МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Саровский физико-технический институт -
филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
(СарФТИ НИЯУ МИФИ)

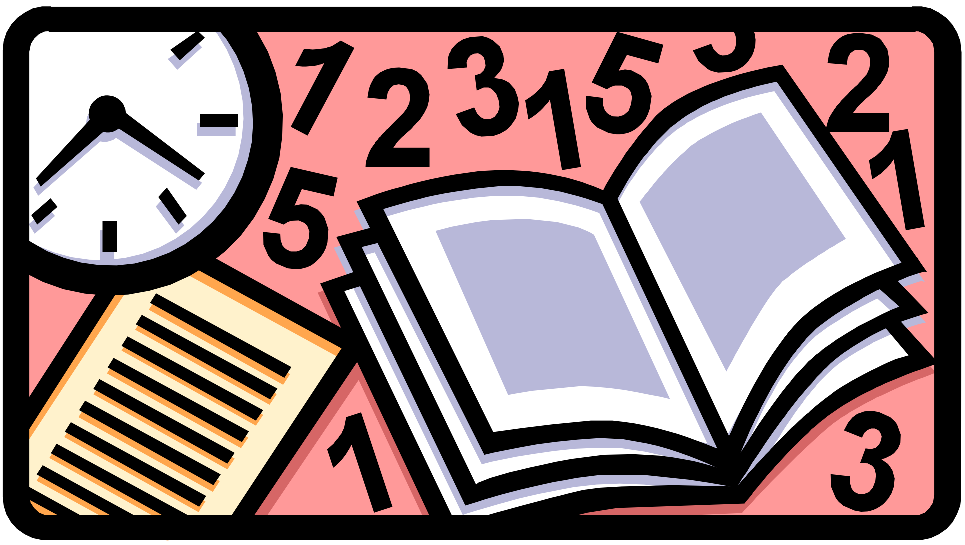
ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННОЙ ТЕХНИКИ и ЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра вычислительной и информационной техники

В.В. Алексеев

Элементы теории множеств.

Методическое пособие по курсу "ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА"



г. Саров
2023 г.

1. Элементы теории множеств

1.1 Понятие множества. Основные определения

Понятие ***множества*** является фундаментальным неопределимым понятием, одно из основных, если не основное, понятий математики. Оно не имеет точного определения, и его следует отнести к аксиоматическим понятиям. Как правило, термин ***множество*** объясняется с помощью примеров, а потом указываются правила его использования в математических применениях. Последнее можно сделать на разных уровнях строгости. Детальное и строгое изложение теории ***множеств*** требовало бы скрупулезного анализа логики математических рассуждений, а это – специальная самостоятельная тема, которая относится к ***области основ математики***. Для наших целей достаточно выбрать уровень так называемой ***интуитивной теории множеств***.

Интуитивно под ***множеством*** понимается совокупность определенных, вполне различимых объектов, рассматриваемых как единое целое. Можно говорить о множестве граней многоугольника, множестве точек на прямой, множестве натуральных чисел, множестве рациональных чисел, множестве операторов языка программирования, множестве языков программирования и т.д. Из этих примеров видно, что ***множество*** – это совокупность определенных различаемых объектов таких, что для любого объекта можно установить, принадлежит этот объект данному множеству или нет. Вполне очевидно, что множество, которое подчиняется такому ограничению, может содержать объекты почти любой природы. Например: множество жителей города Сарова; множество студентов СарФТИ; множество автобусных маршрутов нашего города; множество станций московского метро; множество правых ботинок; множество символов кодов компьютера; множество идентификаторов в программе и т.д. Следует подчеркнуть, что о множестве можно вести речь только тогда, когда элементы множества различимы между собой. Например, нельзя говорить о множестве капель в стакане воды, т.к. невозможно четко и ясно указать каждую отдельную каплю.

Множества, все элементы которого являются числами, называются числовыми множествами. Приняты следующие стандартные обозначения числовых множеств:

$\boldsymbol{N}$ - множество натуральных чисел;

$\boldsymbol{Z}$ - множество целых чисел;

$\boldsymbol{Q}$ - множество рациональных чисел;

$\boldsymbol{R}$ - множество действительных чисел;

$\boldsymbol{C}$ - множество комплексных чисел.

Множества, элементами которого являются другие множества, называются ***классом*** или семейством.

Отдельные объекты, из которых состоит множество, называют ***элементами*** множества. Например, 5 – элемент множества натуральных чисел, G – элемент множества букв латинского алфавита.

Таким образом, когда мы говорим о множестве, то объединяем некоторые объекты в одно целое, а именно в множество, элементами которого они являются.

Основатель теории множеств **Георг Кантор**[1] определил формулировку интуитивного понятия множества следующими словами: «*Произвольная совокупность определенных предметов нашей интуиции или интеллекта, которые можно отличить один от другого и которые представляются как единое целое, называется* ***множеством***. *Предметы, которые входят в состав множества, называются его* ***элементами***».

Существенным пунктом канторовского понятия множества является то, что совокупность предметов рассматривается как один предмет («представляется как единое целое»). Основное внимание тут переносится с отдельных предметов на совокупности предметов, которые в свою очередь, можно рассматривать как предметы.

Что касается «предметов нашей интуиции или интеллекта», то эта формулировка дает значительную свободу прежде всего тем, что никак не ограничивает природу предметов, составляющих множество. Множество может состоять, например, из людей, простых чисел, точек пространства, планет Вселенной и т.д. Заметим, что канторовская формулировка множества дает возможность рассматривать множества, элементы которых по определенной причине точно задать невозможно.

Смысл выражений: «которые можно отличить один от другого» и «определенные предметы» заключается в следующем. В первом случае для любых двух предметов, которые рассматриваются как элементы данного множества, должна существовать возможность выяснить, различные эти предметы или одинаковые. Во втором случае, если задано некоторое множество и какой-нибудь предмет, то можно определить, является ли этот предмет элементом данного множества. Отсюда следует, что всякое множество полностью определяется своими элементами. Это канторовское требование формулируется как ***интуитивный принцип объемности или аксиома экстенсиональности***, согласно которому два множества (A и B) равны тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов (обозначают $A=B$).

Таким образом, два множества равны, если каждый элемент одного из них является элементом другого и наоборот.

Общим обозначением множества служит пара фигурных скобок $\{\ldots\}$, внутри которых перечисляются элементы множества. Для обозначения конкретных множеств используют различные прописные буквы ($M, X, A,\ldots$), или прописные с индексами (M_1, M_2, …). Для обозначения элементов

[1] **Георг Кантор** (G.Cantor, 1845-1918) – немецкий математик, основатель теории множеств.

множества в общем случае используют различные строчные буквы, или строчные буквы с индексами. Для указания того, что некоторый элемент a является элементом множества A, используется символ принадлежности множеству $\in$[1]. Запись $a \in A$ означает, что элемент a принадлежит множеству A, а запись $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A. Записью $a_1, a_2, \dots a_n \in A$ пользуются в качестве сокращения для записи $a_1 \in A$, $a_2 \in A$, $a_3 \in A$, $\dots a_n \in A$.

Множества бывают ***конечными*** и ***бесконечными***. Множество называют ***конечным***, если число его элементов конечно, т.е. если существует натуральное число N, являющееся числом элементов множества. Множество называют ***бесконечным***, если оно содержит бесконечное число элементов.

Величина, определяющая число элементов множества, называется ***кардинальным числом множества*** или ***степенью множества,*** и обозначается $|A|$ или $card(A)$.

1.2 Способы задания множества

Существует два основных способа задания множества: перечисление и описание.

Например, множество отличников группы можно задать, перечислив студентов, которые учатся на “отлично”. Например: {Иванов, Сидоров, Петров,…}.

Для сокращения записи $A=\{a_1, a_2, \dots a_n\}$ иногда пишут $A=\{a_i\}_1^n$, или вводят множество индексов $I=\{1,2,\dots.n\}$ и пишут $A=\{a_i\}$, $i \in I$. Такой способ удобен при рассмотрении конечных множеств, содержащих небольшое число элементов.

Описательный способ задания множества состоит в том, что указывается характерное свойство, которым обладают все элементы множества. Под свойством предмета x будем понимать такое повествовательное предложение, в котором нечто утверждается относительно предмета x и которое можно характеризовать как истинное или ложное по отношению к x (характеристический предикат).

Например, свойствами являются:

- 5 делит x;
- $x^2 > 0$.

Выражения:

- существует такой x, что $5x < 0$;
- для всех x, y $xy=yx$

не являются свойствами, потому что их нельзя характеризовать как истинные или ложные относительно x.

Если обозначить $P(x)$ некоторое свойство, тогда $P(a)$ будет означать тоже самое свойство, но с заменой x на a. Задание множества в терминах свойств достигается с помощью ***интуитивного принципа абстракции или аксиомы свертки:*** всякое свойство $P(x)$ определяет некоторое множество A

[1] Символ $\in$ происходит от греческой буквы ε.

с помощью условия: элементами множества A являются те и только те предметы a, которые имеют свойства P.

В силу принципа абстракции всякое свойство $P(x)$ определяет единственное множество, которое обозначают $\{a|P(a)\}$ и читают так: «множество всех тех предметов a, что $P(a)$»

Так, если C – множество студентов группы, то множество отличников этой группы O запишется в виде:

$$O=\{s\in C|\ s – \text{отличник группы}\}.$$

“Множество O состоит из элементов s множества C, обладающих тем свойством, что s является отличником группы”.

В тех случаях, когда не вызывает сомнений из какого множества берутся элементы s, указание о принадлежности s множеству C можно опустить. При этом множество O запишется в виде:

$$O=\{s|\ s – \text{отличник группы}\}.$$

Примеры:

$A=\{x|x$ – четное$\}$ – множество целых четных чисел;

$B=\{x|x^2-1=0\}$ – множество $\{-1, 1\}$.

Пусть N множество целых чисел. Тогда $\{n\in N|\ 0<n\leq 7\}$ есть множество $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

Важным понятием теории множеств является понятие ***пустого множества***. Пусть A – некоторое множество, а $P(x)$ имеет вид $x\neq x$, тогда множество $\{a|P(a)\}=\{a|a\neq a\}$, очевидно, не имеет элементов удовлетворяющих этому условию. Из принципа объемности следует, что может существовать только одно множество, которое не имеет элементов. Это множество и называется ***пустым множеством***. Или**,** ***пустым множеством*** называют множество, не содержащее ни одного элемента. Пустое множество обозначается символом $\varnothing$.

Например, $\{n\in N|\ n^2+2n+5=0\}=\varnothing$.

Пустое множество условно относится к конечным множествам.

Множество, содержащее только один элемент, называется ***синглетоном***.

Задание множества называют ***неизбыточным***, если каждый элемент входит в данное множество в единственном экземпляре, и ***избыточным***, если хотя бы один элемент входит в его состав более чем в одном экземпляре (***мультимножества***).

1.3 Равенство множеств

Как уже отмечалось, два множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов, т.е. представляют собой одно и тоже множество. Символ равенства множеств обладает свойствами:

- $A=A$ – рефлексивность;
- если $A=B$, то $B=A$ – симметричность;
- если $A=B$ и $B=C$, то $A=C$ – транзитивность.

Из определения равенства множеств вытекает:

1. порядок элементов в множестве несуществен. Например, множества $\{1,2,3,4\}$ и $\{3,4,1,2\}$ представляют собой одно и тоже множество;

2. в множестве не должно быть неразличимых элементов. Поэтому в множестве не должно быть одинаковых элементов. Например, запись множества $A=\{6,7,8,6,9\}$ следует рассматривать как $A=\{6,7,8,9\}$[1].

Но, множество, которое состоит из элементов некоторого множества A так, что эти элементы могут входить в состав этого множества в любом количестве экземпляров, называют ***мультимножеством*** множества A. С точки зрения теории множеств, множество и мультимножество – это один и тот же объект и они могут между собой не различаться. Однако часто, особенно когда речь идет о представлении множества в памяти ЭВМ, возникает потребность отличать множество от мультимножества.

1.4 Подмножество

Множество A является ***подмножеством*** множества B, если любой элемент множества A принадлежит и множеству B.

Например, множество студентов группы является подмножеством студентов факультета; множество четных целых чисел может рассматриваться как подмножество множества натуральных чисел.

Для определения подмножества в теории множеств используются символы:

- $\forall$ - символ, называемый квантором всеобщности. Запись $\forall x$ означает: “ любой x”, “каков бы ни был x”, “для всех x”, “для всякого x”; и т.п.
- $\exists$ - символ, называемый квантором существования. Запись $\exists x$ означает: “существует такой x, что”;
- $\rightarrow$ (или $\Rightarrow$) символ следствия (импликации), означающий “влечет за собой”; “если… то”;
- $\Leftrightarrow$ - символ эквивалентности, означающий “тогда и только тогда”, “то же самое”.

Тогда определение подмножества, которое может быть сформулировано в виде: для любого x утверждение “x принадлежит A“ влечет за собой утверждение “x принадлежит B” запишется так:

$$\forall x[x \in A \Rightarrow x \in B] \qquad 1.1$$

Более краткой записью выражение “A является подмножеством B” будет запись

$$A \subseteq B \qquad 1.2$$

(Читается “B содержит A”, “A содержится (включено) в B” и т.п.). Используемый здесь символ $\subseteq$ означает включение.

Если множество B содержит и другие элементы кроме элементов из A (т.е. $A \neq B$), то в этом случае имеет место строгое включение $A \subset B$. Если при этом $A \neq \varnothing$, то A называется ***собственным подмножеством*** множества B.

[1] Однако в этой ситуации возникают следующие проблемы. Если мы рассмотрим первоначальное определение А и выбросим одно из чисел 6 из множества, то мы, очевидно, будем иметь $6 \in A$ и $6 \notin A$. Возникает противоречие. Поэтому следует рассматривать повторение символов в определении множеств как упоминание одного и того же символа, а его дублирование как недосмотр. Удаление повторяющихся элементов образует основу для некоторых дальнейших математических рассуждений.

Связь между символами дается выражениями:

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ и } A \neq B. \qquad 1.3$$

Свойства подмножеств:

- $A \subseteq A$ – рефлексивность; ($A \not\subset A$ – иррефлексивность) 1.4
- ($A \subseteq B$ и $B \subseteq C$) $\rightarrow A \subseteq C$ - транзитивность.

Следует отметить важное свойство, что для любого множества A пустое множество $\varnothing \subseteq A$.

Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то множества A и B эквивалентны: $A=B$, т.е. все элементы A являются элементами B, а все элементы B являются элементами A.

