

Задачи для самостоятельного решения по курсу Дискретная математика.

Тема. Элементы теории множеств.

1. Изобразите элементы множеств на числовой прямой

1.1 $A_1 = \{x | x \in N, x \leq 4\};$

1.2 $A_2 = \{x | x \in Z, -2 \leq x < 4\};$

1.3 $A_3 = \{x | x \in Z, x \leq 4\};$

1.4 $A_4 = \{x | x \in R, |x| \leq 2\};$

1.5 $A_5 = \{x | x \in R, x \geq -5\};$

1.6 $A_6 = \{x | x \in R, x \leq 4\};$

1.7 $A_7 = \{x | x \in N, -2 < x \leq 3\};$

1.8 A_8 -множество целых корней уравнения

$$(x^2 - 9) \cdot (x - 4) \cdot (3x + 8) = 0;$$

1.9 A_9 -множество действительных корней уравнения

$$(x_2 - 4) \cdot (x^3 + 27) \cdot (3x + 10) = 0;$$

1.10 A_{10} -множество действительных решений неравенства

$$(x - 4) \cdot (x + 2) \cdot (x + 6) < 0;$$

1.11 A_{11} -множество действительных решений неравенства

$$|x^2 + 4x + 1| > 4;$$

1.12 A_{12} -множество численности целых решений неравенства

$$|2x - 3| < 5.$$

2. Укажите характеристическое свойство множеств

2.1 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\};$

2.2 $B = \{a, п, р, е, л, ь\};$

2.3 $C = \{12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96\};$

2.4 $D = \{+, -, \times, : \}.$

3. Задайте множества перечислением элементов

3.1 $A_1 = \{x | x \in N, x < 8\};$

3.2 $A_2 = \{x | x \in Z, -3 < x \leq 5\};$

3.3 $A_3 = \{x | x \in Z, |x| < 4\};$

3.4 A_4 – множество нечетных однозначных натуральных чисел;

3.5 A_5 – множество однозначных целых чисел кратных 3;

3.6 A_6 – множество двузначных натуральных чисел кратных 12;

- 3.7 $A_7 = \{x | x \in N, 4 \leq x < 8\}$;
 3.8 $A_8 = \{x | x \in R, (x + 4) \cdot (x^2 - 3) = 0\}$;
 3.9 A_9 – множество нечетных натуральных чисел меньших 17;
 3.10 A_{10} – множество отрицательных целых чисел больших;
 3.11 $A_{11} = \{x | x \in Z, -6 \leq x < -1\}$;
 3.12 $A_{12} = \{x | x \in R, (x^3 + 1) \cdot (x^2 - 25) = 0\}$.

4. Задайте множества указанием характеристического свойства.

- 4.1 $M_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$;
 4.2 $M_2 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$;
 4.3 $M_3 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$;
 4.4 $M_4 = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$;
 4.5 $M_5 = \{-1, -3, -5, -7, -9\}$;
 4.6 $M_6 = \{3, 6, 9, 12, 15\}$;
 4.7 $M_7 = \{10, 20, 30, 40, 50\}$;
 4.8 $M_8 = \{22, 44, 66, 88\}$;
 4.9 $M_9 = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$;
 4.10 $M_{10} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$;
 4.11 $M_{11} = \{1, 5, 9, 13\}$.
 4.12 $M_{12} = \{1, 2, 27, 256, 3125\}$.

5. Среди указанных множеств выберите конечные и задайте их перечислением элементов.

- 5.1 A – множество целых решений уравнения $2x+3=0$;
 5.2 B – множество целых чисел, меньших 5;
 5.3 C – множество натуральных чисел, меньших 4;
 5.4 D – множество квадратов, со стороной 5 см;
 5.5 E – множество действительных решений уравнения

$$x^2 = 5\sqrt{x^2 - 2} - 4;$$

6. Выясните, в каких отношениях находятся множества A и B . Проиллюстрируйте эти отношения, используя диаграммы Эйлера-Венна.

