,475600	2,46	0,493100	2,98	0,498600
1,72	0,457300	1,98	0,476100	2,48	0,493400	3,00	0,498650
1,73	0,458200	1,99	0,476700	2,50	0,493800	3,20	0,499310
1,74	0,459100	2,00	0,477200	2,52	0,494100	3,40	0,499660
1,75	0,459900	2,02	0,478300	2,54	0,494500	3,60	0,499841
1,76	0,460800	2,04	0,479300	2,56	0,494800	3,80	0,499928
1,77	0,461600	2,06	0,480300	2,58	0,495100	4,00	0,499968
1,78	0,462500	2,08	0,481200	2,60	0,4953	4,50	0,499997
1,79	0,463300	2,10	0,482100	2,62	0,495600	5,00	0,499999
1,80	0,464100	2,12	0,483000	2,64	0,495900		
1,81	0,464900	2,14	0,483800	2,66	0,496100		

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Таблица значений *t*-распределения Стьюдента (*k*- число степеней свободы)

k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	3,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,876	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,05	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Юрайт, 2015.

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Юрайт, 2015.

3. Прокофьева Н.В. Теория вероятностей: учебно-практическое пособие. – Саров: СарФТИ НИЯУ МИФИ, 2010.

4. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. Под ред. А.А. Свешникова. 4-е изд., стер. - СПб.: Изд-во «Лань», 2013.

Дополнительная литература

5. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и её инженерные приложения: Учеб. пособие для студ. втузов/ Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – 3-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательский центр «Академия», 2003.

6. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. М: Айрис-Пресс, серия Высшее образование, 2008.