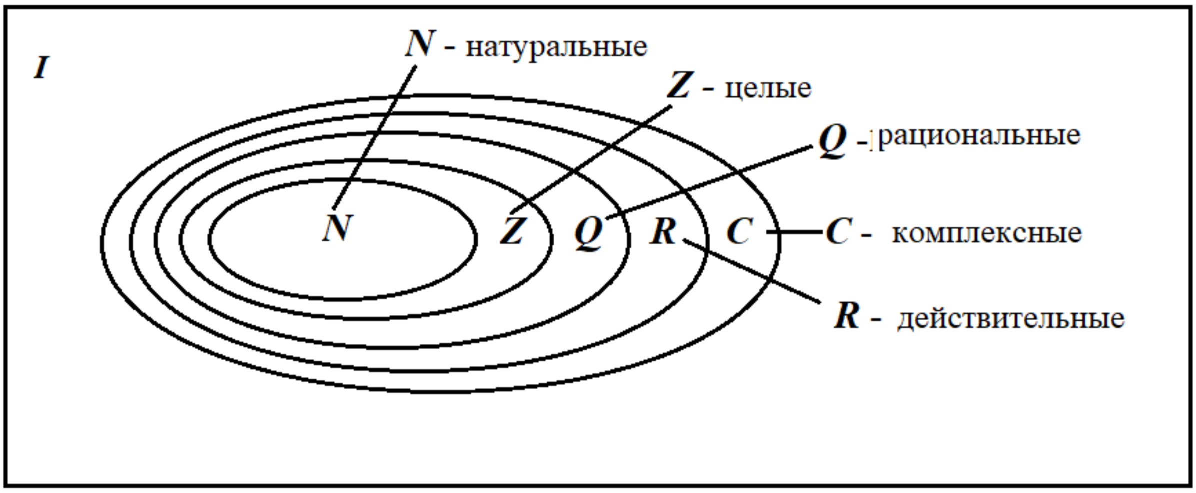
Т.е. $$A=B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A). \qquad 1.5$$

Таким образом, чтобы доказать, что множество A равно множеству B ($A=B$), надо доказать два включения: $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Множество, которое включает все рассматриваемые множества, называется ***универсальным***. Обозначается I или U.

Любое множество можно изобразить графически, нарисовав замкнутый контур и представив себе, что элементы этого множества изображены точками, находящимися внутри этого контура. Показывать на рисунке точки не обязательно. Универсальное множество изображается в виде прямоугольника. Такой способ изображения множеств носит название ***диаграмм Венна***[1] (или кругов Эйлера). Чаще называется ***диаграммами Эйлера-Венна.***

Например, числовые множества можно изобразить так:



Из диаграммы видно, что $N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \subseteq C \subseteq I$.

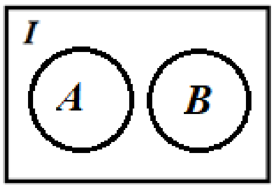
<u>Определение</u>. Множество всех подмножеств данного множества A называют ***булеаном*** или ***степенью множества*** A, которое обозначим, например, как $\beta(A)$.

[1] Джон Венн (1886-1921) — английский логик и философ. Родился 4 августа 1834 в Йоркшир. Умер -4 апреля 1923, Кембридж. Он известен за введение диаграмм Венна, которые используется во многих областях, таких как теория множеств, теория вероятностей, логика, статистика и информатика.

Формально $\beta(A)=\{B|\ B\subseteq A\}$. В частности заметим, что поскольку $\varnothing \subseteq A$ и $A \subseteq A$, то $\varnothing \in \beta(A)$; $A \in \beta(A)$. Мощность булеана (кардинальное число булеана) $|\beta(A)| = 2^{|A|}$, или $|\beta(A)|=2^n$, где $n=|A|$ - мощность множества A.

Пример. Пусть $A=\{a,b,c\}$. Тогда $\beta(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, A\}$. Кроме того, заметим, что множество А имеет 2 несобственных подмножества ($\varnothing$ и $A=\{a,b,c\}$) и 6 собственных подмножеств ($\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$).

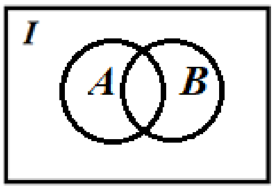
1.5 Отношения между множествами



Если множества A и B не имеют общих элементов, то говорят, что эти множества находятся в A ***отношении непересечения***. Записывают это так: $A \cap B = \varnothing$.

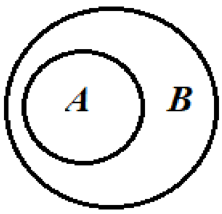
Например, A – множество треугольников, B – множество квадратов. Эти множества не имеют общих элементов, т. е. не существует фигуры, которая была бы одновременно и треугольником, и квадратом. Поэтому множества A и B находятся в отношении непересечения.

Если множества A и B имеют общие элементы, т.е. элементы, принадлежащие одновременно и A, и B, то говорят, что эти множества находятся в ***отношении пересечения***. Записывают это так: $A \cap B \neq \varnothing$.



Множества A и B находятся в ***общем положении*** пересечения, если существует элемент (хотя бы один), принадлежащий исключительно множеству A, элемент, принадлежащий исключительно множеству B, а также элемент, принадлежащий обоим множествам.

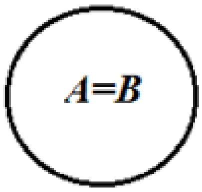
Например, A - множество прямоугольников, B - множество ромбов. Множества A и B находятся в общем положении пересечения, так как существует фигура, которая является одновременно и ромбом, и прямоугольником - это квадрат, а так же есть прямоугольники, которые не являются ромбами, и есть ромбы, которые не являются прямоугольниками.



Два множества находятся в отношении включения, если все элементы одного множества являются элементами другого. Например, если все элементы множества A являются элементами множества B, то A включается в B, а B включает A. $A \subset B$

Например, $A = \{c, d, f, g\}$, $B = \{g, r, k, f, c, d\}$.

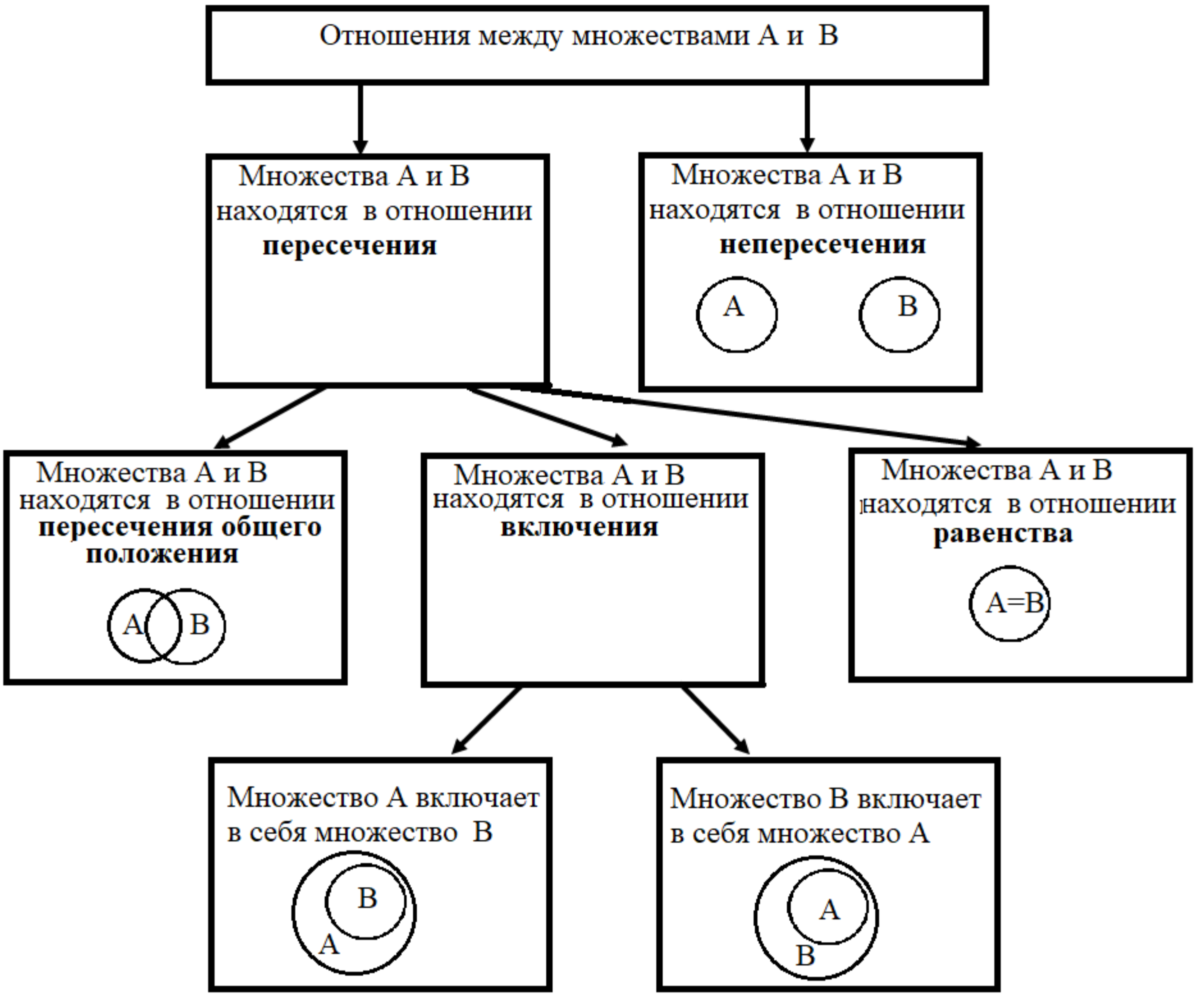
$A \subset B$, так как все элементы множества A являются одновременно и элементами множества B.



Два множества A и B находятся в отношении равенства, если каждый элемент A будет также являться элементом B, и каждый элемент множества B будет также являться элементом A, т.е. $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Например, $A = \{x | x \in N, 3 < x < 10\}$; $B = \{y | y \in N,\ 4 \le y \le 9\}$.

Как видно, множества A и B равны, так как состоят из одних и тех же элементов: $A = B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.



1.6 Операции над множествами

1.6.1 Предварительные замечания

Над множествами можно производить действия, которые во многом напоминают действия сложения и умножения в элементарной алгебре. Если a и b некоторые числа, то законы элементарной алгебры можно записать как:

1. $a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$ - коммутативный (переместительный) закон;
2. $\left.\begin{array}{l}(a + b) + c = a + (b + c) \\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\end{array}\right\}$ - ассоциативный (сочетательный) закон;
3. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ - дистрибутивный (распределительный) закон.

Заметим, что в ассоциативном и коммутативном законах можно заменить действие сложения умножением, а действие умножения – сложением. При этом получим другой закон, который будет справедлив как и первый. Однако в дистрибутивном законе подобной симметрии нет. Если в этом законе заменить сложение умножением, а умножение сложением, то придем к выражению $(a \cdot b) + c = (a + c) \cdot (b + c)$, которое в элементарной алгебре несправедлив.

Всегда ли это так? Оказывается существуют алгебры, и именно алгебра множеств, в которой все три закона симметричны относительно действий “сложения” и “умножения”.

1.6.2 Объединение множеств

Объединением множеств A и B называют множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B. Объединение множеств A и B обозначается символом $\cup$, т.е. $A \cup B$.

Определение объединения множеств можно записать как

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}. \qquad 1.6$$

Следует заметить, что объединение множеств иногда называют суммой множеств и иногда обозначают как $A+B$. Однако свойства объединения множеств несколько отличаются от свойств суммы при обычном арифметическом понимании. Поэтому термином сумма пользоваться не рекомендуется.

Примеры.

1. Пусть $A=\{4,5,8,12,16,21\}$; $B=\{1,2,5,7,12,17,21,30\}$. Тогда $A \cup B=\{1,2,4,5,7,8,12,16,17, 21,30\}$.
2. Пусть $A=\{a,b,c,d\}$; $B=\{a,d,e,f,g\}$. Тогда $A \cup B =\{a,b,c,d,e,f,g\}$.

Если множества A и B представить в виде точек, ограниченных окружностями A и B соответственно, то объединение множеств $A \cup B$ представляет собой закрашенную область, ограниченную обоими кругами, как это показано на рис. 1.1.

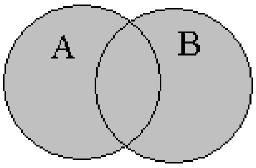


Рис. 1.1

Понятие объединения множеств можно распространить и на большее число множеств. Пусть $M=\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$ – совокупность n множеств $X_1, X_2, \ldots X_n$, называемую системой множеств. Объединение этих множеств представляет собой множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств системы M.

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i = \bigcup_{X \in M} X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \cdots \cup X_n \qquad 1.7$$

Для объединения множеств справедливы коммутативный и ассоциативный законы:

$$A \cup B = B \cup A \ ; \qquad 1.8$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C. \qquad 1.9$$

Вполне очевидно, что $A \cup \varnothing = A$. 1.10

1.6.3 Пересечение множеств

Пересечением множеств A и B называют множество, состоящее только их тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству

A, так и множеству B. Пересечение множеств обозначается символом ∩, т.е. $A \cap B$. Определение пересечения может быть записано как

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \ni B\} \qquad 1.11$$

Пересечение множеств иногда называют произведением множеств, что некорректно.

Примеры.

1. Если A={4,5,8,12,16,21}; B={1,2,5,7,12,17,21,30}, то $A \cap B$ ={5,12,21}.
2. Если A={a,b,c,d}; B={a,d,e,f,g}, то $A \cap B$ ={a,d}.

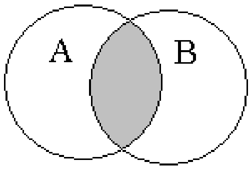


Рис. 1.2

Если A – множество левого круга, B – множество правого круга, то пересечение множеств $A \cap B$ представляет собой закрашенную область, являющуюся общей частью обоих кругов, как это показано на рис. 1.2.

Множества A и B называются непересекающимися, если они не имеют общих элементов, т.е $A \cap B$ =∅.

Пример. Пусть A={3,4,5}, B={2,6,7}. Тогда $A \cap B$ =∅.

Множества A и B находятся в общем положении, если выполняются три условия:

- Существует элемент множества A, не принадлежавший множеству B;
- Существует элемент множества B, не принадлежавший множеству A;
- Существует элемент, принадлежащий как множеству A, так и множеству B.

Пересечение распространяется и на большее количество множеств. Пусть имеем систему множеств M={X_1, X_2,.... X_n}. Множество

$$\bigcap_{X \in M} X = \bigcap_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap \cdots \cap X_n \qquad 1.12$$

представляет собой множество, элементы которого принадлежат каждому из множеств системы M.