- 6.1 $A = \{a, в, д\}$, B – множество букв слова «дружба»;
 6.2 $A = \{x | x \in R, x \geq 3.5\}$;
 6.3 A – множество окружностей, радиус которых равен 2 см, B – множество окружностей, радиус которых равен 6 см;
 6.4 A – множество уравнений, имеющих один действительный корень, B – множество квадратных уравнений;

- 6.5 A – множество решений уравнения $3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} = 315$, B – множество решений неравенства $10^{-x-1.5} - 10^{1-2x} > 0$;
- 6.6 A – множество решений уравнения $\sqrt{x^2 - 5x + 8} = x + 1$, B – множество решений уравнения $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$;
- 6.7 A – множество тригонометрических функций, B – множество четных функций;
- 6.8 C – множество равнобедренных треугольников, D – множество правильных треугольников, E – множество тупоугольных треугольников.
7. Задайте множества $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$, если A – множество окружностей, радиус которых равен 3 см. B – множество окружностей, радиус которых равен 5 см.
8. Задайте множества $X \setminus Y$; $Y \setminus X$; $X \cup Y$; $X \cap Y$; $X \times Y$, если X – множество решений неравенства $x^2(x + 3) \cdot (x - 4) < 0$, а Y – множество решений неравенства $\frac{1}{4} < x$.
9. Сформулируйте характеристические свойства множеств $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, где A – множество уравнений, имеющих два действительных корня, B – множество квадратных уравнений.
10. X – множество числовых выражений, имеющих смысл на множестве N . Y – множество числовых выражений, имеющих смысл на множестве Z . Сформулируйте характеристическое свойство следующих множеств: $X \cup Y$; $X \cap Y$; $X \setminus Y$; $Y \setminus X$.
11. Задайте множества $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \setminus B$, $A \setminus C$, $B \setminus A$, $A \cap B \cap C$, $(A \cup C) \cap (A \setminus B)$, $A \Delta B$, $A \Delta C$, $B \Delta C$, $A(B \Delta C)$, $B \cup (A \Delta C)$, $C \Delta (A \cup B)$, $(C \cup B) \cap (C \Delta A)$, $(A \cup C) \cap (C \Delta A)$, $(A \cup B) \cap (C \Delta B)$, $(A \setminus B) \cap (C \setminus B)$, $A \cup B \cap C$, $A \cap B \cup C$, $A \times B$, $A \times C$, $B \times C$, $B \times A$, $C \times A$, $C \times B$, $(A \times C)(A \times B)$, $(A \times B) \cap (C \times A)$, $(B \cap C) \times A$, $(A \times B) \cup (B \times C)$
- 11.1 A – множество целых чисел, кратных 5,
 $B = \{x | x \in Z, x \leq 5\}$,
 $C = \{x | x \in R, x < 4\}$;
- 11.2 A – множество отрицательных целых чисел, кратных 5,
 $B = \{x | x \in R, -3.3 \leq x \leq 4.5\}$,

$$C = \{x|x \in Z, -7 < x < 1\};$$

$$\begin{aligned} 11.3 \quad A &= \{x|x \in R, 0 < x \leq 7\}, \\ B &= \{x|x \in Z, -10 < x \leq -4\}, \\ C &= \{x|x \in R, x < -4.5\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11.4 \quad A &= \{x|x \in R, -3 < x < 5\}, \\ B &= \{x|x \in Z, x \leq 2\}, \\ C &= \{x|x \in N, (x - 2.5) \cdot (x - 4) \cdot (x + 5)\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11.5 \quad A &= \{x|x \in Z, x < 5\}, \\ B &= \{x|x \in R, 0 \leq x < 10\}, \\ C &= \{x|x \in R, (x^2 - 3) \cdot (x^3 + 8) = 0\} \end{aligned}$$

12. A – множество окружностей плоскости, радиус которых равен 5. B – множество окружностей плоскости, радиус которых равен 8. Задайте множества: $A \Delta B$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

13. M – множество уравнений, имеющих два действительных корня N – множество квадратных уравнений. Сформулируйте характеристическое свойство множеств: $M \cup N$, $M \cap N$, $M \setminus N$.