Пересечение множеств обладает свойством коммутативности

$$A \cap B = B \cap A \qquad 1.13$$

и ассоциативности

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C \qquad 1.14$$

Кроме того имеет место соотношение: $A \cap \varnothing = \varnothing$. 1.15

1.6.4 Разность множеств

Разностью множеств A и B называют множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат только множеству A и не принадлежат множеству B. Разность множеств[1] A и B обозначается $A \backslash B$. Формально определение разности множеств A и B можно записать в виде:

$$A \backslash B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}. \qquad 1.16$$

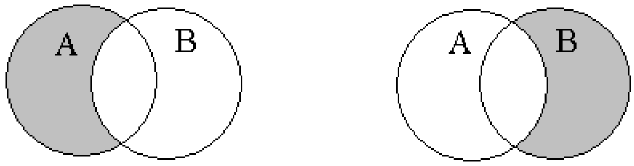
Примеры.

1. Пусть имеем A={4,5,8,12,16,21}; B={1,2,5,7,12,17,21,30}.
   Тогда $A \backslash B$ ={4,8,16}, а $B \backslash A$ ={1,2,7,17,30}.

[1] Разность множеств A и B называют также дополнением B до A.

2. $A=\{a,b,c,d\}$; $B=\{a,d,e,f,g\}$.

В этом случае получаем: $A\backslash B=\{b,c\}$ и $B\backslash A=\{e,f,g\}$.



a) b)

Рис. 1.3

Если как и ранее множества A и B изобразить в виде точек кругов A и B соответственно, то разность множеств будет представляться так, как это показано на рис. 1.3, где a) соответствует разности $A\backslash B$, b) - разности $B\backslash A$.

1.6.5 Симметрическая разность

Симметрической разностью множеств A и B называют множество, состоящее из объединения множеств разностей $A\backslash B$ и $B\backslash A$. Симметрическая разность множеств A и B обозначается символом Δ (иногда символом $\oplus$).

Таким образом, по определению

$$A\Delta B = A\backslash B \cup B\backslash A. \qquad 1.17$$

Нетрудно убедиться, что $A\Delta B = (A\cup B)\backslash(A\cap B)$. 1.18

Примеры.

1. Имеем: $A=\{4,5,8,12\}$; $B=\{1,2,12,\}$. Тогда $A\Delta B=\{1,2,4,5\}$.
2. $A=\{a,b,c,d\}$; $B=\{a,d,e,f,g\}$. В этом случае получаем $A\Delta B=\{b,c,e,f,g\}$.

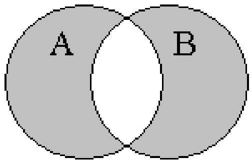


Рис. 1.4

Графически симметричная разность множеств A и B может быть представлена как показано на рис. 1.4. Закрашенные области соответствуют симметрической разности множеств A и В.

1.6.6 Универсальное множество

Как уже говорилось в 1.4, если в некотором рассмотрении участвуют только подмножества некоторого фиксированного множеств I, то это самое большое множество называют ***универсальным*** (***или полным***) ***множеством, или - универсум***.

В различных конкретных случаях роль универсального множества играют различные множества. Так, при рассмотрении студентов института универсальным (полным) множеством является вся совокупность студентов. Отдельные группы (факультеты) можно рассматривать как подмножества. В некоторых случаях универсальным множеством может являться и отдельная группа, в которой имеют место свои подмножества (отличники; студенты, проживающие в общежитии; юноши; девушки и т.п.).

Вполне очевидно, что для универсального множества справедливы следующие соотношения:

$$A\cap I = A \quad \text{и} \quad A\cup I = I \qquad 1.19$$

Универсальное множество удобно изображать графически в виде множества точек прямоугольника. Различные области внутри прямоугольника будут означать различные подмножества универсального множества. Изображение множества в виде областей в прямоугольнике, представляющем универсальное множество, называют диаграммой Эйлера-Венна.

1.6.7 Дополнение множества

Множество $\bar{A}$, определяемое из соотношения

$$\bar{A} = I \backslash A \qquad 1.20$$

называют ***дополнением множества*** A (до универсального множества I)

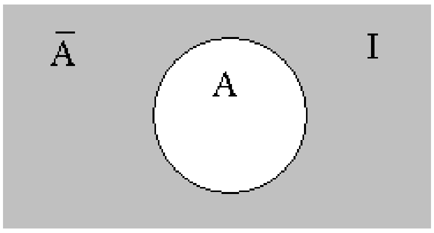
Графически дополнение множества A может быть представлено как показано на рис. 1.5.

Формальное определение дополнения множества A может быть записано как

$$\bar{A} = \{x | x \in I \text{ и } x \notin A\} \qquad 1.21$$

Из определения дополнения множества следует, что A и $\bar{A}$ не имеют общих элементов, т.е.

$$A \cap \bar{A} = \varnothing \qquad 1.22$$



Кроме того, $A \cap \bar{A} = I$ 1.23

Из симметрии формул 1.22 и 1.23 следует, что не только $\bar{A}$ является дополнением A, но и A является дополнением $\bar{A}$. Но дополнение $\bar{A}$ есть $\bar{\bar{A}}$. Таким образом $\bar{\bar{A}} = A$ 1.24

Рис. 1.5

С помощью операции дополнения удобно представить разность множеств:

$$A \backslash B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\} = \{x | x \in A \text{ и } x \in \bar{B}\}, \text{т. е. } A \backslash B = A \cap \bar{B} \qquad 1.25$$

1.7 Принцип двойственности в алгебре множеств

В теории множеств и ее приложениях очень важную роль играет принцип двойственности, который основан на следующих двух соотношениях:

1. Дополнение объединений равно пересечению дополнений.

$$I \backslash \bigcup_i A_i = \bigcap_i (I \backslash A_i) \qquad 1.26$$

2. Дополнение пересечения равно объединению дополнений.

$$I \backslash \bigcap_i A_i = \bigcup_i (I \backslash A_i) \qquad 1.27$$

Принцип двойственности состоит в том, что из любого равенства, относящегося к системе подмножеств фиксированного множества I, совершенно автоматически может быть получено другое двойственное равенство путем замены всех рассматриваемых множеств их дополнениями, объединений множеств – пересечениями, а пересечений – объединениями.

Приведем доказательство соотношения 1.26.

Пусть $x \in I \backslash \bigcup_i A_i$. Это означает, что x не входит в объединение $\bigcup_i A_i$, т.е. не входит ни в одно из множеств A_i. Следовательно, x принадлежит каждому из дополнений $I \backslash A_i$ и поэтому $x \in \bigcap_i (I \backslash A_i)$. Обратно: пусть $x \in \bigcap_i (I \backslash A_i)$, т.е. x входит в каждое $I \backslash A_i$. Тогда x не входит ни в одно из множеств A_i, т.е. не принадлежит их объединению $\bigcup_i A_i$, но тогда $x \in I \setminus \bigcup_i A_i$. Равенство доказано. Аналогично доказывается равенство 1.27.

1.8 Тождества алгебры множеств

С помощью операций объединения, пересечения, дополнения из множеств можно составить различные алгебраические выражения. Обозначим через $V(A,B,C)$ некоторое алгебраическое выражение, составленное из множеств A, B, C и представляющее собой некоторое множество.

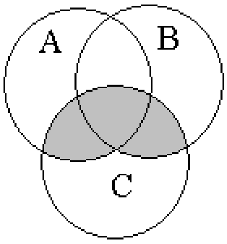
Пусть $W(A,B,C)$ – другое алгебраическое выражение, составленное из тех же множеств. Если оба алгебраических выражения представляют собой одно и тоже множество, то их можно приравнять друг к другу, получая алгебраическое тождество вида:

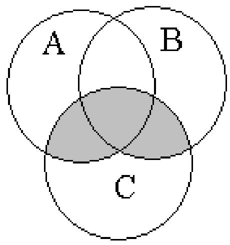
$$V(A,B,C)=W(A,B,C)$$

Такие тождества очень полезны при преобразовании алгебраических выражений над множествами.

1. Составим диаграммы Эйлера-Венна для выражений:

$(A \cup B) \cap C$ и $(A \cap C) \cup (B \cap C)$



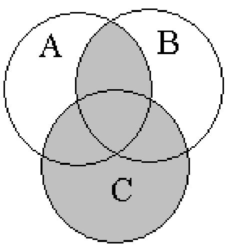


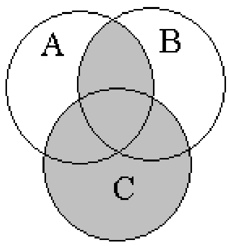
Из диаграмм видно, что оба выражения определяют одно и тоже множество, так что имеет место равенство[1]:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \qquad 1.28$$

2. Составим диаграммы Эйлера-Венна для выражений

$(A \cap B) \cup C$ и $(A \cup C) \cap (B \cup C)$.





Из построенных диаграмм видно, что они отражают одно и тоже множество, следовательно, между выражениями можно поставить знак равенства:

$$(A \cap B) \cup C=(A \cup C) \cap (B \cup C) \qquad 1.29$$

3. Легко убедиться, что если $B \subseteq A$, то

[1] Равенство аналогично дистрибутивному закону (a+b)c=ac+bc в обычной алгебре.

$$A \cap B = B \text{ и } A \cup B = A. \qquad 1.30$$

Действительно, все элементы множества B являются в то же время и элементами множества A (т.к. A включает B по определению). Следовательно, пересечение этих множеств, т.е. общая часть множеств A и B совпадает с B. В объединение множеств A и B множество B не внесет ни одного элемента, т.к. каждый элемент множества B является и элементом множества A (по определению), и следовательно $A \cup B = A$. Соответствующие диаграммы Эйлера-Венна приведены на рис. 1.6.

$B \subseteq A;\ A \cap B = B$ $\qquad\qquad$ $B \subseteq A;\quad A \cup B = A$

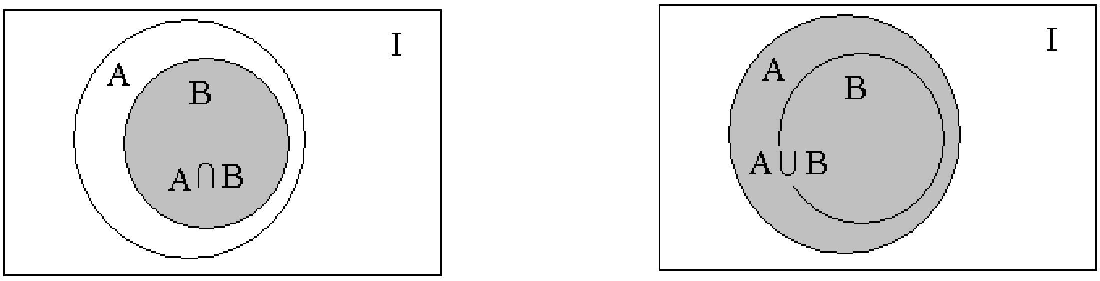


Рис. 1.6

4. Полагая в 1.30 $B=A$ и учитывая, что $A \subseteq A$, получаем:

$$A \cap A = A, \quad A \cup A = A. \qquad 1.31$$

Установление тождеств алгебры множеств с помощью диаграмм Эйлера-Венна не всегда является удобным. Имеется более общий способ установления тождественности двух алгебраических выражений. Ранее было показано, что множество A равняется множеству B, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Пусть как и ранее через $V(A,B,C)$ и $W(A,B,C)$ обозначены два алгебраических выражения, получившихся путем применения операций объединения, пересечения и дополнения к множествам A, B, C. Тогда, чтобы доказать, что $V=W$ достаточно показать $V \subseteq W$ и что $W \subseteq V$. В свою очередь, чтобы показать, что $V \subseteq W$, нужно убедиться, что из $x \in V$ следует $x \in W$. Аналогично, чтобы показать, что $W \subseteq V$, нужно убедиться, что из $x \in W$ следует $x \in V$.

Следует заметить, что каждое из доказательств состоит из последовательности утверждений вида “если P, то Q” (если справедливо P, то справедливо и Q). Для удобства это утверждение записывается как "$P \Longrightarrow Q$" и читается “из P следует Q”. Следовательно, если имеется последовательность $P_0, P_1, P_2, \cdots P_n$ такая, что $P_0 \Longrightarrow P_1, P_1 \Longrightarrow P_2, \cdots P_{n-1} \Longrightarrow P_n$ (из P_0 следует P_1, из P_1 следует P_2, ….. P_{n-1} следует P_n), то имеет место доказательство $P_0 \Longrightarrow P_n$.

Воспользовавшись этим методом, докажем некоторые тождества.

1. Доказать, что $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Доказательство:

$x \ni A \cap (B \cup C) \Longrightarrow x \in A$ и $x \in (B \cup C) \Longrightarrow x \ni A$ и ($x \in B$ или $x \in C$) $\Longrightarrow$ ($x \in A$ и $x \in B$) или ($x \ni A$ и $x \in C$) $\Longrightarrow$ ($x \in A \cap B$) или ($x \in A \cap C$) $\Longrightarrow$ $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Из этого следует, что $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$. (а)

Теперь необходимо доказать включение $\subseteq$ в обратную сторону:
$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow (x \in A \cap B)$ или $(x \in A \cap C) \Rightarrow$ $(x \in A$ и $x \in B)$ или $(x \ni A$ и $x \in C) \Rightarrow$ $x \ni A$ и $(x \in B$ или $x \in C \Rightarrow$ $x \in A$ и $x \in (B \cup C) \Rightarrow$ $x \ni A \cap (B \cup C)$.

Следовательно, $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$. (б)

Тогда на основании полученных выражений (а) и (б), согласно 1.5 имеет место равенство:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Аналогично доказывается и равенство $(A \cap B) \cup C$=$(A \cup C) \cap (B \cup C)$.

2. Доказать тождество:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}. \qquad 1.32$$

Доказательство:

a. $x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ и $x \notin B \Rightarrow x \notin \overline{A} \cap \overline{B}$,
т.е. $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$;

b.$x \in \overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin A$ и $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow$
$x \in \overline{A \cup B}$, т.е. $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

Следовательно, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

3. Доказать тождество:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \;. \qquad 1.33$$

Доказательство:

a. $x \in \overline{A \cap B} \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A$ и $x \notin B \Rightarrow x \in \overline{A}$ и (или) $x \in \overline{B}$,
т.е. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$;

b. $x \in \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A}$ или $x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin A$ и $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow$
$x \in \overline{A \cap B}$, т.е. $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$;

Следовательно, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Тождества 1.32 и 1.33 играют важную роль в преобразовании алгебраических выражений алгебры множеств и особенно в математической логике. Их обычно называют ***тождествами де-Моргана*** или ***законами де-Моргана.***

Конечно, для доказательств тождеств могут использоваться разные подходы. Докажем, например, тождество 1.33, основываясь на соотношении 1.32 и учитывая 1.24

Итак, необходимо доказать, что $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Приведем обе части равенства к одному виду. Выполняя операцию дополнения над обеими частями, получаем:

$$\overline{\overline{A \cap B}} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}.$$

Но, учитывая соотношение 1.24 ($\overline{\overline{A}} = A$), получаем $\overline{\overline{A \cap B}} = A \cap B$.

Для правой части на основании 1.32 имеем:

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}} = A \cap B. \quad .$$

Итак, обе части приведены к одному виду, следовательно, тождество справедливо.

На основании вышеизложенных операций и определений приведем основные законы теории множеств:

1. Законы коммутативности (переместительный закон):
   $A \cap B = B \cap A$;
   $A \cup B = B \cup A$.
2. Законы ассоциативности (сочетательный закон):
   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
3. Законы дистрибутивности (распределительный закон):
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
4. Законы идемпотетности:
   $A \cup A = A$
   $A \cap A = A$
5. Законы поглощения:
   $A \cup (A \cap B) = A$;
   $A \cap (A \cup B) = A$.
6. Законы склеивания:
   $(A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) = A$;
   $(A \cup B) \cap \left(A \cup \overline{B}\right) = A$.
7. Законы де-Моргана:
   $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
   $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
8. Законы нуля и единицы:
   $A \cup \varnothing = A$; $\quad A \cap \varnothing = \varnothing$;
   $A \cup I = I$; $\quad A \cap I = A$.
9. Закон двойного дополнения (инволюция):
   $\overline{\overline{A}} = A$.

1.9 Разбиение множества

Одной из наиболее часто встречающихся операций над множествами является операция разбиения множества на систему подмножеств.

Примеры:

1. Если N – множество натуральных чисел, а A и B – множества четных и нечетных чисел соответственно, то система $\{A,B\}$ будет разбиением множества N. Конечно, множество N можно разбить и на другие подмножества: множества чисел, делящихся на 2, на 3 и т.п.

2. Все множество студентов института можно разбить на отдельные подмножества, представляющие собой множества студентов группы (или факультета).

3. Продукция предприятия (а это есть множество) разбивается на продукцию первого сорта, второго сорта, исправимый брак, неисправимый брак и т.д., то есть – на отдельные подмножества.

Рассмотрим некоторое множество A и систему множеств $M=\{X_1, X_2, X_3, \dots X_n\}$.

<u>Определение</u>. Систему множеств M называют разбиением множества A, если удовлетворяются следующие условия:

1. Любое множество X из M является подмножеством множества A:

$$\forall X \in M \Longrightarrow X \subseteq A.$$

2. Любые два множества X_i и X_j из M являются непересекающимися:

$$\forall X_i, X_j \in M | X_i \neq X_j \Longrightarrow X_i \cap X_j = \varnothing.$$

3. Объединение всех множеств, входящих в разбиение, дает множество A, т.е. $\bigcup_{X \in M} X = A$.

1.10 <u>Упорядочение элементов и прямое произведение множеств</u>

1.10.1 <u>Упорядоченное множество</u>

Наряду с понятием множества очень важным понятием является понятие ***упорядоченного множества*** или ***кортежа***.

Кортежом называют последовательность элементов (совокупность элементов), в которой каждый элемент занимает определенное место. Сами элементы при этом называют компонентами кортежа (первая компонента, вторая компонента и т.д.).

Примерами кортежей могут быть: координаты n-мерного вектора, множество людей, стоящих в очереди; множество слов в фразе; числа, выражающие долготу и широту точки на местности; параметры, характеризующие состояние какого-либо объекта, устройства и т.п.

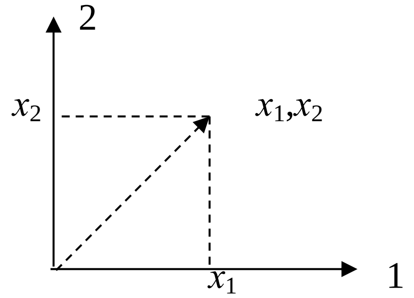
Любая техническая система часто описывается множеством параметров, принимающих числовые значения. Т.е. система представляется некоторым набором параметров, характеризующих систему – множеством некоторых чисел. При этом устанавливают, какой параметр считать первым, какой вторым и т.д. Т.е. совокупность параметров представляется в виде упорядоченного множества – кортежа.

Число элементов кортежа называют его длиной. Для обозначения кортежа используют круглые скобки. Так, например, $X=(x_1, x_2, \dots x_n)$, или $X=\langle x_1, x_2, \dots x_n \rangle$ – кортеж длины n с элементами $x_1, x_2, \dots x_n$.

Кортежи длиной 2 называют парами, 3 – тройками, 4 – четверками, n – n-ками. Пустой кортеж обозначается ( ) или символом Λ. В отличии от обычного множества в кортеже могут быть и одинаковые элементы (два одинаковых слова в фразе, одинаковые числовые значения параметров системы и т.п.).

Упорядоченной парой называется двухэлементное множество, для которого указано, какой элемент является первым, какой – вторым и обозначается (x_1,x_2)

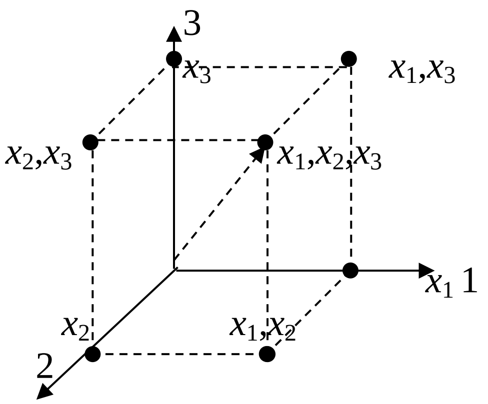
Если рассматривать упорядоченные множества, элементами которых являются вещественные числа, то такие упорядоченные множества называют точками пространства или векторами. Так, кортеж x_1, x_2 –рассматривается как точка на плоскости или вектор.



Компоненты x_1, x_2 будут проекциями вектора на оси 1 и 2.

$Пр_1(x_1,x_2)=x_1$; $Пр_2(x_1,x_2)=x_2$.

Кортеж (x_1, x_2, x_3) рассматривается как точка в трехмерном пространстве, или как 3-х мерный вектор:



$Пр_i=(x_1,x_2,x_3)=x_i$;   i=1,2,3

Если говорить о проекции кортежа сразу на оси, т.е. на координатную плоскость, то нетрудно увидеть, что

$Пр_{12}(x_1,x_2,x_3)=x_1,x_2$;

$Пр_{23}(x_1,x_2,x_3)=x_2,x_3$;

$Пр_{13}(x_1,x_2,x_3)=x_1,x_3$.

Обобщая эти понятия, видно, что упорядоченное n-элементное множество вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ рассматривается как точка в n–мерном пространстве, называемом гиперпространством или n-мерным вектором. При этом, $Пр_i(x_1,x_2, \ldots x_n)=x_i$, $i=\overline{1,n}$[1].

Два вектора равны, если они имеют одинаковую длину и их соответствующие компоненты равны, т.е. $(a_1, a_2, \cdots a_n) = (b_1, b_2, \cdots b_n) \Leftrightarrow \forall i(a_i = b_i)$.

1.10.2 <u>Прямое произведение множеств</u>

Прямым произведением множеств A и B называют множество, обозначаемое $A \times B$ и состоящее из всех тех и только тех упорядоченных пар, первая компонента которых принадлежит множеству A, а вторая – множеству B. Таким образом, элементами прямого произведения множеств являются двухэлементные кортежи вида (x,y).

Данное определение может быть записано в виде:

[1] Запись $i=\overline{1,n}$ означает перечисление i=1,2,3,….n.

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B)\} \quad 1.34$$

Пример.

Пусть A={1,2,4}; B={1,2}

Тогда $A \times B$={(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (4,1), (4,2)}.

Пример.

Пусть даны множества $A=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ и $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Тогда $A \times B$ есть множество обозначений шахматной доски.

Мощность произведения конечных множеств равна произведению мощностей этих множеств, т.е. $| A \times B | = |A| \cdot |B|$.

Операция прямого произведения легко распространяется и на большее число множеств. .Прямым произведением множеств A_1, A_2, … A_n называют множество, обозначаемое $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots a_n) \mid a_i \in A_i\}$.

Вполне очевидно, что $| A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n | = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$

Из определения прямого произведения множеств видно, что прямое произведение некоммутативно, т.е. $A \times B \neq B \times A$.

Пусть X и Y – отрезки вещественной оси. Прямое произведение $X \times Y$ является прямоугольником, каждая точка которого определяется координатами X и Y. (Рис. 1.7)

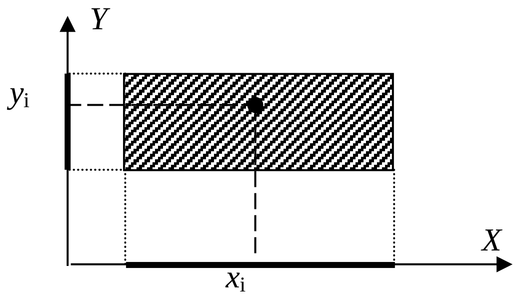


Рис.1.7

Частным случаем операции прямого произведения является понятие степени множества: $M^k = \underbrace{M \times M \times \cdots \times M}_{k \text{ раз}}$ (k –целое, >0). Специально определено, что $M^1 = M$; M^0=( ). Если R – множество вещественных чисел, то $R^2 = R \times R$ представляет собой вещественную плоскость, а $R^3 = R \times R \times R$ – трехмерное вещественное пространство.

Свойства прямого произведения. Прямое произведение дистрибутивно относительно объединения и пересечения, т.е:

1. $A \times (B \cup D) = (A \times B) \cup (A \times D)$; 1.35

   $(B \cup D) \times A = (B \times A) \cup (D \times A)$. 1.36

2. $A \times (B \cap D) = (A \times B) \cap (A \times D)$; 1.37

   $(B \cap D) \times A = (B \times A) \cap (D \times A)$. 1.38

1.9.3 Проекция множества

Операция проектирования множества тесно связана с операцией проектирования кортежа и может применяться лишь к таким множествам, элементами которых являются кортежи одинаковой длины.

Как было уже показано в предыдущем параграфе, проекцией кортежа $X=(x_1, x_2, \ldots x_n)$ на i-ю ось называется его i-тая координата (компонента) x_i и обозначаемая $\text{Пр}_i x=x_i$. Проекцией кортежа на оси с номерами $i_1, i_2, \ldots i_n$ называется кортеж $(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots x_{i_n})$ длины n (напомним, что длиной кортежа называется число его координат). Обозначается эта проекция $\text{Пр}_{i_1,i_2,\cdots i_n} x = (\, x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots x_{i_n})$. Пусть M – множество кортежей длины n. тогда проекцией множества M на i-ю ось называется множество проекций всех кортежей из M на i-ю ось и обозначается $\text{Пр}_i M = \{\text{Пр}_i x | x \in M\}$. Аналогично определяется проекция множества M на несколько осей: $\text{Пр}_{i_1,i_2,\cdots i_n} M = \{\text{Пр}_{i_1,i_2,\cdots i_n} x | x \in M\}$. В частности, если $M=A_1 \times A_2 \times \ldots A_n$, то $\text{Пр}_{i_1,i_2,\cdots i_n} = A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_n}$.

Пример 1. Проекция точки плоскости на первую ось – ее абсцисса, на вторую ось – ее ордината.

Пример 2. $M=\{(a, b, d); (c, b, d); (d, b, b)\}$.

Проекция этого множества $\text{Пр}_1 M=\{a, c, d\}$; $\text{Пр}_2 M=\{b\}$; $\text{Пр}_{2,3} M=\{(b, d), (b, b)\}$.

1.10 Соответствия

Рассмотрим два множества A и B. Элементы этих двух множеств могут каким-либо образом сопоставляться друг с другом, образуя пары (x, y). Если способ такого сопоставления определен, т.е. для каждого элемента $x \in A$ указан элемент $y \in B$, с которым сопоставляется элемент x, то говорят, что между множествами A и B установлено ***соответствие***. При этом не обязательно, чтобы в сопоставлении участвовали все элементы множества A и B. Для того, чтобы задать соответствие, необходимо указать:

- множество A, элементы которого сопоставляются с элементами другого множества;
- множество B, с элементами которого сопоставляются элементы первого множества;
- множество $P \subseteq A \times B$, определяющее закон, в соответствии с которым осуществляется соответствие, т.е. перечисляющее все пары x и y.

Таким образом, соответствие, обозначаемое, например, q, представляет собой тройку множеств:

$$q=(A, B, P); \quad P \subseteq A \times B.$$

В этом выражении 1-ю компоненту A называют областью отправления соответствия, 2-ю компоненту B – областью прибытия соответствия, 3-ю компоненту P – графиком соответствия.

Кроме рассмотренных множеств A, B, P с каждым соответствием неразрывно связаны еще два множества: множество $\text{Пр}_1 P$, называемое областью определения соответствия, и в которое входят элементы множества

A, участвующие в сопоставлении, и множество Пр$_2P$, называемое областью значений соответствия, в которое входят элементы множества B, участвующие в сопоставлении. Если Пр$_1P=A$, то соответствие называется ***всюду определенным***, в противном случае – ***частично определенным***. Если Пр$_2P=B$, то соответствие называется ***сюръективным***.

Множество всех $y \in B$, соответствующих элементу $x \in A$, называется ***образом*** x в B при соответствии P. Множество всех x, которым соответствует y, называется ***прообразом*** y в A при соответствии P. Короче, образ x есть $P(x)=\{y|(x, y) \in P\}$, а прообразом элемента $y \in B$ (обозначается $P^{-1}(y)$) является $P^{-1}(y)=\{x \mid (x, y) \in P\}$.

Если $(x, y) \in P$, то говорят, что элементу y соответствует элемент x при соответствии P. Геометрически это удобно изображать стрелкой, направленной от x к y.

Пример: $A=\{3, 4\}$; $B=\{2, 5\}$. $P=A \times B=\{(3, 2), (3, 5), (4, 2), (4, 5)\}$.

Это множество дает возможность получить, например, соответствия:

$P_1=\{(3, 2)\}$; $P_2=\{(3, 2), (3,5)\}$; $P_3=\{(3, 2), (3, 5), (4, 2)\}$.

Если $D \subset$ Пр$_1P$, то образом множества D называется объединение образов всех элементов из D. Аналогично определяется прообраз множества S$\subset$ B для любого S$\subset$Пр$_2$P.

Соответствие P называется ***функциональным*** (или однозначным), если образом любого элемента Пр$_1P$ является единственный элемент из Пр$_2P$. Заметим, что здесь не говорится о том, что различные элементы из Пр$_1P$ должны иметь различные образы из Пр$_2P$.

Соответствие называется ***инъективным***, если оно является функциональным, и при этом каждый элемент множества B имеет не более одного прообраза в A.