14. Для заданных множеств

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y)|x \in R, y \in R, y \geq x + 2\}, \\ B &= \{(x, y)|x \in R, y \in R, y \geq x^2 - 2\}, \\ C &= \{(x, y)|x \in R, 0 \leq x < 5, y \in R\}. \end{aligned}$$

Найдите $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \Delta B$, $A \Delta C$, $B \Delta C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cup B \setminus C$, $B \cap C \setminus A$, $(C \setminus A) \cap B$. Каждый случай проиллюстрируйте графически.

15. A – множество многоугольников, B – множество прямоугольных треугольников, C – множество равнобедренных треугольников, D – множество ромбов, E – множество прямоугольников, F – множество параллелограммов. Постройте диаграммы Эйлера-Венна для заданных множеств. Укажите характеристическое свойство элементов множеств: а) $E \cap B \cap C$; б) $C \setminus B \cup D \cap E$; в) $D \setminus E \cup B$; г) $E \cup F$.

16. Задайте множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$ если

а) A – множество решений уравнений $x^2 + y = y^2 + x$,
 B – множество решений уравнений $y^2 + x = 6$;

б) A – множество решений уравнений $x \cdot y - \frac{x}{y} = \frac{16}{3}$,

B – множество решений уравнений $x \cdot y - \frac{y}{x} = \frac{9}{2}$;

в) A – множество решений уравнений $|2x + 3y| = 5$,

B – множество решений уравнений $|2x + 3y| = 1$.

17. На диаграммах Эйлера – Венна изобразите отношения между заданными множествами:

а) $A = \{x | x \in R, x < 5\}$,

$B = \{x | x \in R, -10 \leq x \leq 10\}$,

$C = \{x | x \in Z, -3 \leq x \leq 4\}$.

б) A – множество прямоугольных треугольников,

B – множество остроугольных треугольников,

C – множество равносторонних треугольников.

в) A – область определения функции $y = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$,

B – множество решений неравенства $3x - x^2 - 4 > 5 - 3x$,

C – множество решений неравенства $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x}{3} - 7\right) > 0$.

г) A – множество окружностей плоскости,

B – множество прямоугольников плоскости,

C – множество ромбов плоскости.

д) A – множество прямых плоскости, параллельных прямой $y = x$,

B – множество прямых плоскости, параллельных прямой $y = 2 - x$,

C – множество прямых плоскости, параллельных прямой $x = 2$.

е) A – область определения функции $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$,

B – область определения функции $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} + \sqrt{x^2 - 16}$,

C – область определения функции $y = \frac{1}{x-8}$.

ж) A – множество прямых плоскости, параллельных прямой $y = x + 2$,

B – множество прямых плоскости, параллельных прямой $y = 3x + 1$,

C – множество прямых плоскости, параллельных прямой $x = 5$,

D – множество прямых плоскости, параллельных прямой $y = x - 2$.

з) A – множество треугольников плоскости,

B – множество четырёхугольников плоскости,

C – множество трапеций,

D – множество параллелограммов,
 E – множество квадратов,
 F – множество прямоугольников.

- и) A – множество натуральных делителей числа 36,
 B – множество четных чисел,
 C – множество простых чисел, меньших 3,
 D – множество общих делителей числа 24, 72, 96,
 E – множество отрицательных целых чисел.
- к) A – множество всех точек плоскости, ордината которых больше 2,
 B – множество всех точек плоскости, абсцисса которых больше 3,
 C – множество всех точек плоскости, абсцисса которых равна -1 ,
 D – множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условию $y = x$.
- л) A – множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условию: $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$,
 B – множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условию: $\begin{cases} x \leq 0, \\ y \leq 0 \end{cases}$,
 C – множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условию: $y = -4x + 2$.