Соответствие P между A и B называется ***взаимнооднозначным***, если оно всюду определено, сюръективно, функционально и инъективно.

Пример 1. Англо-русский словарь устанавливает соответствие между множествами английских и русских слов. Это соответствие не является функциональным, так как одному английскому слову, как правило, ставится в соответствие несколько русских слов. Кроме того, оно практически никогда не является полностью определенным: всегда можно найти английское слово, не содержащееся в данном словаре. Областью отправления является множество всех английских слов, областью прибытия – множество всех русских слов. Область определения (значений) является подмножеством области отправления (прибытия).

Пример 2. Круг P радиуса 1 с центром в точке (3, 2) $\{(x, y) \mid (x-3)^2+(y-2)^2 \le 1\}$ задает соответствие между R и R. Образом числа 4 при этом соответствии является число 2, образом числа 3 – отрезок [1, 3] оси ординат; этот же отрезок [1, 3] является образом отрезка [2, 4] оси абсцисс, который в свою очередь служит прообразом числа 2 (См. Рис.1.8).

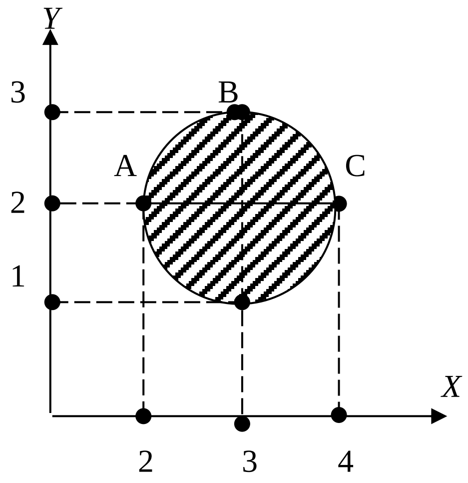


Рис. 1.8

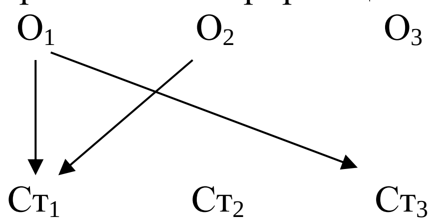
Данное соответствие не является функциональным. Примером функционального соответствия является дуга ABC.

Пример 3. Различные виды кодирования – кодирование букв азбукой Морзе, представление чисел в различных системах счисления, секретные шифры и т.п. – являются соответствиями между кодируемыми объектами и присваемыми им кодами. Эти соответствия, как правило, обладают всеми свойствами взаимно однозначного соответствия, кроме, быть может, одного – сюръективности.

Пример 4. В цехе имеется 3 специализированных станка $Ст_1$, $Ст_2$, $Ст_3$. Станок $Ст_2$ не работает. Штат содержит три оператора, обслуживающие эти станки – O_1, O_2, и O_3. Причем, O_3 болен (или в отпуске и т.п.) В этом случае распределение операторов по станкам можно выразить соответствием:

$$q = (\underbrace{\{O_1, O_2, O_3\}}_{A}; \underbrace{\{Ст_1, Ст_2, Ст_3\}}_{B}; \underbrace{\{(O_1, Ст_1), (O_1, Ст_3), (O_2, Ст_1)\}}_{P \subseteq A \times B}$$

Геометрическая интерпретация имеет вид:



Как видно, здесь областью определения соответствия является множество $Пр_1 P = \{O_1, O_2\} \neq A$. Следовательно, соответствие является частично определенным. Областью значений соответствий является множество $Пр_2 P = \{Ст_1, Ст_3\} \neq B$ и, следовательно, соответствие является несюръективным. Вполне очевидно, что соответствие не является функциональным, так как образом O_1 из A являются два элемента в B - $Ст_1$

и $Ст_3$. Соответствие является и неинъективным, т.к. элемент $Ст_1$ имеет два прообраза - $О_1$ и $О_2$.

1.10.1 Обратное соответствие

Для каждого соответствия $q=(A, B, P)$, $P\subseteq A\times B$ существует обратное соответствие, которое получается, если данное соответствие рассматривать в обратном порядке, т.е. определить $x\in A$, с которыми сопоставляются B элементы $y\in B$. Соответствие, обратное соответствию q обозначается $q^{-1}=(B, A, P^{-1})$, где $P^{-1}\subseteq B\times A$.

Для нашего примера имеем:

$q^{-1}=(\{Ст_1, Ст_2, Ст_3\}, \{О_1, О_2, О_3\}, \{(Ст_1, О_1), (Ст_1, О_2), (Ст_3, О_1)\}$ и графически это выглядит так:

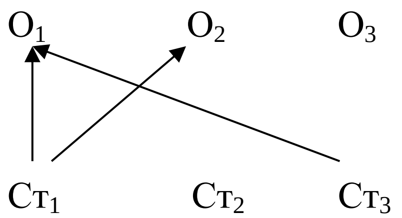


Рис. 1.9

Обратное соответствие обратного соответствия будет прямое соответствие, т.е.

$$(q^{-1})^{-1}=q \qquad 1.39$$

Таким образом, если, например, дано соответствие $P\subseteq A\times B$ и соответствие $Q\subseteq B\times A$ таково, что $(b,a)\in Q$ тогда и только тогда, когда $(a,b)\in P$, то соответствие Q называют обратным к P и обозначают P^{-1} $(Q = P^{-1})$.

1.10.2 Композиция соответствий

Композицией соответствий называют последовательное применение двух соответствий. Композиция соответствий есть операция с тремя множествами A, B, C, на которых определены два соответствия:

$$q=(A, B, P);\quad P\subseteq A\times B. \qquad 1.40$$

$$d=(B, C, R);\quad R\subseteq B\times C. \qquad 1.41$$

Причем область значений первого соответствия совпадает с областью определения второго соответствия:

$$Пр_2P=Пр_1R \qquad 1.42$$

Первое соответствие определяет для любого $x\in Пр_1P$ некоторый, возможно и не один элемент $y\in B$. Согласно определению операции композиции соответствий теперь нужно для $y\in B$ найти $z\in C$, воспользовавшись вторым соответствием. Таким образом, композиция соответствий сопоставляет с каждым элементом x из области определения первого соответствия $Пр_1P$ один или несколько элементов z из области значений второго соответствия $Пр_2R$.

Композицию соответствий q и d обозначают $q(d)$, а график композиции соответствий через $P\times R$ или $P \circ R$. При этом, композиция соответствий запишется в виде:

$$q(d)=(A, B, P\times R),\ P\times R\subseteq A\times C \qquad 1.43$$

Пример. Если q-соответствие, определяющее распределение водителей по автомашинам, d-соответствие, определяющее распределение автобусов по маршрутам, то соответствие $q(d)$ есть соответствие, определяющее водителей по маршрутам.

Операцию композиции соответствий можно распространить и на большее, чем два, число соответствий.

1.10.3 Отображения и функции

В математическом анализе понятие функции вводится следующим образом:

Пусть X – некоторое множество на числовой прямой. Говорят, что на этом множестве определена функция f , если каждому числу $x\in X$ поставлено в соответствие определенное число $y=f(x)$. При этом X называется областью определения, Y- есть совокупность всех значений, принимаемых этой функцией, и называется областью значений. Если же вместо числовых рассматривать множества какой либо другой природы, то придем к самому общему понятию функции.

Пусть A и B – два произвольных множества. Говорят, что на множестве A определена функция f, принимающая значения из B, если каждому элементу $x\in A$ поставлено в соответствие один и только один элемент из B.

Для множеств произвольной (не числовой) природы вместо термина “функция” пользуются термином “**отображение**”, говоря об отображении одного множества в другое. Для обозначения функции (отображения) из А в В пользуются записью:

$$f: A\rightarrow B \qquad 1.44$$

Если a – элемент из А, то соответствующий ему элемент b=f(a) из В называется его **образом** (при отображении f). Совокупность всех тех элементов a из А, образом которых является данный элемент $b\in B$, называется **прообразом** (полным образом) элемента b и обозначается $f^{-1}(b)$.

Пусть X некоторое множество из А. Совокупность $\{f(a) \mid a\in X\}$ всех элементов вида f(a), где $a\in X$, называется образом X и обозначается f(X). В свою очередь для каждого множества Y из В определяется его полный образ $f^{-1}(Y)$, а именно: $f^{-1}(Y)$ есть совокупность всех тех элементов из А, образы которых принадлежат Y[1]

Определено, что f есть отображение множества А на множество В, если f(A)=B. Такое отображение называют также **сюръекцией**. В общем случае, т.е. когда $f(A) \subset B$, говорят, что f есть отображение А в В. Если f(A) состоит из единственного элемента, то f называется функцией – константой.

[1] Может оказаться, что ни один элемент b из Y не имеет пустого прообраза, тогда прообраз $f^{-1}(Y)$ будет пустым множеством.

Если для любых двух различных элементов x_1 и x_2 из A их образы $y_1=f(x_1)$ и $y_2=f(x_2)$ также различны, то f называется **инъекцией**.

Отображение, f: $A\rightarrow B$, которое одновременно является и сюръекцией и инъекцией, называется **биекцией** или взаимнооднозначным соответствием между A и B.

Из вышесказанного видно, что ранее рассмотренное соответствие есть частный случай отображения.

1.11 Функция

Рассмотрим некоторое отображение f: $X\rightarrow Y$. Как уже говорилось, это отображение называется функцией, если оно однозначно, т.е. если для любых пар $(x_1, y_1)\in f$ и $(x_2, y_2)\in f$ из $x_1=x_2$ следует $y_1=y_2$.

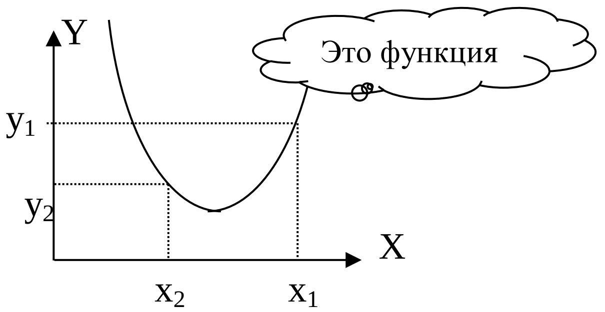


Рис. 1.10

Однозначное соответствие, определенное формулой f: $X\rightarrow Y$ называют функцией с вещественными значениями, если $Y\subseteq R$.[1]

Пример. Из пункта A в пункт B передача единицы сообщения по телефону, телеграфу, телемонитору, телефаксу стоит соответственно a, b, c, d. Тогда стоимость передачи сообщения можно представить как функцию от вида передачи. Для этого рассмотрим множества:

X={телефон, телеграф, телефакс, телемонитор};

Y={a, b, c, d}.

Функция f: $X\rightarrow Y$, получаемая из условий, может быть записана в виде: f={(телефон, a); (телеграф, b); (телефакс, c); (телемонитор, d)}.

Значение y в любой из пар $(x, y)\in f$ называют функцией от данного x и записывают в виде: $y=f(x)$. Такая запись позволяет ввести следующее формальное определение:

$$f=\{(x, y)\in X\times Y \mid y=f(x)\} \qquad 1.45$$

Таким образом, символ f используют при определении функции в двух смыслах:

[1] Понятие функции является чрезвычайно широким и изучению отдельных классов функций посвящены многие математические дисциплины.

- f является множеством, элементами которого будут пары (x, y), участвующие в соответствии;
- f(x) является обозначением для $y \in Y$, соответствующего данному $x \in X$.

Функция типа $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$ называется n – местной функцией. В этом случае принято считать, что функция имеет n аргументов: $f(a_1, a_2, \ldots a_n) = b$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, … $a_n \in A_n$, $b \in B$.

Пусть даны функции $f{:}A \to B$ и $g{:}B \to C$. Функция $h{:}A \to C$ называется композицией функций f и g, если имеет место равенство: h(x) = g(f(x)), где $x \in A$. Композиция функций обозначается $f \circ g$. Композиция функций f и g представляет собой последовательное применение этих функций-g применяется к результату f, т.е. функция h получается подстановкой f в g. Для многоместных функция $f{:}A^n \to B$ и $g{:}A^m \to C$ возможны различные варианты подстановок f в g, дающие функции различных типов. Особый интерес представляет случай, когда задано множество функций типа: f_1: $A^{n_1} \to A, \ldots,$ f_m: $A^{n_m} \to A$. В этом случае возможны, во-первых, любые подстановки функций друг в друга, а во-вторых, любые переименования аргументов. Функция, полученная из данных функций f_1, f_2, … f_m некоторой подстановкой их друг в друга и переименованием аргументов, называется их суперпозицией.

1.11.1 Способы задания функции

Формальное определение позволяет определить способы задания функции.

1. Перечисление всех пар (x, y), составляющих множество f. Применим, когда X – конечное множество. Для наглядности пары (x, y) располагают в виде таблицы (Табличный метод).
2. Во многих случаях X и Y представляют собой множества вещественных или комплексных чисел. В таких случаях под f(x) понимается формула, т.е. выражение, которое надо произвести над $x \in X$, чтобы получить y.

Пример. Пусть X=Y=R и $f = \{(x, y) \in R^2 \mid y = \mathrm{Sin}\, x^2\}$.

Тогда $f(x) = \mathrm{Sin}\, x^2$.

Пусть X_1, X_2, …X_n –попарно непересекающиеся подмножества X. Если через $f_I(x)$, $i = \overline{1,n}$ обозначить формулу, определяющую y при $x \in X_I$, то имеем:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ при } x \in X_1 \\ \vdots \\ f_n(x) \text{ при } x \in X_n \end{cases}$$

3. Если X и Y –множества вещественных чисел, то элементы $(x, y) \in f$ можно изобразить в виде точек на плоскости R^2. Полная совокупность таких точек будет представлять собой график функции f(x).

Если в выражении f: $X \to Y$ $X = U \times V$, то имеет место функция 2-х переменных u и v, обозначаемой через f(u, v), где $u \in U$, $v \in V$.

Формальное определение функции двух вещественных переменных будет следующим:

$$f = \{(u, v, y) \in U \times V \times Y \mid y = f(u, v)\} \qquad 1.46$$

Аналогично определяют функцию от 3-х и большего числа переменных.

1.11.2 Сужение функции

Имеем f: $X \to Y$. A – произвольное множество. Сужением функции f на множество A называют функцию f_A, содержащую все те и только те пары $(x, y) \in f$, в которых $x \in A$, а значит $(x, y) \in A \times Y$. Следовательно:

$$f_A = f \cap (A \times Y) \qquad 1.47$$

Операцию сужения функции часто используют для табличного задания функций с ∞ областью определения X.

1.11.3 Обратная функция

Понятие обратной функции применимо для такого отображения f: $X \to Y$, которое:

a. является однозначным, т.е. для любых $(x_1, y_1) \in f$ и $(x_2, y_2) \in f$ из $x_1=x_2$ следует $y_1=y_2$.

b. является взаимно однозначным, т.е. из $x_1 \neq x_2$ следует $y_1 \neq y_2$.

При выполнении этих условий отображение f: $X \to Y$ является однозначным, т.е. определяет функцию y=f(x). Обратное отображение $f^{-1}: Y \to X$ также является однозначным и определяет функцию $x=f^{-1}(y)$, называемую обратной по отношению к функции y=f(x).

1.11.4 Функция времени

В основе понятия функции времени лежит множество $T \subseteq R$ с элементами t, называемое множеством моментов времени. Время обладает направленностью. Если t_1 и $t_2 \in T$, и $t_1 < t_2$, то момент t_1 предшествует моменту t_2, т.е. T – упорядоченное множество.

Функция времени определяет отображение f множества моментов времени T на множество вещественных чисел R: f: $T \to R$. Элементами f будут пары (t, x), обозначаемые x(t), где $t \in T$, $x \in R$. Каждая такая пара определяет значение функции в момент t и называется **событием** или **мгновенным значением** функции. Дальнейшее уточнение функций времени связано с уточнением ее области определения, т.е. вида множества T. Если T=R, т.е. t принимает любые вещественные значения от $-\infty$ до $+\infty$, то x(t) называют функцией с **непрерывным временем**. Например, $x(t) = A \cdot Sin(\omega \cdot t + \varphi)$.

В практике часто используют сужение x(t) на ограниченный интервал времени $t_1 < t \le t_2$, который обычно считают полузакрытым и обозначают $(t_1, t_2]$. Полузакрытые интервалы удобны тем, что допускают последовательное соглашение друг с другом.

Сужение функции x(t), заданной на интервале $-\infty < t < +\infty$ на интервал $(t_1, t_2]$ называют отрезком функции x(t) и обозначают $x_{(t_1,t_2)}$, т.е. $x_{(t_1,t_2)} = \{x(t) \mid t \in (t_1, t_2)\}$.

Если множество T представляет собой множество натуральных чисел, то говорят о функции с дискретным временем. В этом случае элементы множества T обозначают через n, так что пара (n, x), обозначаемое также x[n] или x_n определяет значение функции в момент n.

1.12 Отношения

Важным частным случаем отображения является случай, когда множества A и B совпадают. При этом отображение R: $A \to A$ будет представлять собой отображение множества A в самого себя и будет определяться парой (A, R), где $R \subseteq A^2$. В этом случае для обозначения данного отображения используется термин **отношение** и вводят специальную символику. Пусть отображение (A, R) является отношением. Рассмотрим элемент $(a,b) \in R \subseteq A^2$. Говорят, что элемент a находится в отношении R к элементу b и записывают это в виде aRb

Подмножество $R \subset A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ называется n-местным отношением между A_1, A_2, …..A_n (или просто на A, если $A_1=A_2=\ldots=A_n=A$). Если n=1, то R называется унарным отношением. В этом случае R есть просто подмножество множества A, $R \subset A$. Если n=2, то R называется бинарным отношением между A_1 и A_2, $R \subset A_1 \times A_2$. Если n=3, то R называется тернарным отношением, A_2, $R \subset A_1 \times A_2 \times A_3$. Говорят, что $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ находятся в отношении R, если упорядоченная n-ка $a_1, a_2, \ldots a_n) \in R$. Одноместные отношения называются признаками: a обладает признаком R.

Наиболее часто встречаются бинарные отношения. Если R есть некоторое бинарное отношение, то запись $(x, y) \in R$ и xRy –взаимозаменяемы.

Пример 1. Множество {(2, 4), (7, 3), (3, 3), (2, 1)}, будучи множеством упорядоченных пар натуральных чисел, есть бинарное отношение на N, где N – множество натуральных чисел.

Пример 2. Отношение “меньше чем” для целых чисел есть множество {(x, y)| для целых чисел x и y найдется такое положительное число z, что x+z=y}. Если это отношение выразить символически обычным образом, то предложения “4<9” и “$(4, 9) \in <$” будут синонимичны (здесь знаком “<” обозначено отношение “меньше чем”).

Пример 3. Операция сложения в множестве целых чисел z: выражение k=m + n можно записать в форме утверждения $(k, m, n) \in +$, т.е. k есть сумма целых чисел m и n. Это отношение является тернарным отношением.

Для бинарных отношений, являющихся как и соответствия, подмножествами прямых произведений, аналогично соответствиям вводятся понятия области определения, области значений, проекции на множества (оси) и т.п. Например, область определения отношения R – это множество первых координат из R, а область значений R – множество вторых координат элементов из R. Например, областью определения для отношения материнства служит множество всех матерей, в то время как областью значений этого отношения – множество всех людей.

Пусть дано отношение R на A. Для любого подмножества $A_1 \in A$ естественно определяется отношение R', называемое сужением R на A_1, которое получается из R удалением всех пар, содержащих элементы, не принадлежащие A_1. Другими словами, $R' = R \cap A_1^2$.

1.12.1 Задание бинарных отношений

Для задания бинарных отношений используются любые способы задания множеств (например, список пар, для которых данное отношение выполняется). Отношения на конечных множествах обычно задаются списком или таблицей. Бинарное отношение на множестве A=(a_1, a_2, …, a_n) – это квадратная таблица с m строками и m столбцами, в которой элемент, стоящий в i-той строке и j-том столбце

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если} \quad a_i R a_j; \\ 0 \text{ в протвном случае.} \end{cases}$$

Пример. На множестве M_6 ={1, 2, 3, 4, 5, 6} задать отношения: “≤”, “быть делителем”. Решение представлено в таблицах (по строкам записаны первые элементы, по столбцам – вторые).

Отношение “≤”

M_6 \ M_6	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	1	1	1
3	0	0	1	1	1	1
4	0	0	0	1	1	1
5	0	0	0	0	1	1
6	0	0	0	0	0	1

Отношение “иметь общий делитель, отличный от единицы”

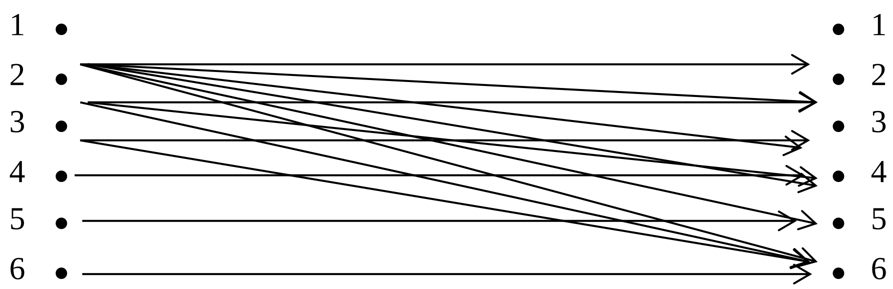
M_6 \ M_6	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1
4	0	1	0	1	0	1
5	0	0	0	0	1	0
6	0	1	1	1	0	1

Отношение “Быть делителем” {(x, y) | x делит y}

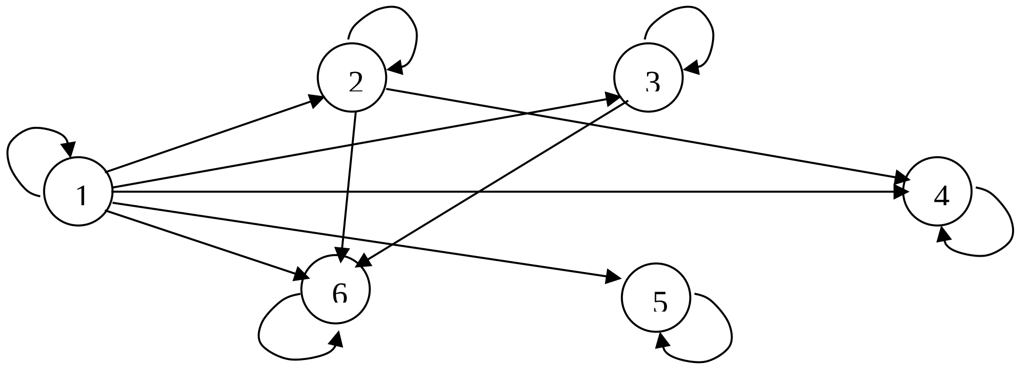
M_6 \ M_6	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1

Графическое задание бинарных отношений было разъяснено при графическом изображении прямого произведения двух множеств. Стрелочное задание бинарных отношений – элементы X и Y – изображаются в виде точек плоскости, которые соединяются стрелками, направленными от x к y только для тех x∈ X и y∈ Y, для которых (x, y) ∈ R. Например, отношение “x делит y “ изобразится графом:

X “x делит y” Y



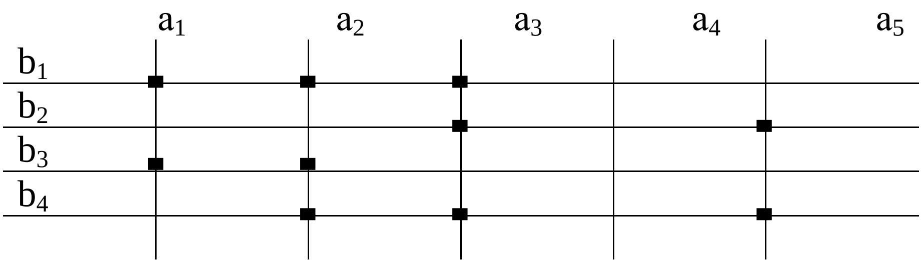
Можно изобразить M_6 один раз, тогда граф упростится и примет вид:



Сечением для x=a множества R называется множество элементов $y \in Y$, для которых $(a, y) \in R$. Множество сечений отношения $R \in X\times Y$, обозначаемое $Y|R$, называется **фактормножеством** множества Y по отношению R и полностью определяет R.

Рассмотрим некоторое отношение $R \subset X\times Y$, задаваемое графиком. Сечение по a_1 множества R есть $\{b_1, b_3\}$, сечение по a_2 – $\{b_1, b_3, b_4\}$ и т.д.

Напишем под каждым элементом X соответствующее сечение. Тогда вторая строка дает фактормножество множества Y по R.



a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$\{b_1\ b_3\}$	$\{b_1, b_3, b_4\}$	$\{b_1, b_2, b_4\}$	$\{\varnothing\}$	$\{b_2, b_4\}$

Этими сечениями полностью определяется отношение R.

Вместо одного элемента $x\in X$ можно рассматривать подмножество $A\subset X$. Сечение R(A) множества по $A\subset X$ есть объединение сечений R(x) по всем $x\in A$. Таким образом, R(A) есть подмножество множества Y, образуемое всеми теми элементами $y\in Y$, для которых $(x, y) \in R$, $x\in A$.

Пример. $R(a_2)= \{b_1, b_3, b_4\}$; $R(a_3)= \{b_1, b_2, b_4\}$; $R(\{a_2, a_3\})=\{\{b_1, b_2, b_3, b_4\}=B$.

Отношения называется **обратным** к отношению R (обозначается R^{-1}), если $a_i R^{-1} a_j \Leftrightarrow a_j R a_i$. Или: $R^{-1} = \{b, a) \mid aRb\} \Leftrightarrow \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$. Из определения непосредственно следует, что $(R^{-1})^{-1} = R$.

Пример. Пусть $S=\{(b_1, c_2), (b_2, c_1), (b_2, c_2), (b_3, c_3), (b_4, c_3)\}$. Тогда обратное отношение $S^{-1} = \{(c_2, b_1), (c_1, b_2), (c_2, b_2), (c_3, b_3), (c_3, b_4)\}$.

Поскольку в общем случае отношения (как, впрочем, и отображения) представляют собой множества, элементами которого являются кортежи, то, естественно, к ним применимы и соответствующие операции над множествами. И вполне очевидно, что:

$(a_1,a_2,\ldots a_n) \in \Phi \cup \Psi \Leftrightarrow (a_1,a_2,\ldots a_n) \in \Phi$ или $(a_1,a_2,\ldots a_n) \in \Psi$;

$(a_1,a_2,\ldots a_n) \in \Phi \cap \Psi \Leftrightarrow (a_1,a_2,\ldots a_n) \in \Phi$ и $(a_1,a_2,\ldots a_n) \in \Psi$;

$(a_1,a_2,\ldots a_n) \in \Phi \setminus \Psi \Leftrightarrow (a_1,a_2,\ldots a_n) \in \Phi$ и $(a_1,a_2,\ldots a_n) \notin \Psi$;

$(a_1,a_2,\ldots a_n) \in \overline{\Phi} \Leftrightarrow (a_1,a_2,\ldots a_n) \notin \Phi$.

1.12.2 Свойства бинарных отношений

Бинарное отношение R ($R \subset A \times A = A^2$), заданное на множестве A называется **отношением тождества**, если все его элементы (кортежи) имеет вид (a,a), где $a \in A$ и обозначается id_A, т.е. $id_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$. Пары, вида (a,a) называются диагональными, а отношение id_A называют диагональным. Вполне понятно, что матрица отношения тождества будет иметь вид единичной матрицы:

Очевидно, что для любого бинарного отношения R, определенного на множестве A, имеет место равенство: $id_A * R = R * id_A = R$.

Бинарное отношение R, заданное на множестве A, называется **рефлексивным**, если $id_A \subseteq R$, т.е. когда оно включает диагональ.

Примеры:

a. A – множество прямых на плоскости, на котором задано отношение R= «Прямая X параллельная прямой Y».

Действительно, как известно из элементарной геометрии, две прямые параллельны, если они либо совпадают, либо не имеют ни одной общей точки (нигде не пересекаются). Поскольку прямая X совпадает сама с собой, то пара (X,X) принадлежит данному отношению R, т.е. $(X,X) \in R$.

b. A – множество студентов нашего вуза и на котором задано отношение P= «студент S ровесник студенту V». Очевидно, что каждый ровесник сам себе, и поэтому $(S,S) \in P$.

Бинарное отношение R, заданное на множестве A называется **иррефлексивным**, если aRa (или $(a,a) \in R$) не имеет смысла. Или тоже самое можно сформулировать как $(a,a) \notin R$.

Пример:

a. На числовом множестве D задано отношение R=”<”. Вполне очевидно, что для любых двух чисел x отношение x<x всегда ложно, т.е. все диагональные элементы (x,x) этого отношения на матрице отношений будут равны нулю.

Следует отметить, что **иррефлексивные** отношения еще называют **антиреффлексивным**.

- Бинарное отношение R, заданное на множестве A называется **симметричным**, если для пары $(a, b) \in A^2$ из aRb следует bRa ($R \subseteq R^{-1}$).

Примеры:

a. Прямая A перпендикулярна прямой B в плоскости Z.

b. Студент X является соседом по парте студента Y.

(Заметим, что приведенные отношения не являются рефлексивными).

- Бинарное отношение R, заданное на множестве A называется, **антисимметричным**, если из $a_i R a_j$ и $a_j R a_i$ следует, что $a_i = a_j$ ($R \cap R^{-1} = id_A$).

  Пример:

  a. Отношение включения для множества, т.е. отношение «множество A является подмножеством множества B». И если A $\subseteq$ B и B $\subseteq$A, то из аксиомы объемности следует, что A = B.

- Бинарное отношение R, заданное на множестве A называется **транзитивным**, если для любых a, b, c $\in$ A из aRb и bRc следует aRc ($R \subseteq R^2$).

  Примеры:

  a. Отношения подобия на множестве треугольников;

  в. Отношение «быть ровесником», заданное на множестве студентов;

  c. Отношение «быть больше (меньше)», заданное на множестве действительных чисел.

- Бинарное отношение R, заданное на множестве A называется **отношением эквивалентности** (или просто эквивалентностью), если для любых элементов a, b, c $\in$ A выполняются следующие свойства:

  - рефлексивность: aRa ($id_A \subseteq R$);
  - симметричность: aRb $\Rightarrow$ bRa ($R \subseteq R^{-1}$);
  - транзитивность: aRb и bRc $\Rightarrow$ aRc ($R^2 \subseteq R$).

Примеры:

a. Отношение равенства “=” на любом множестве является отношением эквивалентности (рефлексивность: a=a; симметричность: a=b$\Rightarrow$b=a; транзитивность: (a=b и b=c) $\Rightarrow$ a=c).

b. Отношение R={(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 3), (3, 2), (3, 1)} является отношением эквивалентности, так как оно рефлексивно: $\forall$(a){(a, a) $\in$ R}; симметрично: (a, b) R (b, a) $\in$R; транзитивно: ((a, b) и (b, c) $\in$R $\Rightarrow$ (a, c) $\in$ R, где a, b –числа, принимающие значения 1, 2, 3. Например, транзитивность (1, 2) $\in$ R и (2, 3) $\in$ R влечет (1, 3) $\in$ R. Отметим, что в этом примере $R=R^{-1}$.

c. Отношение “быть на одном курсе” на множестве студентов факультета;

d. Отношение “иметь одинаковый остаток при делении на 3” на множестве натуральных чисел;

e. Отношение параллельности на множестве прямых плоскости.

d. Отношение подобия на множестве треугольников и т.п.

Считается, что термин “отношение эквивалентности” применяется только в случае, если выполняются следующие три условия:

- Каждый элемент эквивалентен самому себе;
- Высказывание, что два элемента являются эквивалентными, не требует уточнения, какой из элементов рассматривается первым, а какой вторым;
- Два элемента, эквивалентные третьему, эквивалентны между собой.

Для обозначения эквивалентности иногда применяют символ ”~”[1].

Тогда общее определение **отношения эквивалентности** получим, записав три вышеприведенные условия в виде следующих соотношений:

$a \sim a$ (рефлексивность);

$a \sim b \Rightarrow b \sim a$ (симметричность);

$a \sim b$ и $b \sim c \Rightarrow a \sim c$ (транзитивность).

Отношение эквивалентности, заданное на множестве A, тесно связано с разбиением множества на классы. Эта определяется следующим утверждением:

Лемма: «Всякое отношение эквивалентности, определенное на множестве A, задает разбиение множества на классы».

Доказательство:

Пусть на множестве A задано отношение эквивалентности «~». Выполним следующее построение. Выберем элемент $a_1 \in A$ и образуем класс (подмножество A) A_1, состоящий из элемента a_1 и всех элементов, эквивалентных a_1; затем выберем элемент $a_2 \notin A_1$ и образуем класс A_2, состоящий из a_2 и всех элементов, эквивалентных a_2 и т.д. получится система классов A_1, A_2….(возможно бесконечная) такая, что любой элемент из A входит в один класс. Вполне очевидно, что полученная система классов обладает свойствами:

- $\bigcup\limits_i A_i = A$;
- $\forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \varnothing$;
- $\forall i \quad A_i \in A$.

Построенное разбиение, т.е. система классов, называется системой классов эквивалентности по отношению R.

С другой стороны, любое разбиение A на классы определяет некоторое отношение эквивалентности, а именно, отношение “входить в один и тот же класс данного разбиения”, что утверждается следующей леммой:

Лемма: «Всякое разбиение множества A на классы задает на множестве A отношение эквивалентности»

Доказательство:

Пусть $a, b \in A$ и $aRb \Leftrightarrow a$ и b лежат в одном классе разбиения. Тогда для любого $a \in K$ aRa, т.е данное отношение рефлексивно.

Пусть K – некоторый класс разбиения, и $a, b \in K$. Тогда и $b, a \in K$, т.е. $aRb \Rightarrow bRa$, что доказывает симметричность отношения элементов данного класса.

[1] Также для обозначение эквивалентности используется символ “≡”.

Из aRb и bRc следует, что a, b, c $\in$ K. Следовательно aRc что доказывает транзитивность отношения элементов данного класса.

Таким образом доказано, что элементы, определяющие класс разбиения, связаны отношением эквивалентности.

Пример. Разбиение множества натуральных чисел N={1, 2, ….} по отношению "иметь общий остаток от деления на 7" состоит из 7 бесконечных (счетных) классов: первый класс –{0, 7, 14, 21,….} (остаток 0), второй класс –{1, 8, 15, 22,…} (остаток 1), третий класс –{2, 9, 16,….} (остаток 2) ……, седьмой класс – {6, 13, 20, 27,….} (остаток 6).

Пример 5. Отношение "проживание в одном доме" в множестве жителей России образует разбиение населения России.

Множество классов эквивалентности множества A образует фактормножество множества A по отношению эквивалентности и обозначается A|~.

Системой представителей некоторого отношения эквивалентности ~ называется множество, содержащее по одному элементу из каждого класса эквивалентности.

Пример. Пусть на плоскости определена декартова система координат и координаты обозначаются через x и y. Будем говорить, что две точки M_1 и M_2 эквивалентны, если их абсциссы равны: $M_1 \sim M_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Класс эквивалентности – прямая, параллельная оси ординат. Фактормножества образованы прямыми на плоскости, параллельными оси ординат. Система представителей может определена точками, лежащими на оси абсцисс, т.е. точками с координатами (x, 0), $x \in R$.

Другими примерами отношения эквивалентности могут служить равенство и подобие фигур, логические утверждения, выражаемые с помощью оборотов "иметь такое же", "быть таким же".

1.12.4 Отношение порядка

Часто приходится сталкиваться с отношениями, которые определяют некоторый порядок расположения элементов множества. Т. е. во многих случаях можно расположить элементы множества A или группы элементов в некотором порядке или другими словами - ввести отношение порядка на множествах.

Различают отношение нестрогого и строгого порядка.

Отношением нестрогого порядка называют отношение, обладающее свойствами:

- $x \le x$ истинно (рефлексивность);
- $x \le y$ и $y \le x \Rightarrow x=y$ (антисимметричность);
- $x \le y$ и $y \le z \Rightarrow x \le z$ (транзитивность).

Отношением строгого порядка называют отношение:

- $x < x$ ложно (антирефлексивность);
- $x < y$ и $y < x$ взаимоисключается (несимметричность);

- $x < y$ и $y < z \Rightarrow x < z$ транзитивность.

Элементы a и b сравнимы по отношению порядка R, если выполняется условие aRb или bRa. Множество А, на котором задано отношение порядка R, называется полностью (линейно) упорядоченным, если любые два элемента А сравнимы, и частично упорядоченным в противном случае.

Пример 1. Отношения “≤”, “≥” являются отношением нестрогого порядка (или просто отношением порядка), а отношения “<”, “>” являются отношением строгого порядка. Оба отношения полностью (линейно) упорядочивают множества чисел N, Z, R.

Пример 2. Определим отношения “≤” и “<” для n-элементных числовых кортежей следующим образом: $(a_1, a_2, \dots a_n) \le (b_1, b_2, \dots b_n)$, если $a_1 \le b_1, a_2 \le b_2, \dots a_n \le b_n$); $(a_1, a_2, \dots a_n) < (b_1, b_2, \dots b_n)$ если $(a_1, a_2, \dots a_n) \le (b_1, b_2, \dots b_n)$ и хотя бы для одной координаты выполнено условие $a_i < b_i$. Эти отношения определяют частичный порядок на множестве n-элементных кортежей (векторов) с числовыми координатами. Кортежи (5, 3, -2) < (5, 4, -2), а кортежи (5, 2, -3) и (5, 0, 0) не сравнимы.

Пример 3. Система подмножеств множества А отношением включения частично упорядочена. Например, $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$, а {1, 2} и {1, 3, 4} не сравнимы.

Пример 4. Отношение подчиненности на предприятии задает строгий частичный порядок. В нем несравнимыми являются сотрудники разных подразделений.

Пример 5. Пусть дан алфавит А=(а, б, …) Отношением предшествования этот алфавит полностью упорядочивается. Отношение предшествования обозначается знаком “<” ($a_i < a_j$, если a_i предшествует a_j в списке букв алфавита). На основе отношения предшествования букв строится отношение предшествования слов, определяемое следующим образом:

Пусть даны слова $\alpha_1 = a_{11}, a_{12}, \dots a_{1m}$, $\alpha_2 = a_{21}, a_{22}, \dots a_{2m}$. Тогда $\alpha_1 < \alpha_2$ если и только если либо: 1). $\alpha_1 = \beta a_i \gamma$, $\alpha_2 = \beta a_j \delta$ и $a_i < a_j$ (β, γ, δ - некоторые слова, возможно пустые; a_i, a_j - буквы); 2). $\alpha_2 = \alpha_1 \beta$, где β - непустое слово (Например, α_1 – слово “стол”, а α_2 – “столовая”, тогда β - слово “овая”). Это отношение задает полное упорядочение множества всех конечных слов в алфавите А, которое называется лексикографическим упорядочением слов. Заметим, что под словом здесь понимается любая последовательность букв, записанных рядом, возможно, пустая. Лексикографическое упорядочение дат от ранних к поздним требует следующей их записи: сначала год, потом месяц, затем число месяца. Например, 99.01.01.

На множестве А может задаваться несколько отношений R_i, $i \in I$, включая и эмпирические отношения и отношения операции. Примерами эмпирических отношений являются отношения доминирования, предпочтения, сравнения по любым признакам. Примерами отношений, задаваемых с помощью операций, являются алгебраические операции сложения, умножения и т. п.

Между элементами множества А имеет место доминирования, если эти элементы обладают свойствами:

- никакой элемент не может доминировать над самим собой, т.е. x>>x ложно (антирефлексивность);
- x>>y и y>>x взаимоисключается (несимметричность);
- транзитивность исключается.

1.13 Конечные и бесконечные множества

Рассматривая размерные множества, видно, что иногда можно, если не фактически, то хотя бы примерно, указать число элементов в данном множестве. Например, множество всех вершин многогранника, множество всех простых чисел, не превосходящих данное число, множество всех молекул в некотором объеме и т.д. Каждое из этих множеств содержит конечное, хотя, быть может, и неизвестное нам число элементов. С другой стороны, существуют множества, состоящие из бесконечного числа элементов. Таково, например, множество всех натуральных чисел, множество всех точек на прямой, всех кругов на плоскости и т.п.

Два конечных мы можем сравнивать по числу элементов. Спрашивается, можно ли подобным образом сравнивать бесконечные множества? Имеет ли смысл, например, вопрос о том, чего больше: рациональных чисел или натуральных, точек на прямой или точек на отрезке? Для сравнения конечных множеств необходимо определить количество элементов в сравниваемых множествах, тем самым осуществить сравнение множеств. Но можно поступить и иначе, а именно – попытаться установить биекцию между элементами сравниваемых множеств, т.е. взаимно однозначное соответствие, при котором каждому элементу одного множества соответствует один и только один элемент другого множества, и наоборот. Ясно, что взаимно однозначное соответствие между двумя конечными множествами можно установить тогда и только тогда, когда число элементов в них одинаково. Установление взаимно однозначного соответствия пригодно и для сравнения и бесконечных множеств.

1.13.1 Счётные и несчётные множества

Простейшими среди бесконечных множеств является множество натуральных чисел.

Определение: Множество называется счётным, если элементы множества биективно сопоставлены со множеством натуральных чисел.

Приведём примеры счётных множеств.

Пример 1. Имеем множество всех целых чисел. Установим соответствие между всеми натуральными числами по схеме:

0, -1, 1, -2, 2, -3, 3…,
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7…,

Вообще, для n ≥ 0 сопоставим нечётное число 2n+1 , а отрицательному n < 0 – чётное число 2|n| , и тогда получим:

n ↔ 2n+1 при n ≥ 0;   n ↔ 2|n| при n < 0.

Пример 2. Множество 2, 4, 8, 16… 2^n… счетно.

Действительно, в данном случае имеем множество степеней числа 2. Здесь каждому числу 2^n соответствует число n.

Итак, если бесконечное множество оказывается возможным привести во взаимно однозначное соответствие с натуральным рядом чисел , то такое множество называют счетным.[1] Если бесконечное множество невозможно привести во взаимно однозначное соответствие с натуральным рядом чисел, то его называют несчетным.

Пример 3. Множество всех рациональных чисел – счетно.

Известно, что рациональное число можно представить в виде дроби r=q/p, где q и p – любые целые числа. Для того чтобы убедиться в том, что множество рациональных чисел счетно, представим все множество рациональных чисел в виде таблицы, в которую занесем несократимые дроби. Обходя таблицу по направлению стрелок,

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} \longrightarrow & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \longrightarrow & \frac{1}{5} & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{2}{7} & \frac{2}{9} & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{3}{7} & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{4}{1} & \frac{4}{3} & \frac{4}{5} & \frac{4}{7} & \frac{4}{9} & \ldots\ldots\ldots \\
. & . & . & . & . & \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

приходим к последовательности

$$1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 3,\ 4,\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{7},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{3},\ldots..,$$

позволяющей занумеровать все эти числа.

Пример 4. Множество всех алгебраических чисел - счётно.

Алгебраическими числами называются числа, которые являются корнями уравнения

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = 0,$$

[1] Следует заметить, не все бесконечные множества являются счетными.

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ - целые числа (они могут быть положительными, отрицательными и равными нулю). Числа, которые не являются алгебраическими, называются **трансцендентными**.

Итак, всякое множество, равномощное множеству всех натуральных чисел, называется **счетным**. Мощность счетного множества часто обозначается знаком $\aleph_0$ (Читается алеф нуль. Алеф – первая буква семитских алфавитов (финикийского, древнееврейского, арабского и др.). Если E – счетное множество, то его мощность $|E|=\aleph_0$.

1.13.2 Свойства счетных множеств

1. Всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.

Доказательство. Пусть A –счетное множество, B – его подмножество. Занумеруем элементы множества A: $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ Пусть $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ - те из них, которые входят в B. Если среди чисел $n_1, n_2, \ldots$ есть наибольшее, то B конечно, в противном случае B счетно, поскольку его члены $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ занумерованы числами 1, 2,…

2. Объединение любого конечного или счетного множества счетных множеств есть снова счетное множество.

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ - счетные множества. Можно считать, что они попарно не пересекаются.[2] Все элементы множеств $A_1, A_2, \ldots$ можно записать в виде следующей бесконечной таблицы:

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	….
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	….
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	….
…	…	…	…	…

где в первой строке стоят элементы множества A_1, во второй – элементы множества A_2 и т. д. Занумеруем все эти элементы по диагоналям, т.е. за первый элемент примем a_{11}, за второй a_{12}, за третий a_{21} и т.д., двигаясь в порядке, указанном стрелками на следующей таблице:

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	….
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	….
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	….
…	…	…	…	…

[2] В противном случае вместо них нужно рассматривать множества A_1, $A_2 \setminus A_1$, $A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$, … каждое из которых не более чем счетно, - имеющие ту же самую сумму, что и множества $A_1, A_2, \ldots$

Ясно, что при этом каждый элемент каждого из множеств получит определенный номер, т.е. будет установлено взаимно однозначное соответствие между всеми элементами всех множеств A_1, A_2, … и всеми натуральными числами. Утверждение доказано.

3. Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

Доказательство. Пусть M – бесконечное множество. Выберем в нем произвольный элемент a_1. Поскольку M бесконечно, в нем найдется элемент a_2, отличный от a_1. Затем найдется a_3, отличный от a_1 и от a_2 и т. д. Продолжая этот процесс (который не может оборваться из-за нехватки элементов, т.к. M – бесконечно) полуим счетное подмножество $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ множества M. Утверждение доказано.

13.3 Эквивалентность множеств

Сравнивая те или иные бесконечные множества с натуральным рядом, мы пришли к понятию счетного множества. Ясно, что множества логично сравнивать не только с множеством натуральных чисел; установление взаимно однозначного соответствия (биекции) позволяет сравнивать между собой любые два множества.

Определение: Два множества A и B, называют эквивалентными (обозначается $A \sim B$), если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Понятие эквивалентности применимо к любым множествам, как конечным, так и бесконечным. Два конечных множества эквивалентны между собой тогда когда число элементов у них одинаково.

Определение счетного множества можно сформулировать следующим образом:

Множество называется счетным, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел.

Два множества, эквивалентные третьему, эквивалентны между собой, в частности, любые два счетных множества эквивалентны между собой.

Большую роль в решении практических задач теории множеств имеет **теорема Кантора–Бернштейна,** которую можно сформулировать следующим образом: «Пусть A и B – два произвольных множества. Если существует взаимно однозначное отображение f множества A на подмножество B_1 множества B и взаимно однозначное отображение g множества B на подмножество A_1 множества A, то A и B эквивалентны» .

1.13.4 Несчетные множества

Если A – конечное множество, то $|A|<|\beta(A)|$, т.е. мощность булеана любого конечного множества больше мощности самого множества, что вполне очевидно, так $|\beta(A)| = 2^{|A|}$.

Так как каждое бесконечное множество также имеет подмножество, то можно говорить и мощности его булеана.

Пусть задано счетное множество N. Тогда по аналогии с конечными множествами можно утверждать, что мощность булеана $|\beta(N)| = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Строгость этого высказывания определяется теоремой, согласно которой «**Мощность булеана бесконечного множества N превышает мощность множества N**».

Итак, если N – счетное множество, то согласно приведенной теореме

$$|\beta(N)|>|N|,\ \text{т.е.}\ \aleph_1 > \aleph_0.$$

Множество $\beta(N)$ несчетно и его мощность равна мощности **континуума.**

Теорема Г. Кантора. Множество всех действительных чисел интервала $0 < a \le 1$ **несчетно**

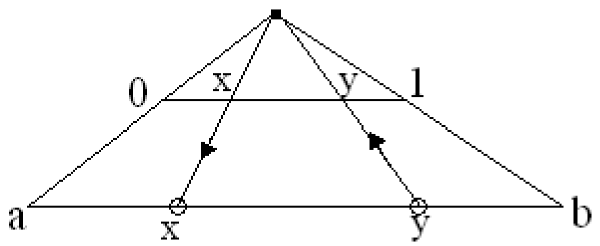
Доказательство Любое число рассматриваемого интервала представляет собой конечную или бесконечную десятичную дробь вида $0.a_1a_2a_3$ … и может быть представлено точкой отрезка вещественной оси. Т.е. теорема утверждает, что множество точек отрезка (0,1] несчетно.

Предположим, что последовательность $0.a_1a_2a_3$… представляет собой бесконечный перечень действительных чисел, принадлежащих этому интервалу. Вопрос состоит в том, может или не может подобный перечень содержать все числа этого интервала, т.е. нельзя ли найти число, которое принадлежит этому интервалу, но не входит в указанный перечень чисел. Для того, чтобы найти такое число, запишем все входящие в перечень десятичные дроби одну под другой. Образуем диагональную дробь, указанную стрелками, и заменим в ней каждую из последовательных цифр a_{nn} на отличную от нее цифру a'_{nn} так, чтобы при этом не получилась конечная дробь.

$$\begin{array}{llllll}
0.a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots\ldots\ldots \\
\quad\searrow & & & & \\
0.a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots\ldots\ldots \\
 & \quad\searrow & & & \\
0.a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ldots\ldots\ldots \\
 & & \quad\searrow & & \\
0.a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \ldots\ldots
\end{array}$$

Полученная дробь $0.a'_{11}a'_{22}a'_{33}$ … представляет собой действительное число, принадлежащее нашему интервалу, но не входящее в рассматриваемый перечень. Действительно, эта дробь отличается от первой из данных дробей своей первой цифрой после запятой, от второй - своей второй цифрой после запятой, от третьей - третьей цифрой после запятой и т. д. Таким образом, мы получили число из данного интервала, которое не пронумеровано и поэтому множество не является счетным. Его мощность называется **континуумом**, а множества такой мощности называются **континуальными**. Теорема доказана.

Рассматриваемый интервал (0,1] может быть приведен во взаимно однозначное соответствие с любым другим интервалом (a,b].



Такое взаимно однозначное соответствие можно установить с помощью центральной проекции.

Так как мощность булеана β(N) равна мощности множества всех действительных чисел интервала $0 \le x < 1$, то эти множества эквивалентны. Оба они характеризуются кардинальным числом (мощностью) $\aleph_1$. Такие множества условно называют $\aleph_1$-множествами.

Следует отметить, что мощность континуума не самая большая мощность среди бесконечных множеств. Рассмотрим множество с элементами из $\aleph_1$-множества и составим всевозможные подмножества из этих элементов. Тогда очевидно, что мощность вновь полученного множества $\aleph_2$ будет определяться как $\aleph_2 = 2^{\aleph_1}$, откуда следует, что мощность булеана $\aleph_1$-множества превышает мощность $\aleph_1$-множества, т.е. $\aleph_2 > \aleph_1$. Точно также можно показать, что $\aleph_3 = 2^{\aleph_2}$ и т.д.

В 1878 году Г. Кантор высказал предложение, что всякое множество действительных чисел либо конечно, либо счетно, либо несчетно (т.е. эквивалентно множеству действительных чисел). В соответствии с этим любое бесконечное десятичное число принадлежит либо счетному множеству A, либо несчетному множеству B мощности $|B| = \aleph_1 = 2^{|A|} = 2^{\aleph_0}$. Но как было показано ранее $\aleph_1 > \aleph_0$, т.е. $|B| > |A|$, где B – первое после счетного множество, мощность которого превышает мощность счетного множества. Но тут и возникает вопрос насчет его «первости». А вдруг существует некоторое множество X для которого $|A| \le |X| \le |B|$? Поэтому вполне естественен вопрос: «Верно ли, что мощность множества всех подмножеств счетного множества есть первая мощность, превосходящая мощность множества всех натуральных чисел»? Это и есть знаменитая **гипотеза континуума**. В 1938 г. австрийский математик К.Гедель показал, что данная гипотеза не может быть опровергнута традиционными средствами теории множеств.

Множество действительных чисел делится на два непересекающихся класса. Первый класс образуют алгебраические числа, второй – трансцендентные. **Трансцендентные числа** (лат. *transcendens* –выходящий за пределы) – числа, которые не могут быть корнями никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами. Например, $\pi = 3{,}14159265\ldots$, $e = 2{,}71828\ldots$, или $lg\,A$, где A – любое целое число, не изображаемого единицей с нулями и др.

В общем случае, трансцендентные числа не представляют какую-то математическую редкость (хотя им и имена дают!). Действительно, если – E – множество действительных чисел, а R – множество алгебраических чисел, то $E \cap \overline{R}$ представляет собой множество трансцендентных чисел. Но множество R - счетно, следовательно, множество $E \cap \overline{R}$ несчетно, т.е. **множество трансцендентных чисел несчетно**. Именно так Г. Кантор доказал существование трансцендентных чисел в 1873 г, что произвело на математиков мира большое впечатление.

Несмотря на простоту определения множества трансцендентных чисел, вопрос о трансцендентности того или иного числа решается довольно трудно. Например, когда в 1882 г. была доказана трансцендентность числа $\pi = 3{,}14159265\ldots$, то это явилось заметным событием в науке того времени.

1.13.5 Верхняя и нижняя границы множества

Рассматривая подмножество A упорядоченного основного (в частности, универсального) множества I и пусть R – некоторое отношение порядка на I. Если существует такой элемент $M \in I$, что для всех $a \in A$ справедливо утверждение aRM, то M называется **мажорантой (или верхней границей)** множества A.

Аналогично, если существует такой элемент $m \in I$, что для всех $a \in A$ удовлетворяет отношение mRa, то m называется **минорантой (нижней границей)** множества A.

Если мажоранта M множества A принадлежит множеству A, то M называется **максимумом** множества A (наибольшим элементом множества A). Обозначается следующим образом: $maxA=M;$ $\max\limits_{a \in A} a = M$. Максимум M единственен. Действительно, предположим противное, что множество A имеет два максимума (M_1 и M_2), тогда условия $\forall(a)\ (aRM_1)$ и $\forall(a)\ (aRM_2)$ влекут M_1RM_2 и M_2RM_1, следовательно, в силу антисимметричности отношений порядка $M_1=M_2$.

Если миноранта $m \in A$, то m называется минимумом множества А (наименьшим элементом). Обозначается: $minA=m$; $\min\limits_{a \ni A} a = m$. Минимум также m единственен.

Верхней границей A является число H такое, что для любого $a \in A$ имеет место $a \le H$ ($\forall\ a|a \in A \rightarrow a \le H$; $H - sup\ A$).

Точной верхней границей или **супремумом** (лат. *supremum* — самый высокий) множества A, обозначаемой $sup\ A$, называют верхнюю границу, которая не превосходит любую другую верхнюю границу. Множество может иметь только одну точную верхнюю границу .

Нижней границей множества A является число L такое, что для любого $a \in A$ имеет место $a \geq L$ $(\forall\ a|a \in A \to a \geq L$ - $inf\,A)$.

Точной нижней границей называют нижнюю границу, не меньшую любой другой нижней границы. Нижняя граница обозначается $inf\ A$ и называется **инфинумом** (лат. *infimum* — самый низкий) .

Рассмотрим отрезок $[a, b]$, $a < b$ на числовой оси. Основное множество – множество действительных чисел упорядочено отношением “$\leq$”. Любое действительное число, большее или равное b, является мажорантой. Множество этих мажорант имеет минимум, равный b, следовательно $sup[a, b]=b$. Аналогично $inf[a, b]=a$.

С другой стороны, мажоранта b принадлежит отрезку $[a, b]$, следовательно, число b является максимумом: $max[a, b]=b$; $min[a, b]=a$.

Если бы рассматривали интервал (a, b), то a и b являются соответственно минорантой и мажорантой, но не принадлежат интервалу (a, b), поэтому не являются минимумом и максимумом (a, b). Числа a и b и в этом случае являются нижней и верхней границами множества (a, b) соответственно.

Таким образом, если множество мажорант (минорант) в свою очередь имеют минимум (максимум), то этот элемент единственен и соответствует верхней (нижней) границе.[1]

Пример 1. Для множества $S = \left\{ \frac{1}{k} \,|\, k \in N \right\} = \left\{ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots \right\}$

$$sup\ S = 1;\ \ inf\ S = 0.$$

Пример 2. Множество положительных рациональных чисел $Q_+ = \{\, x \in Q \,|\, x > 0 \,\}$ не имеет точной верхней грани в Q, точная нижняя грань $inf\ Q = 1$.

Пример 3. Множество $Z = \{\, z \in Q \,|\, x^2 < 2 \,\}$ рациональных чисел, квадрат которых меньше двух, не имеет точных верхней и нижней граней в Q, но если его рассматривать как подмножество множества действительных чисел, то $sup\, Z = \sqrt{2}$ и $inf\ Z = -\sqrt{2}$.

Теорема о верхних и нижних границах подмножества:

Если $B \subseteq A$ то, $inf\ B \geq inf\,A$; $sup\,B \leq sup\,A$.

Доказательство.

Пусть b' - элемент множества B, имеющей наименьшее значение, т. е. $b' \in B$ и $b' = inf\,B$. Но $B \subseteq A$, тогда $b' \in A$.

Пусть a' - элемент множества A, имеющий наименьшее значение , т.е. $a' \in A$ и $a' = inf\ A$. При этом, если $b' = a'$, то $b' = inf\ A$; если $b' \neq a'$, то $b' > a' = inf\,A$. Таким образом , $b' \geq inf\,A$ или $inf\,B \geq inf\,A$.

Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

[1] Верхнюю и нижнюю границы множества называют также верхней и нижней гранью соответственно.

Литература

Основная:

1. С.Д. Шапорев. Дискретная математика. С-кт Петербург, БХВ-Петербург, 2007 г.
2. Ю.П. Шевелев. Дискретная математика, СПб, «Лань», 2008 г.
3. Ю.П. Шевелев и др. Сборник задач по дискретной математике.

Дополнительная:

1. Ф.А. Новиков. Дискретная математика для программистов. Санкт-Петербург, Питер, 2001 г.
2. С.Н. Поздняков, С.В. Рыбин. Дискретная математика. М., «Академия», 2008 г.
3. О.Е. Акимов. Дискретная математика. Логика, группы, графы. Москва, Лаборатория базовых знаний, 2001 г.